ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ГИПОТЕЗЫ ОБ ОДИНОКОМ БЕГУНЕ

Султан К.С.

Абстракт: В статье приводиться доказательство гипотезы об одиноком бегуне на основе представления движения k объектов двигающихся с разной целочисленной скоростью по кругу единичной длины, путем деления круга на k равных отрезков длиной $\Delta s = \frac{1}{k}$ и изменения времени с постоянным шагом $\Delta t = \frac{1}{k}$.
Ключевые слова: гипотеза, одинокий бегун, доказательство, диофантовые приближения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Гипотеза об одиноком бегуне, которая сформулирована J. M. Wills при исследовании диофантовых приближений [1], имеет связи с вопросами задач непроходимости [2], хроматических чисел [3] и других задач. Название «Гипотеза об одиноком бегуне» впервые использовано в работе [4]. Гипотезе об одиноком бегуне посвящены работы многих авторов, одними из последних работ являются работы [5] и [6], однако гипотеза до настоящей работы была доказана только для частных случаев. Например, в работе [7] приводится доказательство гипотезы для семи бегунов, что являлся максимальным доказанным количеством бегунов.

Обычная формулировка задачи предполагает, что бегуны имеют скорости, выражаемые целыми числами, не делящимся на одно и то же простое число. Гипотеза утверждает, что если V - произвольный набор целых положительных чисел v, который содержит ровно k число, с наибольшим общим делителем равным 1, тогда $\exists t \in \mathbb{R} \quad \forall v \in V \quad \|tv\| \geq \frac{1}{k}$, где $\|x\|$ означает расстояние от числа x до ближайшего целого.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Прежде чем приступить к доказательству гипотезы уточним виды одиночества бегунов. Если анализировать возможные варианты одиночества, то можно выделить следующие три вида одиночества бегунов:

Определение 1.

Виды одиночества бегуна находящегося в составе k бегунов:

1) Минимальное ($minimum$) одиночество – если существует момент времени t, когда бегун со скоростью v_i будет находиться от ближайшего бегуна на расстоянии $\frac{1}{k}$*;*

2) Среднее ($medium$) одиночество – если существует момент времени t, когда бегун со скоростью v_i будет находиться от ближайшего бегуна на расстоянии больше чем $\frac{1}{k}$*, но меньше* $\frac{1}{2}$;

3) Максимальное ($maximum$) одиночество – если существует момент времени t, когда бегун со скоростью v_i будет находиться от соседних бегунов на расстоянии $\frac{1}{2}$.

Не сложно понять, что каждый бегун может находиться в положении максимального одиночества, только в том случае, если количество бегунов равно 2. Поэтому максимальный вид одиночества в дальнейшем рассматривать не будем.

Таким образом, если будет доказано существование минимального или среднего одиночества для каждого бегуна при любом количестве бегунов, скорости которых являются целыми взаимно простыми числами, то оно будет доказательством верности гипотезы об одиноком бегуне. Отсюда следует, что в принципе можно ограничиться доказательством только одного из указанных двух видов одиночества.

Так как все бегуны имеют целочисленные скорости, а трек имеет единичную длину, то очевидно, что один бегун или несколько бегунов могут находиться в одиночестве только в том случае, если время забега не будет целым числом. В противном случае все бегуны, каждый совершив определенное количество оборотов по треку, будут находиться в точке старта.

Также очевидно, что если все бегуны в определенный момент времени будут равномерно распределены по треку, тогда расстояние между ними будет равно $\Delta s = \frac{1}{k}$, где k – количество бегунов, значит, все бегуны одновременно будут находиться в положении минимального одиночества.

С учетом вышесказанного, в дальнейшем трек условно будет разделен на равные отрезки, количество которых будет равно количеству бегунов k, тогда трек превратиться в круглую шкалу с отметками, расстояние между которыми равно $\Delta s = \frac{1}{k}$. При этом время также будет меняться с постоянным шагом $\Delta t = \frac{1}{k}$, где k – количество бегунов. При такой модели на каждом шаге времени все бегуны в зависимости от их скорости будут находиться на определенных точках (отметках) шкалы трека, что упрощает процесс анализа месторасположение бегунов в определенных моментах времени.

Определение 2. Представление движения k объектов двигающихся с разной целочисленной скоростью по кругу единичной длины, путем деления круга на k равных отрезков длиной $\Delta s = \frac{1}{k}$ и изменения времени с постоянным шагом $\Delta t = \frac{1}{k}$ называется «$\frac{1}{k}$ – моделью».

На рисунке 1 показана схема деления трека единичной длины на 7 равных отрезков, при котором расстояние между делениями будет равен $\Delta s = \frac{1}{k} = 1/7$, а шаг изменения времени равен $\Delta t = \frac{1}{k} = 1/7$. В показанном примере нумерация точек трека сделана против часовой стрелки, однако это не принципиально.

При такой модели, бегуны как бы прыгает с одной отметки на другую отметку шкалы трека, при этом шаг прыжка каждого бегуна зависит от его скорости. В зависимости от скорости бегун может прыгать с шагом в несколько отметок шкалы, т.е. он каждый раз при прыжке пропускает несколько отметок, но всегда будет находиться на определенной отметке шкалы трека.

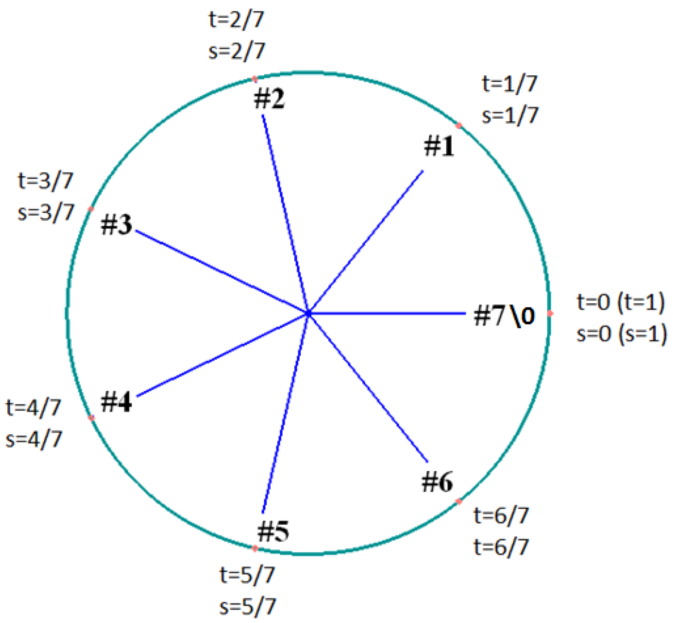

Рисунок 1. Деление круга единичной длины на 7 равных отрезков длиной $\Delta s = \frac{1}{k} = 1/7$ при шаге времени $\Delta t = \frac{1}{k} = 1/7$

Минимальный шаг прыжка равен одному делению. Если скорость бегуна равна $v = 1$, то этот бегун при изменении времени на один шаг $\Delta t = \frac{1}{k}$ меняет свое местоположение на треке на один отрезок $\Delta s = \frac{1}{k}$.

