On the Antisymmetric Tensor and Sources of the Electromagnetic Field

Yurii A. Spirichev

The State Atomic Energy Corporation ROSATOM, "Research and Design Institute of Radio-Electronic Engineering" - branch of Federal Scientific-Production Center "Production Association "Start" named after Michael V.Protsenko", Zarechny, Penza region, Russia

E-mail: yurii.spirichev@mail.ru

(Dated: August 28, 2017)

Abstract

The canonical antisymmetric electromagnetic field tensor has four-dimensional divergences for each of the indices, so the introduction of a field source into its divergence equation for only one of the indices is incorrect. The total divergence of the antisymmetric tensor is identically zero and does not have a field source. The article is devoted to the mathematically correct introduction of the electromagnetic field source into the field equations. The field equations follow from a symmetric tensor having a full four-dimensional divergence not equal to zero. This divergence is equal to the four-dimensional source of the electromagnetic field. From the new system of equations of the electromagnetic field follow the canonical wave equations for the electric field strength, magnetic induction, electromagnetic potential (Maxwell's equations in the Lorentz gauge), and also follow the wave equation for the divergence of the electromagnetic potential describing longitudinal waves that do not have a magnetic component.

Key words: Electromagnetic field, asymmetric tensor, symmetric tensor, antisymmetric tensor, Maxwell equations, longitudinal waves of electromagnetic potential.

Contents

1. Introduction

2. The antisymmetric electromagnetic field tensor and Maxwell's equations

3. The asymmetric and symmetric tensors of the electromagnetic field

4. Equations of the electromagnetic field with field sources

5. Conclusion

References

1. Introduction

The theoretical basis of the classical theory of the electromagnetic field (EMF) is the equations formulated by Maxwell in his fundamental work "A Treatise on Electricity and Magnetism" based on experimental results accumulated by the middle of the 19th century. These equations played a key role in the development of theoretical physics and had a strong influence on the creation of a special theory of relativity and other theories. Already at the beginning of the twentieth century, classical electrodynamics was considered a completed science, and the theory of EMF was further developed in the form of quantum electrodynamics. Despite this, in the classical theory of EMF there are several obscure places and controversial issues. In this regard, there are theoretical and experimental works on these controversial issues and some authors question certain provisions of the classical theory of EMF. For example, for about a hundred years there is the Abraham-Minkowski problem, which consists in the absence of a common opinion about the correct energy-momentum tensor of the interaction of EMF with matter and the existence of the Abraham electromagnetic force [1-13]. This leads to the creation of new EMF tensors [14-20]. Another controversial issue is the transfer of angular momentum by a plane electromagnetic wave [21-31]. The problem is that the canonical EMF wave equations do not describe the transfer by a plane electromagnetic wave of the angular momentum. Until recently, electrodynamics lacked wave equations for the energy and momentum of EMF. These equations are obtained from the new energy-momentum tensor in paper [20]. Controversial issue is the existence of longitudinal electromagnetic waves in vacuum [32-40]. In the classical theory of EMF, Newton's third law is not observed in the interaction of moving electric charges. This led to the appearance of a hypothesis about the existence of a "scalar (potential) magnetic field" [41], the introduction of which into electrodynamics makes it possible to preserve the fulfillment of Newton's third law. The reality of the "scalar magnetic field" is confirmed by different authors in experiments on the longitudinal interaction of direct currents [37, 41]. The most obvious incompleteness of classical electrodynamics is manifested in plasma theory. Up to now, there is no understanding what kind electromagnetic forces hold charged particles in ball lightning, and the problem of long-term plasma confinement in existing technical installations, despite half a century of intensive work, is far from being solved. There is no understanding of the cause of the existence of hot spots in Z-pinches and a number of other plasma phenomena. The above problems require well-founded attention to the basics of the classical theory of EMF and to the Maxwell equations themselves.

Maxwell's equations are obtained from an antisymmetric tensor of the second rank in the form of its four-dimensional divergence along one of the indices. To this divergence, equate the source of the field. However, the canonical antisymmetric tensor EMF has four-dimensional divergences for each of the indices, so the introduction of a field source into its divergence equation for only one of the indices is incorrect. The total four-dimensional divergence of the antisymmetric tensor, equal to the sum of divergences for each index, is identically zero and does not have a field source.

The article is devoted to the analysis of Maxwell's equations and to the mathematically correct introduction of the four-dimensional field source into the EMF equations.

EMF and electric charges are considered in a vacuum. The geometry of space-time is taken in the form of pseudo-Euclidean Minkowski space (ct, ix, iy, iz). The four-dimensional electromagnetic potential is defined as $\mathbf{A}_\nu(\varphi/c, i\mathbf{A})$, where φ and A are the scalar and vector potentials of the EMF. The four-dimensional current density is defined as $\mathbf{J}_\nu(\rho\cdot c, i\mathbf{J})$, where ρ and **J** are the electric charge density and the current density.

2. The antisymmetric electromagnetic field tensor and the Maxwell equations

In the basic courses of theoretical physics, the electromagnetic field (EMF) is described by the canonical antisymmetric tensor of the second rank:

$$F_{[\mu\nu]} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu \tag{1}$$

This antisymmetric EMF tensor is a four-dimensional (covariant) rotor [42]. The components of the antisymmetric tensor $F_{[\mu\nu]}$ are the derivatives of the scalar φ and vector **A** potentials EMF, which are defined in this tensor as components of the electric field strength **E** and the magnetic field induction **B**:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \partial_t \mathbf{A} \qquad \mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A} = (\partial_y A_z - \partial_z A_y)_x + (\partial_z A_x - \partial_x A_z)_y + (\partial_x A_y - \partial_y A_x)_z$$

Maxwell's equations are obtained from the antisymmetric tensor (1) in the form of its four-dimensional divergence for one of the indices. To this divergence is equated the source of EMF [43] [43] $\partial_\mu F_{[\mu\nu]} = \mathbf{J}_\mu$ (here and below, the covariant and contravariant indices do not differ). We write these equations in vector form:

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0 \qquad \text{or} \qquad -\partial_t \nabla\cdot\mathbf{A} - \Delta\varphi = \rho/\varepsilon_0 \tag{2}$$

$$\nabla\times\mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\partial_t \mathbf{E} = \mu_0\cdot\mathbf{J} \qquad \text{or} \qquad \frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\partial_t\nabla\varphi + \nabla\times\nabla\times\mathbf{A} = \mu_0\cdot\mathbf{J} \tag{3}$$

In these equations, the sources of the ρ and **J** fields were introduced manually, based on general considerations and experimental results.

