Discussion sur les structures algébriques des infinis réels et l'irrationalité de la constante d'Euler-Mascheroni

F.L.B.Périat

21.08.2017

Commençons tout d'abord par définir un ensemble infini qui contiendrait l'ensemble des nombres proportionnel à l'infini. Ensuite trions-les par appartenance dans les réels :

$$\bigcup_{\alpha \in \mathbb{R} \cap \alpha \propto \infty} \alpha = \mathrm{I}$$

$$\mathrm{I}_{\mathbb{Z}} \cup \mathrm{I}_{\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}} \cup \mathrm{I}_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathrm{I} \subset \mathbb{R}^*$$

Par exemple, $\mathrm{I}_{\mathbb{Z}}$ est l'ensemble des infinis relatifs. Evidemment, nous notons que le **0** n'est pas inclus dans I. A présent, munissons notre ensemble d'une loi de composition interne afin de créer le groupe $(\mathrm{I},\cdot)$.

$$\mathrm{I} \times \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{I}$$

$$(a,b) \mapsto a \cdot b$$

Pour que $(\mathrm{I},\cdot)$ soit effectivement un groupe, il est strictement nécessaire d'avoir :

1. Une loi de composition interne (ici multiplicative) associative
2. Un élément neutre : $e \in \mathrm{I}_{\mathbb{N}} \subset \mathrm{I}_{\mathbb{Z}}$
3. Pour tout élément de I, un symétrique : **0** n'est pas inclus dans I

Nous remarquons de plus que la loi multiplicative est commutative, ce qui fait de notre structure algébrique un groupe abélien.

Grâce à cette propriété nous pouvons construire un espace vectoriel sur $\mathbb{Z}$, pour ce faire nous avons besoin :

1. De notre groupe commutatif $(\mathrm{I},\cdot)$
2. D'une loi de composition externe :

$$\mathbb{Z} \times \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{I}$$

$$(\lambda, u) \mapsto \lambda + u$$

Nous observons que contrairement à la plupart des espaces vectoriels, les lois additive et multiplicative sont inversées.

3. Les propriétés suivantes sont respectées :

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ et $u, v \in \mathrm{I}$

$$\alpha + (\beta + u) = (\alpha + \beta) + u$$

$$1 + u = u$$

$$\alpha + (u \cdot v) = (\alpha + u) \cdot (\alpha + v)$$

$$\alpha \cdot \beta + u = (\alpha + u) \cdot (\beta + u)$$

Nous pouvons dès à présent imaginer l'infini comme l'ensemble des vecteurs de notre espace vectoriel. Grâce à cette notion, il est possible de démontrer certaine conjecture comme l'irrationalité de la constante d'Euler-Mascheroni, en travaillant avec ces vecteurs comme s'il s'agissait de nombres réels.

Pour u $\in$ I nous avons $\gamma = \sum_{n=1}^{\mathrm{u}} \frac{1}{n} - \ln(u)$

Notons $H(u)$ la série harmonique. Intéressons-nous ensuite à :

$$e^{\gamma} = \frac{e^{H(u)}}{e^{\ln(u)}} = \frac{e^{H(u)}}{u}$$

$$e^{\gamma} u = e^{H(u)}$$

Il est nécessaire qu'une limite incluant l'infini soit valide pour chaque vecteur de I, et de plus il est impératif que le résultat, s'il converge soit le même. Nous allons donc observer sous quelles conditions l'égalité précédente est vérifiée.

Si e^{γ} est rationnel, u peut être irrationnel ou non :

$$\mathbb{Q} \times \mathrm{I}_{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{I}_{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}$$

$$\mathbb{Q} \times \mathrm{I}_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{I}_{\mathbb{Q}}$$

Nous voyons que : $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q} = \emptyset$ ce qui ne laisse pas de solutions possible pour $e^{H(u)}$

Donc e^{γ} est irrationnel, u peut être irrationnel ou non :

$$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \times \mathrm{I}_{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{I}_{\mathbb{R}}$$

$$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \times \mathrm{I}_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{I}_{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}$$

Ici $\mathbb{R} \cap \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, ce qui laisse à $e^{H(u)}$ la possibilité d'exister dans les irrationnels.

De la même façon, nous allons noter sous quelles conditions notre première égalité est valide :

Soit u ∈ I

$$\sum_{n=1}^{u} \frac{1}{n} - \ln(u) = \gamma$$

Imaginons les différents cas possibles :

$$\mathrm{I}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} \times \mathrm{I}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathrm{I}_{\mathbb{Q}} \times \mathrm{I}_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

$$\mathrm{I}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} \times \mathrm{I}_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$$

$$\mathrm{I}_{\mathbb{Q}} \times \mathrm{I}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$$

Par un changement de variable, nous pouvons vérifier que le logarithme naturel d'un vecteur u ∈ I peut être rationnel.

soit v ∈ $\mathrm{I}_{\mathbb{Q}}$ tel que $u = e^{v} \Rightarrow \ln(u) \in \mathrm{I}_{\mathbb{Q}}$

Cependant les deuxième et troisième cas sont incompatibles pour $\ln(u) \in \mathrm{I}_{\mathbb{Q}}$ car $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q} = \emptyset$

Ainsi une seule de ces deux situations est possible, la deuxième ne donne aucune solution par conséquent, elle est fausse. Si nous comparons les trois restantes : $\mathbb{R} \cap \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

Nous trouvons que $\gamma \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

■