Отсюда следует, что при применении данной модели скорости бегунов соответствуют количеству отрезков трека длиной $\Delta s = \frac{1}{k}$, которые они преодолевают за время $\Delta t = \frac{1}{k}$. Например, если скорость бегуна равна $v = 5$, то он за время $\Delta t = \frac{1}{k}$ преодолевает 5 отрезков, т.е. длина его шага составляет $5 \cdot \Delta s$.

Конечно, на самом деле бегуны не прыгают, они бегают равномерно, но при расчете учитывается время, когда они будут находиться на определенных отметках шкалы трека. Такая модель, как было сказано выше, упрощает анализ месторасположения бегунов.

В используемой $\frac{1}{k}$ – модели количество делений первого уровня (отметок шкалы) равно количеству бегунов k, для удобства отметки шкалы трека обозначим знаками: $\#1, \#2, \#3, \ldots \#k\backslash 0$. При этом первой отметкой трека $\#1$ считается отметка, соответствующая первому делению, а последней отметкой $\#k$ считается отметка соответствующая нулевой (стартовой) отметке.

Из определения $\frac{1}{k}$ – модели следует, что время состоит из шагов времени $\Delta t = \frac{1}{k}$, при этом количество шагов времени T на одном периоде также равно количеству бегунов k, т.е. $0 \leq T \leq k$.

Анализ одиночества бегунов на основе $\frac{1}{k}$ - модели позволяет намного упростить процесс и сделает его более понятным. К тому же, при использовании данной модели появляется возможность группировать бесконечно много вариантов скоростей бегунов по сравнимости по модулю k, значение которого равно количеству бегунов. Другими словами, в используемой модели анализа одиночества, скорости бегунов группируются по величине остатка равного $r_i = \{v_i/k\}$, образуемого от деления скорости бегуна на общее количество бегунов.

В модулярной арифметике множество чисел v сравнимых по модулю k, называется классом вычетов v по модулю k, и обычно обозначается $[v]_k$, при этом любое число класса v_i называется вычетом по модулю k. Из модулярной арифметики известно, что количество классов вычетов $[v]_k$ по модулю k, которые называются классами эквивалентности, равно k.

Это означает, что при применении $\frac{1}{k}$ – модели количество разных остатков будет меньше или равно количеству бегунов.

Если скорости k бегунов образует последовательность натуральных чисел от 1 по k, то это означает, что они являются наименьшими неотрицательными вычетами своих классов вычетов по модулю k. При этом скорости всех бегунов будут равны остаткам по модулю k, за исключением одного бегуна, который имеет скорость равной модулю k и нулевой остаток.

Известно, что вычеты каждого класса вычетов образуют арифметическую прогрессию, поэтому скорости бегунов можно выразить через их остатки по модулю k,

$$v_{in} = (r_i + n_i k), \qquad (1)$$

где r_i – остаток скорости бегуна по модулю k; k – количество бегунов; n_i- множитель вычета.

Например, пусть количество бегунов будет $k = 7$, а остаток по модулю 7 равен $r = 1$, тогда скорости 1, 8, 15 у которых множители n_i соответственно равны $0, 1, 2$, дают равный остаток, т.е. являются вычетами одного класса вычетов по модулю 7.

Если выразить скорости бегунов в количестве k через их остатки по модулю k, то получим нижеприведенную матрицу возможных скоростей (Таблица 1). Очевидно, что количество вычетов каждого класса вычетов по модулю k бесконечно, т.е. скоростей дающих равные остатки при модуле k бесконечно. А если повысит модуль сравнения, то на каждом вычете образуется повторяющийся блок скоростей, которые дают разные остатки при повышенном модуле. В таблице 1 в качестве примера показаны скорости, которые дают разные остатки при модуле k^2.

Таблица 1. Матрица возможных скорости бегунов в количестве k при повышении модуля с k до k^2.

r	***n=0***	***n=1***	***n=2***	**…**	***n=k-1***	***n=k***
1	$v_{10} = r_1$	$v_{11} = r_1 + k$	$v_{12} = r_1 + 2k$	…	$v_{1n} = r_1 + (k-1)k$	$v_{1k} = r_1 + k^2$
2	$v_{20} = r_2$	$v_{21} = r_2 + k$	$v_{22} = r_2 + 2k$	…	$v_{2n} = r_2 + (k-1)k$	$v_{2k} = r_2 + k^2$
3	$v_{30} = r_3$	$v_{31} = r_3 + k$	$v_{32} = r_3 + 2k$	…	$v_{3n} = r_3 + (k-1)k$	$v_{3k} = r_3 + k^2$
…	…	…	…	…	…	…
0(k)	$v_{k0} = r_k$	$v_{k1} = r_k + k$	$v_{k2} = r_k + 2k$	…	$v_{kn} = r_k + (k-1)k$	$v_{kk} = r_k + k^2$

В таблице 1 последний столбец выделен серым цветом, чтобы подчеркнуть, что отмеченный столбец является началом повтора блока остатков при модуле k^2. Остатки столбца n=k полностью повторяют остатки столбца *n=0* при модуле k^2.

Для удобства анализа, в дальнейшем вычеты соответствующе определенному множителю n вычетом n- того порядка.

С учетом формулы (1), для расчета полной длины пробега за время t любого i −того бегуна с любой целочисленной скоростью можно использовать следующую общую формулу,

$$S_{it} = (r_i + n_i k)t, \tag{2}$$

где r_i – остаток скорости бегуна по модулю k; k – количество бегунов; n_i- множитель вычета.

Для случая, когда время меняться с шагом $\Delta t = \frac{1}{k}$, т.е. $t = \frac{1}{k}T$, формула (2) имеет вид

$$S_{it} = (r_i + n_i k)\frac{1}{k}T, \text{ или } S_{it} = r_i \frac{1}{k}T + n_i T, \tag{3}$$

где T – количество шагов времени.

Так как $n_i T \in \mathbb{Z}_+$, т.е. произведение $n_i T$ всегда является целым числом (или равно 0), то понятно, что оно показывает полный оборот бегуна вокруг трека. Поскольку при использовании $\frac{1}{k}$ −модели для анализа месторасположения бегунов на треке неважно количество полных оборотов их пробега, данный член можно не учитывать, тогда получим формулу

$$s_{iT} = r_i \frac{1}{k}T. \tag{4}$$

В данном случае s_{iT} означает длину неполной части оборота выбранного бегуна при количестве шагов времени T, поэтому для подчеркивания различия для ее обозначения s_{iT} используется строчная буква с индексом T.

Из формулы (4) следует, что если остатки скоростей бегунов по модулю k разные, то при шаге времени $T = 1$ получиться разные длины неполной части оборота. Это означает, что все бегуны при $T = 1$ будут находиться на разных точках трека. А если остатки скоростей бегунов по модулю k равные, то при любом количестве шагов времени T получиться равная длина неполной части оборота. Последний случай означает, что такие бегуны на каждом шаге времени будут находиться на одинаковых точках трека.