From the antisymmetric tensor EMF (1), in the form of the well-known tensor identity $\partial_\eta F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\eta\mu} + \partial_\mu F_{\nu\eta} = 0$, two more Maxwell equations follow:

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \qquad \text{or} \qquad \nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = 0 \tag{4}$$

$$\nabla\times\mathbf{E} + \partial_t\mathbf{B} = 0 \qquad \text{or} \qquad -\nabla\times\partial_t\mathbf{A} + \partial_t\nabla\times\mathbf{A} = 0 \tag{5}$$

When writing in the potentials of an EMF, these equations are obvious vector identities. Such a record of them shows that they have a conditional physical meaning, which can be formulated only when writing them in terms of **E** and **B**.

Let us consider the question of introducing the sources of the field ρ and **J** into Eqs. (2) and (3). The left-hand sides of these equations represent the four-dimensional divergence of the tensor (1) $\partial_\mu F_{[\mu\nu]}$ with respect to the index μ. The second-rank tensor has divergences for each of the two indices: $\partial_\mu F_{[\mu\nu]}$ and $\partial_\nu F_{[\mu\nu]}$. Obviously, the divergence of the antisymmetric tensor (1) with respect to the second index ν has the opposite sign $\partial_\nu F_{[\mu\nu]} = -\partial_\mu F_{[\mu\nu]}$, and the total divergence of the tensor (1), as a four-dimensional rotor, is identically equal to zero $\partial_\mu F_{[\mu\nu]} + \partial_\nu F_{[\mu\nu]} = 0$. The introduction of the source of the field $\mathbf{J}_\mu$ into the divergence equation $\partial_\mu F_{[\mu\nu]} = \mathbf{J}_\mu$ of the second-rank tensor with respect to only one of its indices is an illegal action that does not have a physical meaning. In accordance with the Gauss theorem, the field rotor has no sources in principle. The left-hand side of the equation $\partial_{\mu\nu} F_{[\mu\nu]} = \partial_\mu \mathbf{J}_\mu$ describing the motion (change) of the EMF is identically equal to zero, and the right-hand side describes the motion of electric charges that excites the wave EMF. Thus, the equation $\partial_{\mu\nu} F_{[\mu\nu]} = \partial_\mu \mathbf{J}_\mu$ is contradictory, its left-hand side must describe the wave motion of the EMF excited by the right-hand side and should not be identically equal to zero. Conversely, if the left side of this equation is identically zero, then its right-hand side must be identically equal to zero. However, Eqs. (2) and (3) are the result of generalization of the experimental data. However, Eqs. (2) and (3) are the result of generalization of the experimental data. It is natural to assume that the description of EMF with sources using the antisymmetric tensor (1) is unsatisfactory. The question of an alternative, satisfactory description of EMF with field sources will be considered in the next section.

3. The asymmetric and symmetric tensors of the electromagnetic field

The definition of the canonical antisymmetric tensor (1) $F_{[\mu\nu]} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu$ includes an asymmetric tensor of the second rank, which is a four-dimensional derivative of the electromagnetic potential $\partial_\mu \mathbf{A}_\nu$. Denote it as $F_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu$. Let us write this tensor in the matrix form:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu = \begin{pmatrix} \frac{1}{c^2}\partial_t \varphi & \frac{1}{c} i \cdot \partial_t A_x & \frac{1}{c} i \cdot \partial_t A_y & \frac{1}{c} i \cdot \partial_t A_z \\ -\frac{1}{c} i \cdot \partial_x \varphi & \partial_x A_x & \partial_x A_y & \partial_x A_z \\ -\frac{1}{c} i \cdot \partial_y \varphi & \partial_y A_x & \partial_y A_y & \partial_y A_z \\ -\frac{1}{c} i \cdot \partial_z \varphi & \partial_z A_x & \partial_z A_y & \partial_z A_z \end{pmatrix} \tag{6}$$

This asymmetric tensor can be decomposed into symmetric and antisymmetric tensors $F_{\mu\nu} = F_{[\mu\nu]}/2 + F_{(\mu\nu)}/2$. It is clear from the expansion that, in addition to the antisymmetric EMF tensor $F_{[\mu\nu]}$, one can reasonably include the symmetric EMF tensor $F_{(\mu\nu)}$ in the EMF description. In contrast to the antisymmetric tensor $F_{[\mu\nu]}$, symmetric $F_{(\mu\nu)}$ and asymmetric $F_{\mu\nu}$ EMF tensors have complete four-dimensional divergences that are not equal to zero. In article [44] it is shown that the total divergence of an asymmetric tensor of the second rank is equal to the divergence of a symmetric tensor with respect to one of the indices. We write the symmetric EMF tensor $F_{(\mu\nu)}$ in the matrix form:

$$F_{(\mu\nu)}=\begin{pmatrix} 2\frac{1}{c^2}\partial_t\varphi & \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_x-\partial_x\varphi) & \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_y-\partial_y\varphi) & \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_z-\partial_z\varphi) \\ \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_x-\partial_x\varphi) & 2\partial_x A_x & (\partial_x A_y+\partial_y A_x) & (\partial_x A_z+\partial_z A_x) \\ \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_y-\partial_y\varphi) & (\partial_x A_y+\partial_y A_x) & 2\partial_y A_y & (\partial_y A_z+\partial_z A_y) \\ \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_z-\partial_z\varphi) & (\partial_x A_z+\partial_z A_x) & (\partial_y A_z+\partial_z A_y) & 2\partial_z A_z \end{pmatrix} \tag{7}$$

This symmetric tensor can be written in the form $F_{(\mu\nu)}=\partial_\mu\mathbf{A}_\nu+\partial_\nu\mathbf{A}_\mu$.

4. Equations of the electromagnetic field with field sources

Since the total four-dimensional divergence of the symmetric EMF tensor is not zero, we introduce into its equation the source of the EMF $\partial_\mu F_{(\mu\nu)}=\mathbf{J}_\mu$. This equation is equivalent to the equation $(\partial_\mu F_{\mu\nu}+\partial_\nu F_{\mu\nu})/2=\mathbf{J}_\mu$ or $\partial_\mu(\partial_\mu\mathbf{A}_\nu+\partial_\nu\mathbf{A}_\mu)=\mathbf{J}_\mu$. Let us write down this four-dimensional divergence of the symmetric tensor $F_{(\mu\nu)}$ in three-dimensional form:

$$2\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\varphi+\partial_t\nabla\cdot\mathbf{A}-\Delta\varphi=\rho/\varepsilon_0 \tag{8}$$

$$\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\partial_t\nabla\varphi-\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\Delta\mathbf{A}=\mu_0\cdot\mathbf{J} \tag{9}$$

Eq. (8) replaces Eq. (2) describing the Gaussian law for an electric field, and Eq. (9) replaces the Ampere-Maxwell total current Eq. (3). Eq. (9) can be written in the form:

$$\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\partial_t\nabla\varphi-2\cdot\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})+\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}=\mu_0\cdot\mathbf{J} \tag{10}$$

In this form the fourth term is a magnetic field rotor. For the static case, Eqs. (8) and (10) can be written in the form:

$$-\Delta\varphi=\rho/\varepsilon_0 \tag{11}$$

$$-2\cdot\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})+\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}=\mu_0\cdot\mathbf{J} \tag{12}$$

Eq. (11) for the static case coincides with the Maxwell Eq. (2) and also describes the Gaussian law for a constant potential electric field. Eq. (12) differs from the Maxwell equation for the stationary case by the presence of the first term with the divergence of the vector potential. This term represents the gradient of the hypothetical "scalar (potential) magnetic field" introduced by Nikolaev [41] into the Ampere-Maxwell Eq. (3) so that to explain the longitudinal interaction between steady-state currents and to ensure compliance with Newton's third law in electrodynamics. Eq. (12) coincides with the equation given in [37, 41], to within a constant coefficient of the first term. In these papers, Eq. (12) was constructed empirically on the basis of experimental results by supplementing the Ampere-Maxwell equation. Here, Eq. (12) is obtained mathematically strictly, as a consequence of the divergence of the symmetric EMF tensor $F_{(\mu\nu)}$. Thus, equation (9) eliminates the problem of violating Newton's third law in electrodynamics.

Eq. (9) can be written in the form:

$$\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\partial_t\nabla\varphi-2\cdot\Delta\mathbf{A}-\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}=\mu_0\cdot\mathbf{J} \tag{13}$$

This equation contains the components of the electric field and magnetic induction and is the wave equation for the EMF, i.e. it describes electromagnetic radiation.

We take the rotor from both sides of Eq. (9) and we get the canonical wave equation for the magnetic induction **B**:

$$\frac{1}{c^2}\partial_{tt}(\nabla\times\mathbf{A})-\Delta(\nabla\times\mathbf{A})=\mu_0\cdot\nabla\times\mathbf{J} \quad \text{or} \quad \frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{B}-\Delta\mathbf{B}=\mu_0\cdot\nabla\times\mathbf{J}$$

Eqs. (8) and (9) can be written in the form:

$$\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\varphi-\Delta\varphi+\partial_t(\frac{1}{c^2}\partial_t\varphi+\nabla\cdot\mathbf{A})=\rho/\varepsilon_0 \quad \text{and} \quad \frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{A}-\Delta\mathbf{A}-\nabla(\frac{1}{c^2}\partial_t\varphi+\nabla\cdot\mathbf{A})=\mu_0\cdot\mathbf{J}$$

Applying the Lorentz gauge $\partial_t\varphi/c^2+\nabla\cdot\mathbf{A}=0$ to them, we obtain Maxwell's canonical equations in the Lorentz gauge [43]:

$$\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\varphi-\Delta\varphi=\rho/\varepsilon_0 \quad \text{and} \quad \frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{A}-\Delta\mathbf{A}=\mu_0\cdot\mathbf{J}$$

We take the divergence from both sides of Eq. (8) and the time derivative of Eq. (9). After summarize these equations and simple transformations, we obtain the canonical wave equation for the electric field strength **E**:

$$\partial_t(\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{A}-\Delta\mathbf{A})+\nabla(\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\varphi-\Delta\varphi)=\nabla\rho/\varepsilon_0+\mu_0\cdot\partial_t\mathbf{J} \quad \text{or} \quad \Delta\mathbf{E}-\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{E}=\nabla\rho/\varepsilon_0+\mu_0\cdot\partial_t\mathbf{J} \tag{14}$$

We take the divergence of both sides of Eq. (9) and obtain the wave equation:

$$\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\nabla\cdot\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\partial_t\Delta\varphi-2\cdot\Delta(\nabla\cdot\mathbf{A})=\mu_0\nabla\cdot\mathbf{J} \tag{15}$$

This equation describes the longitudinal waves of the divergence of the vector potential or the longitudinal waves of the hypothetical "longitudinal (scalar) magnetic field" of Nikolaev [41]. A feature of these waves is the absence in it of the component of magnetic induction B. Therefore, these waves can be called longitudinal electric waves. Taking the time derivative of Eq. (8) and applying the continuity equation for the current density, from Eq. (15) we obtain the equation:

$$\frac{1}{c}\partial_t(\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\varphi - \Delta\varphi) + \nabla\cdot(\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A}) = \partial_t\rho + \nabla\cdot\mathbf{J} \qquad \text{or} \qquad (\frac{1}{c^2}\partial_{tt} - \Delta)\partial_\mu\mathbf{A}_\mu = \partial_\mu\mathbf{J}_\mu \quad (16)$$

This equation is the equation of longitudinal (scalar) waves of the divergence of the electromagnetic potential, the source of which is the divergence of the four-dimensional current density. The left-hand side of Eq. (16) can be equal to zero for the non-zero electromagnetic potential $\mathbf{A}_\mu$. Then Eq. (16) can be written in the form of two equations:

$$(\frac{1}{c^2}\partial_{tt} - \Delta)\partial_\mu\mathbf{A}_\mu = 0 = \partial_\mu\mathbf{J}_\mu \qquad \text{or} \qquad (\frac{1}{c^2}\partial_{tt} - \Delta)\partial_\mu\mathbf{A}_\mu = 0 \quad \text{and} \quad \partial_\mu\mathbf{J}_\mu = 0$$

From this equation, it follows that the wave equation for the divergence of the electromagnetic potential $(\frac{1}{c^2}\partial_{tt} - \Delta)\partial_\mu\mathbf{A}_\mu = 0$ is just as fundamental as the equation of conservation of current density $\partial_\mu\mathbf{J}_\mu = 0$.