Бесспорно, что если несколько чисел дают равные остатки при делении на определенное число, то при делении на другое число эти числа будут давать другие остатки. Поэтому при необходимости для любого набора разных целых чисел можно подобрать целое число, что при делении на него все числа будут давать разные остатки. Другими словами, в таких случаях нужно умножить модуль на целое число $m \in \mathbb{Z}_+$ так, чтобы при модуле km, где m- множитель модуля, все скорости бегунов давали разные остатки.

Таким образом, для более точных анализов месторасположения бегунов каждый отрезок трека и каждый шаг времени делится на число m, которое будет множителем знаменателя шагов шкалы трека и времени.

Для удобства анализа, деления времени и шкалы трека отмеченное с шагом $\Delta t = \frac{1}{k}$ и $\Delta s = \frac{1}{k}$ назовем первым уровнем деления, а деления отмеченное с шагом $\Delta t(2) = \frac{1}{2k}$ и $\Delta s(2) = \frac{1}{2k}$ назовем вторым уровнем деления и т.д., т.е. уровень деления будет соответствовать множителю m шагов $\Delta t(m) = \frac{1}{km}$ и $\Delta s(m) = \frac{1}{km}$.

Если объекты двигаются по замкнутому кругу с постоянной скоростью, то понятно, что взаиморасположения объектов будут периодически повторяться. Поэтому для анализа важно уточнить моменты начала и конца одного периода, так как для получения необходимой информации достаточно провести анализ процесса в рамках одного периода.

Определение 3. Началом периода забега бегунов по замкнутому круговому треку единичной длины будет считаться момент времени, когда все бегуны находятся в точке старта, а концом периода будет считаться момент времени, когда бегун, у которого наименьшая скорость, совершив полный оборот по треку, будет находиться в точке старта со всеми другими бегунами.

Анализ взаиморасположение бегунов на треке удобно, если каждый бегун имеет свой порядковый номер, поэтому введем систему нумерации бегунов.

В силу того, что по условию гипотезы скорости бегунов разные, то можно присвоить бегунам порядковые номера по значению скорости: $v_1(min) < v_2 < v_3 < \cdots < v_k(max)$.

В этом случае первый порядковый номер будет присвоен бегуну, у которого самая низкая скорость $v_1(min)$, а самый большой порядковый номер будет у бегуна, у которого самая высокая скорость $v_k(max)$. Такую нумерацию назовем нумерацией по скорости и для обозначения используем цифры с индексом v, например, $1_v;\ 2_v;\ 3_v$ и т.д.

С другой стороны, если порядковые номера бегунам будут присваиваться по величине остатков, то получиться другой порядок бегунов. Особенностью этой нумерации бегунов является то, что она постоянна для определенного класса вычетов. Эту нумерацию назовем нумерацией по остатку. В этом случае для обозначения используем цифры с индексом r, например, $1_r;\ 2_r;\ 3_r$ и т.д.

Отметим, что для случая, когда скорости бегунов являются наименьшими неотрицательными вычетами своих классов вычетов, порядковые номера бегунов, назначенные по вышеописанным двум видам нумерации, будут совпадать.

Как было пояснено выше, все бегуны, скорости которых являются числами сравнимые по модулю k, при изменении времени по шагам будут находиться в одинаковых делениях шкалы трека, причем не зависимо от численного значения их скоростей. Другими словами, если остатки скоростей бегунов $r_i = \{v_i/k\}$, получаемых от деления скоростей на количество бегунов, равны, то независимо от величин скоростей все они будут находиться на одинаковых отметках шкалы трека при изменении времени с шагом $\Delta t = \frac{1}{k}$. Оформим данный факт в виде теоремы.

Теорема 1.

Если скорости двух или более объектов, двигающихся по кругу единичной длины, принадлежать одному классу вычетов по модулю k, *численное значение которого равно количеству объектов* k, *то такие объекты при изменении времени по шагам* $\Delta t = \frac{1}{k}$ *будут находиться на одинаковых отметках шкалы круга, расстояние между которыми равно* $\Delta s = \frac{1}{k}$.

Если скорости бегунов принадлежать разным классам вычетов по модулю k, то понятно, что остатки от деления скоростей на модуль k будут разными. Другими словами, если скорости бегунов дают разные остатки по модулю k, то существуют моменты времени, когда все бегуны будут расположены на разных отметках шкалы трека, например при $t = \frac{1}{k}$ или $T = 1$. Данное утверждение оформим в виде теоремы.

Теорема 2. Если скорости двух или более объектов, двигающихся по кругу единичной длины, принадлежать разным классам вычетов по модулю k, *т.е. дают разные остатки при делении на* k, *то непременно существует время, когда такие объекты при изменении времени по шагам* $\Delta t = \frac{1}{k}$ *будут находиться на разных отметках шкалы круга, расстояние между которыми равно* $\Delta s = \frac{1}{k}$.

Теперь переходим к анализу закономерностей бегунов.

3. ЗАКОНОМЕРНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ БЕГУНОВ

Анализ распределение разного количества бегунов по треку в разные моменты времени показал, что при любом количество бегунов, если скорости бегунов выражаются разными целыми числами, бегуны в рамках одного периода распределяется по схеме центральной симметрии, т.е. в предпоследнем шаге времени периода получиться перевернутая версия распределения бегунов на первом шаге времени. В дальнейшем такое распределение бегунов по треку назовем центрально симметричным распределением бегунов (Central Symmetry).

Данное явление поясним на примере данных таблицы 2, где показано распределение бегунов в количестве $k = 9$ по отметкам шкалы трека при изменении времени по шагам $\Delta t = \frac{1}{9}$.

Как следует из таблицы 2, из-за разности длины шагов при каждом изменении времени на одно деление бегуны на треке располагаются по-разному, только один бегун, у которого скорость имеет нулевой остаток, будет находиться в одном и том же точке – в точке старта. Конечно, он не стоит на одном месте, просто он при изменении времени на один шаг успевает совершить полный оборот по треку.

Из таблицы 2 можно заметить, что распределение бегунов по отметкам шкалы трека в рамках одного периода представляет переход стартового распределения, образуемого в начале периода, к его перевернутому подобию в конце периода, т.е. бегуны распределяются по схеме центральной симметрии.

Также из таблицы 2 можно увидеть, что в двух моментах времени ($t = 3\Delta t$ и $t = 6\Delta t$) бегуны группируются по 3 и будут находиться в трех отметках трека. Это происходит из-за того, что в этих моментах времени получается равные остатки у трех бегунов. Это объясняется тем, число 9 является составным числом, поэтому в некоторых количествах шагов времени образуются кратные числа.

Таблица 2. Распределение 9 бегунов по отметкам деления шкалы трека при изменении времени по шагам $\Delta t = \frac{1}{9}$.