Thus, Eqs. (8) and (9) are a system of EMF equations, which replaces Maxwell's equations (2) and (3). The Maxwell Eqs. (4) and (5) do not require replacement, since they are mathematical identities. Eq. (9) is an electromagnetic analog of the equation of motion of an isotropic elastic medium, known as the dynamic Navier-Stokes equation (or Lame equation) [45]. This equation shows the generality of the laws of motion of all kinds of matter. This analogy allows us to consider the field of a four-dimensional electromagnetic potential as a physical medium in which waves of the electromagnetic field propagate. These waves are waves of dynamic deformation of this medium. Consequently, the electromagnetic potential field $\mathbf{A}_\nu$ can be hypothetically identified as a "physical vacuum" or "ether."

5. Conclusion

The canonical antisymmetric electromagnetic field tensor has four-dimensional divergences for each of the indices, so the introduction of the source of the field into its divergence only for one of the indices is incorrect. The total divergence of the antisymmetric tensor is identically zero and does not have a source of EMF. In connection with this, in electrodynamics there is a problem of introducing a source of EMF into the EMF equations.

This problem is solved by that EMF sources are introduced into the divergence equations of an asymmetric or symmetric EMF tensor, for which the total divergence is not zero. These tensors are related to the canonical antisymmetric EMF tensor. EMF with sources are mathematically correctly described by a new system of equations that follows from the symmetric EMF tensor

$F_{(\mu\nu)} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu + \partial_\nu \mathbf{A}_\mu$. This eliminates the nonsense of introducing field sources into the divergence of the rotor in electrodynamics. From this system of EMF equations follow the canonical wave equations for the electric field and magnetic induction, wave equations for the scalar and vector potentials of the electromagnetic field (the Maxwell equations in the Lorentz gauge). From the new EMF equations follows a new wave equation describing the longitudinal (scalar) waves of the divergence of the electromagnetic potential that do not have a magnetic component

References

1. I. Brevik, *Minkowski momentum resulting from a vacuum–medium mapping procedure, and a brief review of Minkowski momentum experiments*, Annals of Physics 377 (2017) 10–21.
2. R. Medina and J. Stephany, *The energy-momentum tensor of electromagnetic fields in matter*, arXiv: 1703.02109.
3. M. G. Silveirinha, *Revisiting the Abraham-Minkowski Dilemma*, arXiv: 1702.05919.
4. J. J. Bisognano, *Electromagnetic Momentum in a Dielectric: a Back to Basics Analysis of the Minkowski-Abraham Debate*, arXiv: 1701.08683.
5. Yu. A. Spirichev, *Electromagnetic energy, momentum and forces in a dielectric medium with losses*, arXiv: 1705.08447.
6. M. E. Crenshaw, *The Role of Conservation Principles in the Abraham--Minkowski Controversy*, arXiv: 1604.01801.
7. C. Wang, *Is the Abraham electromagnetic force physical?*, Optik, (2016) 127, 2887–2889.
8. P. L. Saldanha, J. S. Oliveira Filho, *Hidden momentum and the Abraham-Minkowski debate*, arXiv: 1610.05785.
9. M. Testa, *A Comparison between Abraham and Minkowski Momenta*, Journal of Modern Physics, 2016, 7, 320-328.
10. C.J. Sheppard, B.A. Kemp, Phys. Rev. A 93 (2016) 053832.
11. I. N. Toptygin, K. Levina, Phys. Usp. **59** 141 (2016)
12. V. V. Nesterenko, A. V. Nesterenko, *Ponderomotive forces in electrodynamics of moving medium: The Minkowski and Abraham approaches*, arXiv: 1604.01708
13. C. Wang, J. Ng, M. Xiao, C.T. Chan, Sci. Adv. 2 (2016) e1501485.
14. M. Abragam, Be. Circ. mat. Palermo **28**, 1 (1909), **31**, 527 (1910).
15. F.J. Belinfante, *Physica* **6**, 887 (1939).
16. L.P. Pitaevskii, Sov. Phys. JETP 12 1008 (1961).
17. V.G. Polevoi, S.M. Rytov, Sov. Phys. Usp. **21** 630 (1978).

18. Yu. N. Obukhov Ann. Phys. **17** 9/10 830 (2008).
19. V.P. Makarov, A.A. Rukchadze, Phys. Usp. **54** 1285 (2011).
20. Yu. A. Spirichev, *A new form of the energy-momentum tensor of the interaction of an electromagnetic field with a non-conducting medium. The wave equations. The electromagnetic forces*, arXiv: 1704.03815.
21. K. S. Vul'fslon, Phys. Usp. 30 724 (1987)
22. I. V. Sokolov, Phys. Usp. 34 925 (1991)
23. A. L. Barabanov, Phys. Usp. 36 1068 (1993)
24. R. I. Khrapko, *Energy-momentum Localization and Spin*, Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series Physic. 2002, #10(1), p. 35
25. E. Leader and C. Lorce, *The angular momentum controversy: What's it all about and does it matter?*, Phys. Rep. 541, 163 (2014).
26. S. M. Barnett, Rotation of electromagnetic fields and the nature of optical angular momentum, J. Mod. Opt. 57, 1339 (2010).
27. K. Y. Bliokh, A. Y. Bekshaev and F. Nori, *Optical momentum and angular momentum in dispersive media: From the Abraham–Minkowski debate to unusual properties of surface plasmon-polaritons*, arXiv: 1706.05493
28. K. Y. Bliokh, A. Y. Bekshaev and F. Nori, *Optical Momentum, Spin, and Angular Momentum in Dispersive Media*, arXiv: 1706.06406
29. E. Leader, *The photon angular momentum controversy: Resolution of a conflict between laser optics and particle physics*, Phys. Lett. B 756, 303 (2016).
30. A. Aiello, P. Banzer, M. Neugebauer, and G. Leuchs, *From transverse angular momentum to photonic wheels*, Nature Photon. 9, 789 (2015).
31. D. L. Andrews and M. Babiker, *The Angular Momentum of Light* (Cambridge University Press, 2013).
32. K. Rebilas, *On the origin of "longitudinal electrodynamics waves*, // Europhys. Lett., 83 (2008) 60007.
33. J. R. Bray, M.C. Britton, *Comment on "Observation of scalar longitudinal electrodynamics waves*" by C. Monstein and J.P. Wesley. // Europhys. Lett. 66 (1) pp.153–154 (2004)
34. C. Monstein, J. P. Wesley, *Observation of scalar longitudinal electrodynamics waves* // Europhys. Lett. 59(4), pp. 514-520 (2002).
35. N.P. Hvorostenko, *Longitudinal electrodynamics waves*, Izv. Universities. Physics, 1002. №3. c. 24-29.
36. A.K. Tomilin, *The Fundamentals of Generalized Electrodynamics*, arXiv: 0807.2172.

37. Arbab I. Arbab1 and Mudhahir Al-Ajm, *The modified electromagnetism and the emergent longitudinal wave*, arXiv: 1403.2687
38. V. Simulik, *Longitudinal electromagnetic waves in the framework of standard classical electrodynamics*, arXiv: 1606.01738.
39. N.P. Hvorostenko, *Longitudinal electromagnetic waves*, Rus. Phys. J., vol. 35, no. 3, pp. 223-227, 1992.
40. G. Miyaji et al, *Intense longitudinal electric fields generated from transverse electromagnetic waves*, Appl. Phys. Lett., vol. 84, no. 19, pp. 3855-3857, 2004.
41. G. V. Nikolaev, *Not contradictory electrodynamics. Theories, experiments, paradoxes*, (Tomsk, NTL Publishing House, 1997)
42. P.A. M. Dirac, *General theory of relativity*, (John Wiley @ Sons, Inc., New Yorc,1975)
43. L. D. Landau, E. M. Lifshits, *The Classical Theory of Fields*, (Oxford: Pergamon Press, 1983)
44. Yu. A. Spirichev, *About conservation the angular momentum for asymmetric tensors in electrodynamics*, arXiv: 1708.04578
45. L. D. Landau, E. M. Lifshits, *The Theory of elasticity*, (Oxford: Pergamon Press, 1983)

Об антисимметричном тензоре и источниках электромагнитного поля

Юрий А. Спиричев

Научно-исследовательский и конструкторский институт радиоэлектронной техники – филиал федерального государственного унитарного предприятия федерального научно-производственного центра «Производственное объединение «Старт» имени М.В. Проценко»

E-mail: yurii.spirichev@mail.ru

Аннотация

Канонический антисимметричный тензор электромагнитного поля имеет четырехмерные дивергенции по каждому из индексов, поэтому введение источника поля в его дивергенцию только по одному из индексов является некорректным. Полная дивергенция антисимметричного тензора тождественно равна нулю и не имеет источника поля. Статья посвящена математически корректному введению источника электромагнитного поля в уравнения поля. Уравнения поля следуют из симметричного тензора, имеющего полную четырехмерную дивергенцию не равную нулю. Эта дивергенция равна четырехмерному источнику электромагнитного поля. Из новой системы уравнений электромагнитного поля следуют канонические волновые уравнения для напряженности электрического поля, магнитной индукции, электромагнитного потенциала (уравнения Максвелла в калибровке Лоренца), а также волновое уравнение для дивергенции электромагнитного потенциала, описывающее продольные волны, не имеющие магнитной компоненты.

Ключевые слова: Электромагнитное поле, несимметричный тензор, симметричный тензор, антисимметричный тензор, уравнения Максвелла, продольные волны электромагнитного потенциала.

Содержание

1. **Введение**
2. **Антисимметричный тензор электромагнитного поля и уравнения Максвелла**
3. **Несимметричный и симметричный тензоры электромагнитного поля**
4. **Уравнения электромагнитного поля с источниками поля**
5. **Заключение**

Литература

1. Введение

Теоретической основой классической теории электромагнитного поля (ЭМП) являются уравнения, сформулированные Максвеллом в своем фундаментальном труде «Трактат об электричестве и магнетизме» на основе накопленных к середине XIX века экспериментальных результатов. Эти уравнения сыграли ключевую роль в развитии представлений теоретической физики и оказали сильное влияние на создание специальной теории относительности и других теорий. Уже в начале XX века классическая электродинамика считалась завершенной наукой, и свое дальнейшее развитие теория ЭМП получила в виде квантовой электродинамики. Несмотря на это, в классической теории ЭМП существуют отдельные неясные места и спорные вопросы. В связи с этим, существуют теоретические и экспериментальные работы, посвященные этим спорным вопросам, а некоторые авторы ставят под сомнение отдельные положения классической теории ЭМП. Например, около ста лет существует проблема Абрагама-Минковского, которая заключается в отсутствии единого мнения о правильном тензоре энергии-импульса взаимодействия ЭМП с веществом и существовании электромагнитной силы Абрагама [1-13]. Это приводит к созданию новых тензоров ЭМП [14-20]. Другим спорным вопросом является перенос момента импульса плоской электромагнитной волной [21-31]. Проблема заключается в том, что канонические волновые уравнения ЭМП не описывают перенос плоской электромагнитной волной момента импульса. До недавнего времени в электродинамике отсутствовали волновые уравнения для энергии и импульса ЭМП. Такие уравнения, следующие из нового тензора энергии-импульса и описывающие перенос момента импульса электромагнитной волной, получены автором в работе [20]. Дискуссионным вопросом является существование продольных электромагнитных волн в вакууме [32-40]. В классической теории ЭМП не соблюдается третий закон Ньютона при взаимодействии движущихся электрических зарядов. Это привело к появлению гипотезы о существовании «скалярного (потенциального) магнитного поля» [41], введение которого в электродинамику позволяет сохранить выполнение третьего закона Ньютона. Реальность «скалярного магнитного поля» подтверждается разными авторами в экспериментах по продольному взаимодействию постоянных токов [37, 41]. Наиболее явно неполнота классической электродинамики проявляется в теории плазмы. До настоящего времени отсутствует понимание того, какие электромагнитные силы удерживают заряженные частицы в шаровой молнии, а проблема длительного удержания плазмы в существующих технических установках, несмотря на полувековую интенсивную работу, далека от решения. Отсутствует понимание причины существования горячих точек в Z-пинчах и ряда других плазменных явлений. Перечисленные проблемы требуют обоснованного внимания к основам классической теории ЭМП и к самим уравнениям Максвелла.