№№ точек	**Распределение бегунов по точкам трека в момент времени t**									
	$\mathbf{0\Delta t}$	$\mathbf{1\Delta t}$	$\mathbf{2\Delta t}$	$\mathbf{3\Delta t}$	$\mathbf{4\Delta t}$	$\mathbf{5\Delta t}$	$\mathbf{6\Delta t}$	$\mathbf{7\Delta t}$	$\mathbf{8\Delta t}$	$\mathbf{9\Delta t}$
#1	нет	1_v	5_v	нет	7_v	2_v	нет	4_v	8_v	нет
#2	нет	2_v	1_v	нет	5_v	4_v	нет	8_v	7_v	нет
#3	нет	3_v	6_v	1_v,4_v,7_v	3_v	6_v	5_v, 2_v, 8_v	3_v	6_v	нет
#4	нет	4_v	2_v	нет	1_v	8_v	нет	7_v	5_v	нет
#5	нет	5_v	7_v	нет	8_v	1_v	нет	2_v	4_v	нет
#6	нет	6_v	3_v	2_v,5_v,8_v	6_v	3_v	1_v,4_v,7_v	6_v	3_v	нет
#7	нет	7_v	8_v	нет	4_v	5_v	нет	1_v	2_v	нет
#8	нет	8_v	4_v	нет	2_v	7_v	нет	5_v	1_v	нет
#9\0	Все	9_v	9_v	9_v,3_v, 6_v	9_v	9_v	9_v, 3_v, 6_v	9_v	9_v	Все

Примечание к таблице 2:

1) Скорости бегунов, распределение которых по отметкам делений трека приведены в таблице 4, равны их порядковым номерам по скорости, а именно: 1_v -v_1 =1; 2_v-v_2 =2; 3_v-v_3 =3; 4_v-v_4 =4; 5_v-v_5 =5; 6_v-v_6 =6; 7_v-v_7 =7; 8_v-v_8 =8; 9_v-v_9 =9.

2) Номера столбцов показывает количество шагов времени T, поэтому расчетное время соответствующее столбцу равное шаг времени $\Delta t = \frac{1}{9}$ умноженное на номер столбца. Например, столбец 3 соответствует времени $t = 3\Delta t = \frac{3}{9}$.

В таблице 3 показано распределение 7 бегунов по отметкам шкалы трека при изменении времени по шагам $\Delta t = \frac{1}{7}$. Как видно из таблицы 2, в данном случае группировка бегунов не будет, так как количество бегунов 7 является простым числом.

Необходимо отметить, что утверждение касательно группирования бегунов при составном количестве бегунов и отсутствие группирования при простом количестве бегунов корректно только для $\frac{1}{k}$- модели. Это объясняется следующим образом: Если учесть, что в одном периоде бегуны с высокими скоростями обгоняют бегунов с низкими скоростями один или более раз, то, учитывая линейную зависимость длины промежутков между бегунами от времени, *можно утверждать, что группирования бегунов происходить при любом количестве бегунов.*

Таблица 3. Распределение 7 бегунов по точкам деления шкалы трека при изменении времени по шагам $\Delta t = \frac{1}{7}$.

№№ точек трека	**Распределение бегунов по точкам трека в расчетное время t**							
	0	**1/7**	**2/7**	**3/7**	**4/7**	**5/7**	**6/7**	**7/7**
1	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
#1	нет	1_r	4_r	5_r	2_r	3_r	6_r	нет
#2	нет	2_r	1_r	3_r	4_r	6_r	5_r	нет
#3	нет	3_r	5_r	1_r	6_r	2_r	4_r	нет
#4	нет	4_r	2_r	6_r	1_r	5_r	3_r	нет
#5	нет	5_r	6_r	4_r	3_r	1_r	2_r	нет
#6	нет	6_r	3_r	2_r	5_r	4_r	1_r	нет
#7\0	Все	7_r	7_r	7_r	7_r	7_r	7_r	Все

Примечание: Порядковые номера бегунов по остатку и остатки скорости:
1_r-r_1 =1; 2_r-r_2 =2; 3_r-r_3 =3; 4_r-r_4 =4; 5_r-r_5 =5; 6_r-r_6 =6; 7_r-r_7 =7.

На основе данных таблиц 2 и 3 сформулируем следующую теорему:

Теорема 3. Если скорости k объектов, стартующих одновременно с одной точки и двигающихся по кругу единичной длины, относятся разным классам вычетов по модулю k, то на одном периоде забега объекты распределяются по схеме центральной симметрии.

Доказательством представленной теоремы является следующее бесспорное умозаключение: *Так как в начале периода все бегуны распределяется по треку по возрастанию скоростей, то в конце периода, чтобы одновременно достичь точки старта, все бегуны должны распределяться по убыванию скоростей.*

При этом если количество бегунов k будет простым числом, а скорости бегунов принадлежать разным классам вычетов по модулю k, то на каждом шаге времени образуются k разных остатков, включая нулевого остатка. Отсюда следует, что на каждом шаге времени одного периода набор остатков состоит из одних и тех же чисел, только меняется порядок расположения чисел. Это означает, что в $\frac{1}{k}$-модели каждый бегун в рамках одного периода успевает побывать во всех точках деления трека.

Вышеописанный факт, представим в виде следующей теоремы.

Теорема 4. Если скорости k *объектов, где* k *−простое число, двигающихся по кругу единичной длины, принадлежать разным классам вычетов по модулю* k, *то при шаге времени* $\Delta t = \frac{1}{k}$ *все объекты кроме одного, скорость которого дает нулевой остаток, на одном периоде побывают на всех отметках шкалы круга, расстояние между которыми равно* $\Delta s = \frac{1}{k}$.

Безусловно, что на первом шаге времени $t = \Delta t \cdot 1$, все бегуны будут расположены по отметкам трека по порядку возрастания остатков, начиная с остатка 1 и заканчивая с нулевым остатком (остатком равным числу k). Это объясняется тем, что, как было сказано ранее, при изменении времени на один шаг $\Delta t = \frac{1}{k}$ бегуны делают шаг по отметкам трека в соответствии с их остатком скорости.

Поскольку в конце периода все бегуны будут находиться в точке старта, то должно быть понятно, что на предпоследнем шаге времени бегуны должны распределяться по отметкам трека так, что на предпоследней отметке будет находиться бегун, скорость которого дает остаток 1, т.е. в порядке убывания остатков. Другими словами распределение бегунов по схеме центральной симметрии действует и при нумерации бегунов по остаткам.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

По условию гипотезы скорости бегунов должны быть разными целыми числами. Этому условию соответствует любой набор чисел произвольно составленных из вычетов по модулю k. Поэтому для упрощения анализа взаиморасположения бегунов на треке скорости бегунов классифицируем на следующие три типа:

1. Скорости бегунов в количестве k являются вычетами разных классов вычетов по модулю k, т.е. скорости бегунов при делении на количество бегунов k дают разные остатки.

Например, скорости рассматриваемых бегунов соответствует скоростям расположенных на одном из столбцов таблицы 1.

Если скорости бегунов относиться к первому типу, то при забеге по прямой линии расстояние между всеми соседними бегунами растет одинаковой линейной зависимостью, и в одном периоде расстояние между бегунами измениться от 0 до km.

Поэтому при шагах $\Delta t(m) = \frac{1}{km}$ и $\Delta s(m) = \frac{1}{km}$, расстояние между соседними бегунами будет определяться следующей линейной зависимостью: $d = \Delta s(m) \cdot T = \frac{1}{km} T$, где T- количество шагов времени соответствующее множителю m. Отметим, что при модуле km максимальное количество шагов времени в одном периоде равно $T = km$.

При этом из-за того, что трек является круговым, при увеличении времени расстояние между некоторыми соседними бегунами будет увеличиваться, а расстояние между другими бегунами уменьшается, так как бегуны с большей скоростью будут догонять и обгонять бегунов, у которых скорости меньше.

2. Скорости бегунов в количестве k являются вычетами только одного класса вычетов по модулю k, т.е. скорости бегунов при делении на количество бегунов k дают равные остатки. При этом скорости бегунов по модулю km (где $m = 2, 3, 4 \dots, m =\in \mathbb{Z}_+$) принадлежать разным классам вычетов, причем остатки скоростей составляют арифметическую прогрессию.

Например, скорости рассматриваемых бегунов соответствует скоростям расположенных на одной из строк таблицы 1.

В данном случае при $\Delta t(m) = \frac{1}{km}$ и $\Delta s(m) = \frac{1}{km}$, в любой момент времени, или при количествах шагов времени T не кратных количеству бегунов k, расстояние между всеми соседними бегунами будет равно $d = k$.

При данном типе скоростей, если считать, что все бегут по прямой линии, расстояние между всеми соседними бегунами также растет одинаковой линейной зависимостью. Однако из-за круглой формы трека будет происходить наложение путей бегунов друг на друга, поэтому всегда будет обеспечиваться $d = k$. Это легко проверяется, поэтому не будем приводить пример.

3. Скорости бегунов в количестве k по структуре вычетов являются смесью пунктов 1 и 2, т.е. по модулю k скорости некоторых бегунов являются вычетами разных классов вычетов, а скорости других бегунов являются вычетами одного класса вычетов.

Например, скорости некоторых бегунов соответствует скоростям расположенных на одном из столбцов таблицы 1, а скорости других бегунов соответствует скоростям расположенных на одной из строк таблицы 1.

Если основываться на вышеприведенной классификации скоростей бегунов, то чтобы доказать гипотезу нужно доказать существование минимального или среднего одиночества для каждого бегуна, при любом количестве бегунов, для каждого из трех типов скорости бегунов.

Сначала докажем существование *минимального одиночества* для каждого бегуна, при любом количестве бегунов, для каждого из трех типов скорости бегунов.

3.1

Доказательством образования минимального одиночества бегунов, скорости которых относятся к первому типу скоростей, является теорема 2, поэтому не будем повторяться.

При этом несложно догадаться, что положение минимального одиночества для бегунов, у которых скорости относятся к типу 1, образуются, даже если скорости бегунов имеют общий делитель. Это объясняется тем, что согласно теореме 2 для данного типа скоростей - главное не повторяемость остатков скоростей бегунов, а такое может быть, когда скорости бегунов имеют общий делитель.

3.2

Далее докажем образование положения минимального одиночества для любого количества бегунов, когда скорости бегунов относятся к типу 2.

Согласно классификации скоростей, в данном случае скорости бегунов при делении на количество бегунов k дают равные остатки, а при делении на km *(где* $m = 2, 3, 4 \ldots, m =\in \mathbb{Z}_+$*)* дают разные остатки, причем остатки скоростей составляют арифметическую прогрессию.

Так как скорости бегунов в данном случае составляют арифметическую прогрессию и все бегуны стартуют с одной точки, то понятно, что расстояние между всеми бегунами будут увеличиваться одинаково. Отсюда следует, что все бегуны одновременно достигнет положения, когда расстояние между ними будут равно $\Delta s = \frac{1}{k}$. Это означает, что для данного случая непременно существует время, когда все бегуны будут находиться в положении минимального одиночества.

3.3

Далее переходим к доказательству образования положения минимального одиночества, когда скорости бегунов относиться к третьему типу, т.е. когда скорости бегунов и их остатки не составляют арифметическую прогрессию.

Доказать образования положения минимального одиночества, когда скорости некоторых бегунов принадлежать одному классу вычетов по модулю k, а скорости других бегунов принадлежать другому классу вычетов или разным классам вычетов по модулю k, намного сложнее, чем вышерассмотренные случаи. Поэтому, прежде чем приступить к доказательству одиночества бегунов, проведем анализ взаиморасположения пяти бегунов в разных моментах времени, скорости которых относится к третьему типу скоростей. Скорости и номера точек (отметок шкалы трека), на которых будут находиться бегуны в количестве 5 в разные моменты времени, приведены в Таблице 4.

Таблица 4 состоит из двух частей, в левой части таблицы приведены номера отметок шкалы трека, на которых будут находиться бегуны в разные моменты времени. При этом данные даются для шести бегунов имеющих скорости: v_1 =1; v_2 =2; v_3 =3; v_4 =4; v_5 =5; v_6 =6, т.е. один бегун является лишним, так как $k = 5$. Образно говоря, шестой бегун будет играть роль запасного игрока, он войдет в игру, когда будет удален один из пяти бегунов. Удаленный бегун будет обозначен зачеркнутым знаком скорости, например $\cancel{v}_2$.

Если принять, что 5 бегунов имеют скорости: v_1 =1; v_2 =2; v_3 =3; v_4 =4; v_5 =5, то получиться, что скорости бегунов относиться к типу 1, т.е. скорости бегунов имеют разные остатки при делении на количество бегунов $k = 5$. В этом случае все бегуны будут находиться в положении минимального одиночества, если количество шагов времени T будет равно числу кратному количеству бегунов $k = 5$. Такие моменты времени в таблице 3 выделены серым цветом.

А если вместо одного из четырех бегунов имеющих скорости: v_2 =2; v_3 =3; v_4 =4; v_5 =5, будет бегун со скоростью v_6 =6, то скорости бегунов будет относиться к третьему типу скоростей. Это объясняется тем, что в этом случае скорости двух бегунов v_1 =1 и v_6 =6 при делении на $k = 5$ дадут одинаковый остаток равный 1, а скорости остальных бегунов дадут разные остатки.

В правой части таблицы 4 приведены номера отметок шкалы трека, на которых бегун со скоростью v_6 =6 будет находиться в положении одиночества в определенные моменты времени. При этом на шапке столбцов правой части показаны скорости, которые будут исключены при анализе. Например, на первом столбце правой части таблицы 4, где имеется зачеркнутый знак $\cancel{v}_2$, указаны два числа 11 и 14. Это означает, что пять бегуна имеют следующие скорости: v_1 =1; v_3 =3; v_4 =4; v_5 =5; v_6 =6, т.е. вместо удаленного бегуна со скоростью v_2 =2 в игру вошел бегун со скоростью v_6 =6. При этом бегун имеющий скорость $v_6 = 6$, в моментах времени $T = 6$ и $T = 19$ будет находиться на отметках #11 и #14 трека, к тому же в положении одиночества.