Уравнения Максвелла получают из антисимметричного тензора второго ранга в виде его четырехмерной дивергенции по одному из индексов, к которой приравнивают источник поля в виде четырехмерной плотности тока. Но канонический антисимметричный тензор электромагнитного поля имеет четырехмерные дивергенции по каждому из индексов, поэтому введение источника поля в уравнение для его дивергенции только по одному из индексов является некорректным. Полная четырехмерная дивергенция антисимметричного тензора, как дивергенция ротора, тождественно равна нулю и не может иметь источника поля.

Статья посвящена анализу и математически корректному введению четырехмерного источника электромагнитного поля в уравнения ЭМП.

ЭМП и электрические заряды рассматриваются в вакууме. Геометрия пространства-времени принимается в виде псевдоевклидова пространства Минковского (ct, ix, iy, iz). Четырехмерный электромагнитный потенциал определяется как $\mathbf{A}_\nu(\varphi/c, i\mathbf{A})$, где φ и A скалярный и векторный потенциалы ЭМП. Четырехмерная плотность тока определяется как $\mathbf{J}_\nu(\rho\cdot c, i\mathbf{J})$, где ρ и $\mathbf{J}$ плотность электрических зарядов и плотность тока.

2. Антисимметричный тензор электромагнитного поля и уравнения Максвелла

В базовых курсах теоретической физики электромагнитное поле (ЭМП) описывается каноническим антисимметричным тензором второго ранга:

$$F_{[\mu\nu]} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu \tag{1}$$

Этот антисимметричный тензор ЭМП является четырехмерным (ковариантным) ротором [42]. Компонентами антисимметричного тензора $F_{[\mu\nu]}$ являются производные скалярного φ и векторного **A** потенциалов ЭМП, которые определены в этом тензоре как компоненты напряженности электрического поля **E** и индукции магнитного поля **B**:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \partial_t \mathbf{A} \qquad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = (\partial_y A_z - \partial_z A_y)_x + (\partial_z A_x - \partial_x A_z)_y + (\partial_x A_y - \partial_y A_x)_z$$

Уравнения Максвелла получают из антисимметричного тензора (1) в виде его четырехмерной дивергенции по одному из индексов, к которой приравнивают источник поля [43] $\partial_\mu F_{[\mu\nu]} = \mathbf{J}_\mu$ (здесь и далее ковариантные и контравариантные индексы можно не различать). Запишем эти уравнения в векторной форме:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \varepsilon_0 \qquad \text{или} \qquad -\partial_t \nabla \cdot \mathbf{A} - \Delta\varphi = \rho / \varepsilon_0 \tag{2}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\partial_t \mathbf{E} = \mu_0 \cdot \mathbf{J} \qquad \text{или} \qquad \frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\partial_t \nabla\varphi + \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu_0 \cdot \mathbf{J} \tag{3}$$

В эти уравнения источники поля ρ и **J** введены вручную, исходя из общих соображений и экспериментальных результатов. Такое введение в уравнения (2) и (3) источников поля теоретического обоснования не имеет.

Из антисимметричного тензора ЭМП (1), в виде известного тензорного тождества $\partial_\eta F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\eta\mu} + \partial_\mu F_{\nu\eta} = 0$, следуют еще два уравнения Максвелла:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \text{или} \qquad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \tag{4}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0 \qquad \text{или} \qquad -\nabla \times \partial_t \mathbf{A} + \partial_t \nabla \times \mathbf{A} = 0 \tag{5}$$

При записи в потенциалах электромагнитного поля эти уравнения являются очевидными векторными тождествами. Такая их запись показывает, что они имеют условный физический смысл, который можно сформулировать только при записи их в терминах **E** и **B**.

Рассмотрим вопрос о введении источников поля в уравнения (2) и (3). Левые части этих уравнений представляют собой четырехмерную дивергенцию тензора (1) $\partial_\mu F_{[\mu\nu]}$ по индексу μ. Тензор второго ранга имеет дивергенции по каждому из двух индексов: $\partial_\mu F_{[\mu\nu]}$ и $\partial_\nu F_{[\mu\nu]}$. Очевидно, что дивергенция антисимметричного тензора (1) по второму индексу ν имеет противоположный знак $\partial_\nu F_{[\mu\nu]} = -\partial_\mu F_{[\mu\nu]}$, а полная дивергенция тензора (1), как четырехмерного ротора, тождественно равна нулю $\partial_\mu F_{[\mu\nu]} + \partial_\nu F_{[\mu\nu]} = 0$. Введение в уравнение Максвелла $\partial_\mu F_{[\mu\nu]} = \mathbf{J}_\mu$ источника поля $\mathbf{J}_\mu$, как дивергенции тензора второго ранга только по одному из его индексов является неправомерным действием, не имеющим физического смысла. В соответствии с теоремой Гаусса и известными векторными тождествами, ротор поля принципиально не может иметь источников. Для получения уравнения непрерывности для плотности тока берут четырехмерную дивергенцию от обеих частей этого уравнения

Максвелла. Левая часть полученного уравнения $\partial_{\mu\nu} F_{[\mu\nu]} = \partial_\mu \mathbf{J}_\mu$, описывающая движение (изменение) электромагнитного поля, тождественно равна нулю, а правая часть описывает движение электрических зарядов, возбуждающих электромагнитное поле. Таким образом, это уравнение противоречиво, его левая часть должна описывать волновое движение электромагнитного поля, возбуждаемое правой частью и не должна быть тождественно равной нулю. И обратно, если левая часть этого уравнения тождественно равна нулю, то и его правая часть также должна быть тождественно равной нулю. В этом заключается нонсенс в уравнениях Максвелла с источниками поля. Однако уравнения (2) и (3) являются результатом обобщения экспериментальных данных. Естественным является предположение о том, что описание ЭМП с источниками с помощью антисимметричного тензора (1) является неудовлетворительным. Альтернативное и математически удовлетворительное описание ЭМП с источниками поля рассмотрим в следующем разделе.