Таблица 4. Номера отметок расположения бегунов в моментах времени

T	Номера отметок бегунов в момент времени							Точки одиночества v_6			
	v_1 =1	v_2 =2	v_3 =3	v_4 =4	v_5 =5	v_6 =6		$\cancel{v}_2$	$\cancel{v}_3$	$\cancel{v}_4$	$\cancel{v}_5$
1	1	2	3	4	5	6					
2	2	4	6	8	10	12					
3	**3** ($\cancel{v}_2$)	6	9	12	15	18					**18**
4	**4** ($\cancel{v}_2$)	8	12	16	20	24					**24**
5	5	10	15	20	25(0)	5					
6	6 ($\cancel{v}_5$)	**12**	**18**	**24**	5	11		11			
7	7	14	**21**	3	10	17					
8	**8** ($\cancel{v}_4$)	16	**24**	7	15	23			**23**		
9	9	18	**2**	11	20	4			4		
10	10	20	5	15	25(0)	10					
11	11 ($\cancel{v}_3$)	22	8	19	5	16				16	
12	12	24	11	23	10	22					
13	13	1	14	2	15	3					
14	14 ($\cancel{v}_3$)	3	17	6	20	9				9	
15	15	5	20	10	25(0)	15					
16	16	7	**23**	14	5	21			21		
17	**17** ($\cancel{v}_4$)	9	**1**	18	10	2			**2**		
18	18	11	**4**	22	15	8					
19	19 ($\cancel{v}_5$)	**13**	**7**	**1**	20	14		14			
20	20	15	10	5	25(0)	20					
21	**21** ($\cancel{v}_2$)	17	13	9	5	1					**1**
22	**22** ($\cancel{v}_2$)	19	16	13	10	7					**7**
23	23	21	19	17	15	13					
24	24	23	22	21	20	19					
25	25 (0)	25 (0)	25 (0)	25 (0)	25 (0)	25 (0)					

На столбце v_1 =1 левой части таблицы 4, рядом с некоторыми цифрами находиться зачеркнутый знак скорости, например, 11 ($\cancel{v}_3$). Такие знаки означают, что при удалении бегуна имеющего зачеркнутую скорость, бегун со скоростью v_1 =1 будет находиться в одиночестве в моменте времени, которое соответствует номеру строки. Приведенный пример 11 ($\cancel{v_3}$) означает, что при удалении бегуна со скоростью $v_3 = 3$, бегун со скоростью v_1 =1 будет находиться в одиночестве на отметке #11 в момент времени $T = 11$.

Из таблицы 4 следует, что все 5 бегуна, скорости которых не составляют арифметическую прогрессию, в рамках одного периода будут находиться в положении одиночества, причем два или более раза. Конечно, на основе одного примера нельзя считать, что гипотеза доказана, тем не менее, данный пример позволяет понять механизм образования одиночества бегунов, когда их скорости не составляют арифметическую прогрессию.

Для удобства анализа, бегунов, скорости которых при делении на количество бегунов дают разные остатки, объединим в одну группу, а остальных бегунов объединим в другую группу. Ниже приводится анализ закономерностей образования положения одиночества для двух групп бегунов.

В дальнейшем, бегунов, скорости которых при делении на количество бегунов k дают разные и равные остатки, соответственно назовем группами «K» и «Km». Для облегчения анализа месторасположение бегунов на треке будем считать, что группа «K» всегда состоит из k бегунов. При этом понятно, что если количество бегунов группы «Km» не равно нулю, то это невозможно, поэтому введем понятие «Мнимый бегун». Количество «Мнимых бегунов» группы «K» равно количеству бегунов группы «Km», а их скорости равны отсутствующим вычетам по модулю k.

Например, пусть у бегунов в количестве $k = 7$ будут следующие скорости: v_1 =1; v_2 =2; v_3 =3; v_4 =6; v_5 =7, v_6 =48 и v_7 =49. В этом случае бегуны со скоростями v_1 =1; v_2 =2; v_3 =3; v_4 =6; v_5 =7 будут считаться группой «K». Тогда бегуны со скоростями v_6 =48 и v_7 =49 будут группой «Km», так как их остатки при модуле k совпадает с остатками скоростей бегунов, имеющих скорости v_4 =6 и v_5 =7. Так вот, при анализе будет считаться, что группа «K» состоит из бегунов со скоростями v_1 =1; v_2 =2; v_3 =3; v_4 =6; v_5 =7, (v_6 =4); (v_7 =5), из которых последние двое бегунов являются мнимыми, т.е. фактически их нет.

При анализе различных ситуаций будем опираться на следующие бесспорные закономерности, которых для удобства представим в виде Лемм:

Лемма 1. Если все вычеты, принадлежащие разным классам вычетов, имеют одинаковый порядок, т.е. равный множитель n, *то образуется неравенство* $v_{1n}(min) < v_{2n} < v_{3n} < \cdots < v_{kn}(max)$.

Лемма 1 объясняется следующим образом: Так как $v_{in} = v_i + kn$, а наименьшие неотрицательные вычеты *(*$n = 0$*)* имеют следующий порядок $v_1(min) < v_2 < v_3 < \cdots < v_k(max)$, то, безусловно, при равном множителе n образуется неравенство $v_{1n}(min) < v_{2n} < v_{3n} < \cdots < v_{kn}(max)$.

Лемма 2. Наименьший вычет (n)*-го порядка больше любого вычета* $(n-1)$*-го порядка.*

Например, для граничного случая имеем неравенство: $v_{k0}(max) < v_{11}$, которое означает, что вычет первого порядка минимального вычета больше чем максимальный вычет нулевого порядка.

Лемма 3. Если смотреть на развертки траектории бегунов, то в одном периоде забега расстояние между бегунами, скорости которых являются вычетами разных классов по модулю k, *измениться от 0 до* $\frac{k}{k} = 1$, *с шагом* $\Delta s = \frac{1}{k}$, *а при модуле* km *расстояние между ними измениться от 0 до* $\frac{km}{km} = 1$, *с шагом* $\Delta s(m) = \frac{1}{km}$.

Поэтому при шагах $\Delta t(m) = \frac{1}{km}$ и $\Delta s(m) = \frac{1}{km}$, расстояние между соседними бегунами группы «K» будет определяться следующей линейной зависимостью: $d = \Delta s(m) \cdot T = \frac{1}{km} T$, где T- количество шагов времени соответствующее множителю m, $0 \leq T \leq km$.

При этом из-за того, что трек является круговым, при увеличении времени расстояние между некоторыми соседними бегунами будет увеличиваться и становиться больше, чем расстояние для образования положения минимального одиночества $d > \frac{1}{k}$, а расстояние между другими бегунами будет уменьшаться и становиться $d < \frac{1}{k}$.

Это означает, что на определенном промежутке времени образуются зоны пониженной и повышенной плотности бегунов. Данное явление объясняется тем, что бегуны с большей скоростью будут догонять и обгонять бегунов, у которых скорости меньше.

Например, в таблице 4 бегун со скоростью v_5 =5 догонит бегуна со скоростью v_1 =1 промежутке времени $6 < T < 7$. Затем в промежутке времени $8 < T < 9$ он догонит бегуна со скоростью v_2 =2, в это же время бегун со скоростью v_4 =4 догонит бегуна со скоростью v_1 =1. Далее в промежутке времени $12 < T < 13$ бегун со скоростью v_5 =5 догонит бегуна со скоростью v_3 =3 и т.д.