3. Несимметричный и симметричный тензоры электромагнитного поля

В определение канонического антисимметричного тензора (1) $F_{[\mu\nu]} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu$ входит несимметричный тензор второго ранга, представляющий собой четырехмерную производную электромагнитного потенциала $\partial_\mu \mathbf{A}_\nu$. Обозначим его как $F_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu$. Запишем этот тензор в матричном виде:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu = \begin{pmatrix} \frac{1}{c^2}\partial_t\varphi & \frac{1}{c} i\cdot\partial_t A_x & \frac{1}{c} i\cdot\partial_t A_y & \frac{1}{c} i\cdot\partial_t A_z \\ -\frac{1}{c} i\cdot\partial_x\varphi & \partial_x A_x & \partial_x A_y & \partial_x A_z \\ -\frac{1}{c} i\cdot\partial_y\varphi & \partial_y A_x & \partial_y A_y & \partial_y A_z \\ -\frac{1}{c} i\cdot\partial_z\varphi & \partial_z A_x & \partial_z A_y & \partial_z A_z \end{pmatrix} \quad (6)$$

Этот несимметричный тензор можно разложить на симметричный и антисимметричный тензоры $F_{\mu\nu} = F_{[\mu\nu]}/2 + F_{(\mu\nu)}/2$. Из этого разложения видно, что в описание ЭМП кроме антисимметричного тензора ЭМП $F_{[\mu\nu]}$ можно обоснованно включить симметричный $F_{(\mu\nu)}$ тензор ЭМП. В отличие от антисимметричного тензора $F_{[\mu\nu]}$ симметричный $F_{(\mu\nu)}$ и несимметричный $F_{\mu\nu}$ тензоры ЭМП имеют полные четырехмерные дивергенции не равные нулю. В работе [44] показано, что полная дивергенция несимметричного тензора второго ранга равна дивергенции симметричного тензора по одному из индексов. Запишем симметричный тензор ЭМП $F_{(\mu\nu)}$ в матричном виде:

$$F_{(\mu\nu)} = \begin{pmatrix} 2\frac{1}{c^2}\partial_t\varphi & \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_x - \partial_x\varphi) & \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_y - \partial_y\varphi) & \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_z - \partial_z\varphi) \\ \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_x - \partial_x\varphi) & 2\partial_x A_x & (\partial_x A_y + \partial_y A_x) & (\partial_x A_z + \partial_z A_x) \\ \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_y - \partial_y\varphi) & (\partial_x A_y + \partial_y A_x) & 2\partial_y A_y & (\partial_y A_z + \partial_z A_y) \\ \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_z - \partial_z\varphi) & (\partial_x A_z + \partial_z A_x) & (\partial_y A_z + \partial_z A_y) & 2\partial_z A_z \end{pmatrix} \tag{7}$$

Этот симметричный тензор можно записать в виде $F_{(\mu\nu)} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu + \partial_\nu \mathbf{A}_\mu$.

4. Уравнения электромагнитного поля с источниками поля

Поскольку полная четырехмерная дивергенция симметричного тензора не равна нулю, введем в нее источник ЭМП $\partial_\mu F_{(\mu\nu)} = \mathbf{J}_\mu$. Это уравнение эквивалентно уравнению $(\partial_\mu F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\mu\nu})/2 = \mathbf{J}_\mu$ или $\partial_\mu(\partial_\mu \mathbf{A}_\nu + \partial_\nu \mathbf{A}_\mu) = \mathbf{J}_\mu$. Запишем эту четырехмерную дивергенцию симметричного тензора $F_{(\mu\nu)}$ в трехмерном виде:

$$2\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\varphi + \partial_t \nabla\cdot\mathbf{A} - \Delta\varphi = \rho/\varepsilon_0 \tag{8}$$

$$\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\partial_t\nabla\varphi - \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A} = \mu_0\cdot\mathbf{J} \tag{9}$$

Уравнение (8) заменяет уравнение (2), описывающее закон Гаусса для электрического поля, а уравнение (9) заменяет уравнение полного тока Ампера-Максвелла (3). Уравнение (9) можно записать в виде:

$$\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\partial_t\nabla\varphi - 2\cdot\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) + \nabla\times\nabla\times\mathbf{A} = \mu_0\cdot\mathbf{J} \tag{10}$$

В этой форме записи четвертый член представляет собой ротор магнитного поля. Для статического случая уравнения (8) и (10) можно записать в виде:

$$-\Delta\varphi = \rho/\varepsilon_0 \tag{11}$$

$$-2\cdot\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) + \nabla\times\nabla\times\mathbf{A} = \mu_0\cdot\mathbf{J} \tag{12}$$

Уравнение (11) для статического случая совпадает с уравнением Максвелла (2) и также описывает закон Гаусса для постоянного потенциального электрического поля. Уравнение (12) отличается от уравнения Максвелла (3) для стационарного случая наличием первого члена с дивергенцией векторного потенциала. Этот член представляет собой градиент гипотетического «скалярного (потенциального) магнитного поля», введенного Николаевым [41] в уравнение Ампера-Максвелла (3) для объяснения продольного взаимодействия между стационарными токами и соблюдения третьего закона Ньютона в электродинамике. Уравнение (12) с точностью до постоянного коэффициента первого члена совпадает с уравнением, приведенным в работах [37, 41]. В этих работах уравнение (12) построено эмпирически на основе опытных результатов путем дополнения уравнения Ампера-Максвелла. Здесь уравнение (12) получено математически строго, как следствие дивергенции симметричного тензора ЭМП $F_{(\mu\nu)}$. Таким образом уравнение (9) устраняет проблему нарушения третьего закона Ньютона в электродинамике.

Уравнение (9) можно записать в виде:

$$\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\partial_t\nabla\varphi-2\cdot\Delta\mathbf{A}-\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}=\mu_0\cdot\mathbf{J} \tag{13}$$

Это уравнение содержит компоненты электрического поля и магнитной индукции и является волновым уравнением для электромагнитного поля и совместно с уравнением (8), описывает электромагнитное излучение.