Теперь переходим к анализу различных ситуации, когда бегуны разделены на две группы. Зная, что бегуны в количестве k могут иметь бесконечно много вариантов скоростей, соответственно могут быть много различных ситуаций, будем анализировать только граничные ситуаций.

Как было сказано ранее, когда скорости бегунов относиться к типу 3, нужно повысить значения модуля, т.е. модуль нужно умножить на число m. При этом если принять $m = k$ или кратным k, например, то анализ облегчается, так как m становиться известным, например, модуль будет равен k^2.

Граничные варианты скоростей бегунов и пояснение механизма образования одиночества бегунов:

1) Наименьшая скорость группы «Km» значительно больше наибольшей скорости группы «K».

В этом случае в начале забега все бегуны группы «Km» успеют находиться в одиночестве, а бегуны группы «K» в это время будут находиться еще в сжатом состоянии. Так как в начале забега все бегуны распределяются по треку согласно *Лемме 1*. Далее бегуны группы «K» будут находиться в положении минимального одиночества в моментах времени, когда количество шагов времени T будет кратным количеству бегунов k, а в таких моментах все бегуны группы «Km» будут в одинаковых точках трека.

2) Разница между наименьшей скоростью группы «Km» (медленный бегун) и наибольшей скоростью группы «K» (быстрый бегун) составляет 1. Согласно *Лемме 2* скорость любого бегуна группы «Km» больше скорости любого бегуна группы «K», поэтому число 1 является минимально возможной разницей скоростей двух групп.

Такой случай был показан в таблице 4, когда наибольшая скорость группы «K» была равна $v_5 = 5$, а наименьшая скорость группы «Km» была равна $v_6 = 6$.

В этом случае для отрыва медленного бегуна группы «Km» от быстрого бегуна группы «K» требуется время $T \geq k$. Так как для образования одиночества расстояние между бегунами должно быть $d \geq \frac{k}{k^2} = \frac{1}{k}$. За это время медленный бегун группы «Km» успеет совершить один полный круг и догнать медленного бегуна группы «K», т.е. он не будет в положении одиночества. Однако затем он постепенно будет обгонять других бегунов группы «K» и в моментах времени, когда он сравниться с любым мнимым бегуном группы «K», он будет находиться в положении одиночества.

3) Скорости бегунов группы «Km» являются большими вычетами по модулю km (k^2).

Ранее приведенный пример, когда бегуны имели скорости v_1 =1; v_2 =2; v_3 =3; v_4 =6; v_5 =7, v_6 =48 и v_7 =49 соответствует такому случаю, так как v_6 =48 и v_7 =49 являются большими вычетами по модулю k^2.

Сложность данной ситуации заключается в том, что разница между двумя бегунами группы «Km» составляет 1, что является минимально возможной разницей. Поэтому в таких случаях для отрыва быстрого бегуна от преследователя на расстояние $d \geq \frac{k}{k^2} = \frac{1}{k}$, обеспечивающего одиночества, требуется время $T \geq k$.

Далее быстрый бегун группы «Km» постепенно будет обгонять других бегунов группы «K» и в моментах времени, когда он сравниться с любым мнимым бегуном группы «K», он будет находиться в положении одиночества. Второй бегун группы «Km» будет находиться в одиночестве по такой же схеме. При необходимости можно вычислить время встречи бегуна группы «Km» с мнимым бегуном группы «K».

Если два бегуна начинают двигаться по окружности одновременно с разными скоростями соответственно v_1 и v_2 ($v_2 > v_1$) с одной точки, то первый бегун приближается ко второму бегуну со скоростью $v_2 - v_1$.

В момент, когда первый бегун догоняет второго бегуна, первый бегун проходит на один круг больше второго, поэтому время считается так: $t_x = S/(v_2 - v_1)$. Поскольку в нашем случае $S = 1$, то получим следующую формулу

$$t_x = 1/(v_2 - v_1). \tag{5}$$

А если бегуны стартуют с разных точек, т.е. расстояние между вторым и первым бегунами будет равно d $(0 < d < 1)$, то время встречи бегунов будет равно

$$t_x = (1 - d)/(v_2 - v_1). \tag{6}$$

Таким образом, механизм образования положения одиночества, когда скорости бегунов относятся к третьему типу скоростей, понятен.

Тем не менее, может возникнуть следующий вопрос:

Чем гарантируется, что каждый бегун группы «Km» в одном периоде забега сравниться хотя бы с одним мнимым бегуном группы «K», когда последний будет находиться в одиночестве?

Такой вопрос может возникнуть из-за следующих закономерностей механизма движения объектов по кругу единичной длины:

1) В одном периоде забега промежуток между бегунами сначала будет увеличиваться, а затем снова уменьшаться до нуля;

2) Сумма длин промежутков между всеми бегунами всегда должна быть равна длине круга 1, за исключением моментов старта и финиша, где она равна 0, поэтому если где-то $d > \frac{1}{k}$, то другом месте должно быть $d < \frac{1}{k}$;

3) Из-за распределения бегунов по схеме центральной симметрии, каждый бегун группы *«Km»* должен успеть сравниться хотя бы с одним мнимым бегуном группы *«K»,* в первой половине периода, а на второй половине периода будет перевернутый повтор взаиморасположение бегунов;

4) Бегуны группы *«Km»* могут быть в одиночестве только тогда, когда количество шагов времени T не является числом кратным количеству бегунов k, поскольку в таких моментах времени они будут совпадать с реальными бегунами группы *«K»*;

5) Так как длина промежутка между бегунами группы *«K»* равная $d = \frac{1}{k}$, необходимая для образования минимального одиночества, образуется при количестве шагов времени T кратных k, то бегуны группы *«Km»* должны успеть сравниться с мнимыми бегунами группы *«K»* при выполнении условии $k < T < km/2$.

Действительно, на первый взгляд условия слишком жесткие, поэтому возникновение вышеприведенного вопроса обоснованно. Вместе с тем понятно, что если в промежутке времени соответствующему условию $k < T < km/2$ медленный бегун группы *«Km»* успеет догнать быстрого бегуна группы *«K»,* то вопрос снимается, так как это самое неблагоприятное условие.

При анализе граничных вариантов скоростей двух групп бегунов данный вариант был анализирован (смотри граничный вариант 2). Там было показано, что медленный бегун группы *«Km»* успеет догнать быстрого бегуна группы *«K»* в моменте времени $T = k$, а дальше он уйдет на отрыв. Отсюда следует, что время достаточно, при $m > 2$, так как $k < T < km/2$.

3.4.

Анализ взаиморасположение различного количества бегунов, скорости которых имеют общий максимальный делитель 1, показал не возможность образования положения среднего одиночества для всех бегунов. Как известно, для опровержения любого утверждения достаточно привести один контр пример. С учетом этого, ниже продемонстрируем на одном примере невозможность образования положения среднего одиночества для всех бегунов, скорости которых являются взаимно простыми числами.

В данном случае удобно использовать нумерацию бегунов по значению их скорости. Пусть бегуны в количестве k имеют следующие скорости: $v_1(min) < v_2 < v_3 < \cdots < v_k(max)$. Тогда, если использовать нумерацию бегунов по значению их скорости, всегда существует время, при котором бегуны будут расположены по треку в порядке возрастания скорости: $1_v,\ 2_v,\ 3_v, \dots, k_v$.

Пример. Пусть у пяти бегунов $k = 5$ будут следующие скорости, составляющие арифметическую прогрессию с шагом 1: v_1 =1; v_2 =2; v_3 =3; v_4 =4; v_5 =5. В данном случае, все скорости бегунов при делении на 5 дают разные остатки.

Если скорости бегунов умножить на время $t = \frac{1}{k} = 1/5$, то получим следующие длины забега бегунов: $s_1 = \frac{1}{5}$; $s_2 = \frac{2}{5}$; $s_3 = \frac{3}{5}$; $s_4 = \frac{4}{5}$; $s_5 = \frac{5}{5} = 1(0)$. Как видно, в момент времени $t = \frac{1}{k} = 1/5$, все бегуны будут расположены по отметкам шкалы треке в порядке возрастания скорости: $1_v,\ 2_v,\ 3_v,\ 4_v,\ 5_v$. При этом расстояние между всеми бегунами будет равно $\Delta s = 1/5$, поэтому все бегуны будут находиться в положении минимального одиночества, что основывается на Теореме 2.

Далее, если вышеуказанное расположение бегунов считать стартовым, то при изменении времени t на малое значение, все бегуны, за исключением двух бегунов, у которых скорости являются наименьшим (v_{min}) и наибольшим (v_{max}) по сравнению со скоростями других бегунов, будут находиться в положении среднего одиночества. Такое положение образуется в любой момент времени, пока бегун с наибольшей скоростью не догонит бегуна с наименьшей скоростью. Поэтому можно быть уверенным, что вышеописанное положение образуется, если сдвиг бегуна с наибольшей скоростью не превышает шаг отметок шкалы трека, т.е. $t \cdot v_5 \leq \Delta s = 1/5$.

Образование положения среднего одиночества у всех бегунов, за исключением двух бегунов, у которых скорости соответственно равны v_{min} и v_{max}, объясняется следующим образом.

Если два бегуна, которые имеют скорости v_i и v_j, причем $v_i < v_j$, находящейся друг от друга на расстоянии $\Delta s = 1/k$, где $k = 2, 3, 4 \ldots$, одновременно стартуют в одном направлении, то очевидно, что в любой момент времени t расстояние между бегунами Δs_{j-i} будет больше, чем стартовое расстояние, т.е. $\Delta s_{j-i} > \Delta s = \frac{1}{k}$.

Невозможность образования положения среднего одиночества для всех бегунов покажем на основе таблицы 4. Данная таблица была использована в предыдущем пункте, в правой части данной таблицы показаны отметки расположения на треке 5 бегунов имеющих скорости: v_1 =1; v_2 =2; v_3 =3; v_4 =5; v_5 =5, в определенные моменты времени. При этом жирными цифрами показаны отметки, на которых соответствующий бегун будет находиться в положении среднего одиночества. Как следует из данных таблицы 3, два бегуна со скоростями v_1 =1 и v_5 =5, у которых скорости являются наименьшим и наибольшим по сравнению со скоростями других бегунов, не будут в положении среднего одиночества. А другие бегуны в разные моменты времени будут находиться в положении среднего одиночества два и более раза.

Вышеприведенный пример доказывает, что в определенных значениях скоростей, некоторые бегуны не могут находиться в положении среднего одиночества.

Можно предполагать, что при любом количестве бегунов, у которых скорости являются взаимно простыми числами, некоторые бегуны не могут находиться в положении среднего одиночества. Однако мы не будем доказывать верность или неверность вышесказанного предположения, так как оно не влияет на доказательство гипотезы об одиноком бегуне.

Таким образом, доказано, что при любом количестве бегунов k*, бегающих по треку единичной длины с разными целочисленными скоростями, существует время, когда расстояние между всеми соседними бегунами будет равно* $\frac{1}{k}$*, т.е. доказано, что, если* V *- произвольный набор разных целых положительных чисел* v *в количестве* k*, то* $\exists t \in \mathbb{R} \quad \forall v \in V$ $\|tv\| = \frac{1}{k}$.

Это означает, что гипотеза об одиноком бегуне верна, и она доказана.

Гипотезу об одиноком бегуне можно демонстрировать на основе следующих физических моделей.

1) Физическая модель формирования месторасположения объектов на круговом трека в определенный момент времени, похожа на наматывания резиновой нити с бусинами (шариками) круглую катушку. При этом бусины в количестве k насажены на нити с шагом 1, а один конец нити закреплен на катушку, длина круга которой равен k.

Так если намотать такую нить на катушку без растягивания, то все бусины будут равномерно расположены по периметру катушки. Данное положение бусин соответствует количеству шага времени $T = 1$. Далее если удлинить длину нити путем растягивания, то расстояния между бусинами также будут увеличиваться. Поэтому при наматывании удлиненной нити на катушку происходить изменение месторасположение бусин на катушке и в некоторых случаях произойдет наложение бусин друг на друга. Завершению одного периода забега будет соответствовать растягивание нити так, что последняя бусина при наматывании нити на катушку попадала на точку закрепления нити, т.е. расстояния между бусинами будут равны длине круга катушки. Необходимо отметить, что в этом случае, все бусины будут расположены в точке закрепления нити.

Таким образом, используя такую физическую модель можно демонстрировать механизм взаиморасположение бегунов на треке в определенных моментах времени.

2) Механизм взаиморасположение бегунов на треке в определенных моментах времени в определенной степени также можно демонстрировать на основе движения несвязанных между собой простых маятников монотонно возрастающей длины. В этой модели скорости бегунов будут обратно пропорциональны длине маятника, поэтому бегуну с самой большой скоростью соответствует маятник самой короткой длины.

Литература

1. J. M. Wills, *Zwei Sazte uber inhomogene diophantische Approximation von Irrationalzahlen*, Monatsch. Math. 71 (1967), 263-269.

2. Y. G. Chen, *View-obstruction problems in n-dimensional Euclidean space and a generalization of them*, Acta Math. Sinica 37 (1994), no. 4, 551–562.

3. J. Barajas, O. Serra, *On the chromatic number of circulant graphs*, Discrete Math. 309 (2009), 5687–5696.

4. W. Bienia, L. Goddyn, P. Gvozdjak, A. Sebo, M. Tarsi, *Flows, view obstructions and the lonely runner*, J. Combin. Theory Ser. B 72 (1998), 1–9.

5. G. Perarnau, O. Serra, *Correlation among runners and some results on the lonely runner conjecture*, Electron. J. Combin. 23 (2016), no. 1, Paper 1.50, 22 pp.

6. T. Tao. *Some Remarks on the Lonely Runner Conjecture*, ArXiv:1701.02048v1 [math.CO] 9 Jan 2017.

7. J. Barajas, O. Serra, *The lonely runner with seven runners*, Electron. J. Combin. 15 (2008), R48, 18 pp.