Возьмем ротор от обеих частей уравнения (9) и получим каноническое волновое уравнение для магнитной индукции **B**:

$$\frac{1}{c^2}\partial_{tt}(\nabla\times\mathbf{A})-\Delta(\nabla\times\mathbf{A})=\mu_0\cdot\nabla\times\mathbf{J} \qquad \text{или} \qquad \frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{B}-\Delta\mathbf{B}=\mu_0\cdot\nabla\times\mathbf{J}$$

Уравнения (8) и (9) можно записать в виде:

$$\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\varphi-\Delta\varphi+\partial_t(\frac{1}{c^2}\partial_t\varphi+\nabla\cdot\mathbf{A})=\rho/\varepsilon_0 \qquad \text{и} \qquad \frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{A}-\Delta\mathbf{A}-\nabla(\frac{1}{c^2}\partial_t\varphi+\nabla\cdot\mathbf{A})=\mu_0\cdot\mathbf{J}$$

Применив к ним калибровку Лоренца $\partial_t\varphi/c^2+\nabla\cdot\mathbf{A}=0$, получим канонические уравнения Максвелла в калибровке Лоренца [43]:

$$\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\varphi-\Delta\varphi=\rho/\varepsilon_0 \qquad \frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{A}-\Delta\mathbf{A}=\mu_0\cdot\mathbf{J}$$

Возьмем дивергенцию от обеих частей уравнения (8) и производную по времени от уравнения (9). После сложения этих уравнений и простых преобразований получим каноническое волновое уравнение для напряженности электрического поля:

$$\partial_t(\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{A}-\Delta\mathbf{A})+\nabla(\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\varphi-\Delta\varphi)=\nabla\rho/\varepsilon_0+\mu_0\cdot\partial_t\mathbf{J} \ \text{ или } \ \Delta\mathbf{E}-\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{E}=\nabla\rho/\varepsilon_0+\mu_0\cdot\partial_t\mathbf{J} \tag{14}$$

Возьмем дивергенцию обеих частей уравнения (9) и получим волновое уравнение:

$$\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\nabla\cdot\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\partial_t\Delta\varphi-2\cdot\Delta(\nabla\cdot\mathbf{A})=\mu_0\nabla\cdot\mathbf{J} \tag{15}$$

Это уравнение описывает продольные волны дивергенции векторного потенциала или продольные волны гипотетического «продольного (скалярного) магнитного поля» Николаева [41]. Особенностью этих волн является отсутствие в ней компоненты магнитной индукции **B**. Поэтому эти волны можно назвать продольными электрическими волнами. Взяв производную по времени уравнения (8) и применив уравнение непрерывности для плотности тока, из уравнения (15) получим уравнение:

$$\frac{1}{c}\partial_t(\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\varphi-\Delta\varphi)+\nabla\cdot(\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{A}-\Delta\mathbf{A})=\partial_t\rho+\nabla\cdot\mathbf{J} \qquad \text{или} \qquad (\frac{1}{c^2}\partial_{tt}-\Delta)\partial_\mu\mathbf{A}_\mu=\partial_\mu\mathbf{J}_\mu \tag{16}$$

Это уравнение представляет собой уравнение продольных (скалярных) волн дивергенции электромагнитного потенциала, источником которых является дивергенция четырехмерной плотности тока. Левая волновая часть уравнения (16) может быть равна нулю при не равном нулю электромагнитном потенциале $\mathbf{A}_\mu$. Тогда уравнение (16) можно записать в виде двух уравнений:

$$(\frac{1}{c^2}\partial_{tt}-\Delta)\partial_\mu\mathbf{A}_\mu=0=\partial_\mu\mathbf{J}_\mu \qquad \text{или} \qquad (\frac{1}{c^2}\partial_{tt}-\Delta)\partial_\mu\mathbf{A}_\mu=0 \qquad \text{и} \qquad \partial_\mu\mathbf{J}_\mu=0$$

Из этого уравнения следует, что волновое уравнение для дивергенции электромагнитного потенциала $(\frac{1}{c^2}\partial_{tt}-\Delta)\partial_\mu\mathbf{A}_\mu=0$ так же фундаментально, как и уравнение сохранения плотности тока $\partial_\mu\mathbf{J}_\mu=0$.

Таким образом, уравнения (8) и (9) представляют собой систему уравнений ЭМП, заменяющую уравнения Максвелла (2) и (3). Уравнения Максвелла (4) и (5) замены не требуют, так как они являются математическими тождествами. Уравнение (9) является электромагнитным аналогом уравнения движения изотропной упругой среды, известного как динамическое уравнение Навье-Стокса (или уравнение Ламе) [45]. Это уравнение показывает общность законов движения всех видов материи. Такая аналогия позволяет рассматривать поле четырехмерного электромагнитного потенциала $\mathbf{A}_\nu$ как физическую среду, в которой распространяются волны электромагнитного поля, вызванные динамической деформацией этой среды. Следовательно, само поле электромагнитного потенциала $\mathbf{A}_\nu$ можно гипотетически идентифицировать как «физический вакуум» или «эфир».

5. Заключение

Канонический антисимметричный тензор электромагнитного поля имеет четырехмерные дивергенции по каждому из индексов, поэтому введение источника поля в его дивергенцию только по одному из индексов является некорректным. Полная дивергенция антисимметричного тензора тождественно равна нулю и не имеет источника ЭМП. В связи с этим, в электродинамике существует проблема введения источника ЭМП в уравнения ЭМП.

Эта проблема решается тем, что источники ЭМП вводятся в дивергенции несимметричного или симметричного тензоров ЭМП, полные дивергенции которых не равны нулю. Эти тензоры связаны с каноническим антисимметричным тензором ЭМП. Уравнения ЭМП с источниками математически корректно описываются новой системой уравнений, вытекающей из симметричного тензора ЭМП. Из этой системы уравнений ЭМП следуют канонические волновые уравнения для напряженности электрического поля и магнитной индукции, волновые уравнения для скалярного и векторного потенциалов электромагнитного поля (уравнения Максвелла в калибровке Лоренца). При этом, из электродинамики устраняются казусы введения источников поля в дивергенцию ротора. Кроме того, из новых уравнений поля следует новое волновое уравнение, описывающее продольные (скалярные) волны дивергенции электромагнитного потенциала, не имеющие магнитной компоненты.