About conservation the angular momentum for asymmetric tensor in electrodynamics

Yurii A. Spirichev

The State Atomic Energy Corporation ROSATOM, "Research and Design Institute of Radio-Electronic Engineering" - branch of Federal Scientific-Production Center "Production Association "Start" named after Michael V.Protsenko", Zarechny, Penza region, Russia

E-mail: yurii.spirichev@mail.ru

(Dated: August 6, 2017)

Abstract

It is customary to assume that the law of conservation of the angular momentum is violated for an asymmetric energy-momentum tensor. This is the reason for criticizing the Minkowski tensor and other asymmetric energy-momentum tensors. In this paper, it is shown that the laws of conservation of energy and momentum following from an asymmetric tensor in the form of its total divergence are equivalent to the divergence of its symmetric part. It is shown that the total divergence of the antisymmetric part of the asymmetric tensor is identically zero. From this, it follows that for the asymmetric energy-momentum tensor the law of conservation of the angular momentum is also fulfilled. It is shown that the linear invariant of the Minkowski tensor for a vacuum does not correspond to the quadratic invariant of the electromagnetic field. This indicates that the linear invariant of the Minkowski tensor and the three-dimensional stress tensor are not correct.

Keywords: Energy-momentum tensor, electromagnetic momentum, angular momentum

О сохранении момента импульса в электродинамике для несимметричного тензора энергии-импульса

Юрий А. Спиричев

Государственная корпорация по атомной энергии "Росатом". Научно-исследовательский и конструкторский институт радиоэлектронной техники – филиал федерального государственного унитарного предприятия федерального научно-производственного центра «Производственное объединение «Старт» имени М.В. Проценко»

E-mail: yurii.spirichev@mail.ru

Аннотация

Принято считать, что для несимметричного тензора энергии-импульса нарушается закон сохранения момента импульса. Это является причиной критики тензора Минковского и других несимметричных тензоров энергии-импульса. Показано, что законы сохранения энергии и импульса, вытекающие из несимметричного тензора в виде его полной дивергенции, эквивалентны дивергенции его симметричной части, а полная дивергенция антисимметричной части несимметричного тензора

тождественно равна нулю. Из этого следует, что для несимметричного тензора энергии-импульса закон сохранения момента импульса также выполняется. Следовательно, каждому несимметричному тензору энергии-импульса соответствует свой симметричный тензор, из которого вытекают законы сохранения. Получены симметричные тензоры, соответствующие несимметричному тензору Минковского и другим известным несимметричным тензорам энергии-импульса. Получены полные формы электромагнитного импульса и полные уравнения сохранения для несимметричных тензоров энергии-импульса. Показано, что линейный инвариант тензора Минковского для вакуума не соответствует квадратичному инварианту электромагнитного поля. Это указывает на неправильность линейного инварианта тензора Минковского и трехмерного тензора напряжений.

Ключевые слова: тензор энергии-импульса, электромагнитный импульс, момент импульса.

Содержание

1. Введение

Тензоры энергии-импульса (ТЭИ) играют фундаментальную роль в описании природы, так как из них следуют уравнения законов сохранения энергии и импульса. Проблема выбора ТЭИ и формы электромагнитного импульса взаимодействия электромагнитного поля со средой имеет долгую историю и является предметом многочисленных исследований и дискуссий. В последние годы по этой проблеме опубликованы работы [1-51] и др. В этих статьях рассматриваются формы ТЭИ, формы электромагнитного импульса в среде, сила Абрагама и другие электромагнитные силы. В дискуссиях по этому вопросу обычно рассматривают ТЭИ Минковского и Абрагама. Главным аргументом против ТЭИ Минковского является его несимметричность. Несимметричному ТЭИ приписывают нарушение закона сохранения момента импульса. Такое отрицательное свойство заставляет исследователей, начиная с Абрагама, заниматься построением различных вариантов симметричных ТЭИ [52-57]. Электромагнитный импульс является составной частью ТЭИ, поэтому форма импульса также является предметом дискуссий. В этих дискуссиях конкурируют формы импульса Минковского и Абрагама. Плотность электромагнитного импульса в форме Минковского имеет вид $\mathbf{g}^M = \mathbf{D}\times\mathbf{B}$. Плотность электромагнитного импульса в форме Абрагама имеет вид $\mathbf{g}^A = \mathbf{S}/c^2 = \mathbf{E}\times\mathbf{H}/c^2$. Здесь $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ – соответственно, напряженность электрического поля и электрическая индукция; **H** и **B** – соответственно, напряженность магнитного поля и магнитная индукция. Выполнен ряд экспериментальных работ по определению того, какая из этих форм лучше соответствует реальности. В обзоре [1] рассмотрены экспериментальные работы по этой проблеме и сделан их анализ, из которого следует, что до настоящего времени не получено достоверных экспериментальных доказательств правильности какой-либо одной из этих форм электромагнитного импульса. Таким образом, до недавнего времени этот фундаментальный вопрос электродинамики оставался открытым. В работе [4] из тензоров электромагнитного поля и электромагнитной индукции математически строго получен ТЭИ взаимодействия электромагнитного поля с диэлектрической средой, из которого получены уравнения сохранения и волновые уравнения для энергии и импульса в диэлектрической среде. В работе [5] получен ТЭИ взаимодействия электромагнитного поля с проводящей средой (зарядами и токами), который ранее в электродинамике отсутствовал. Эти ТЭИ являются несимметричными, что приводит к критике со стороны сторонников применения симметричных тензоров. Действительно, из симметричного тензора механической энергии-импульса следует ковариантное уравнение сохранения механического импульса и момента импульса $\partial_t \mathbf{p}^M + \partial_m \sigma^M_{mn} = \mathbf{F}^E_{ext}$, где σ^M_{mn} - трехмерный тензор потока плотности механического импульса или тензор напряжений; $\mathbf{F}^E_{ext}$ - электрические силы, которые здесь являются сторонними силами. Ковариантное уравнение сохранения электромагнитного импульса $\mathbf{p}^E$ в сплошной среде имеет вид [58,59] $\partial_t \mathbf{p}^E + \partial_m \sigma^E_{mn} = \mathbf{F}^M_{ext}$, где σ^E_{mn} - трехмерный тензор потока плотности электромагнитного импульса или тензор напряжений; $\mathbf{F}^M_{ext}$ - механические силы, которые здесь являются сторонними силами. В рассматриваемом случае механические силы являются ответной реакцией среды на электромагнитные силы. Можно составить полное ковариантное уравнение баланса механических и электромагнитных сил $\mathbf{F}^M_{ext} = \mathbf{F}^E_{ext}$ или $\partial_t \mathbf{p}^E + \partial_m \sigma^E_{mn} = \partial_t \mathbf{p}^M + \partial_m \sigma^M_{imn}$. В более общем виде это уравнение можно записать в виде четырехмерных дивергенций тензоров энергии-импульса по каждому из индексов [6]: $\partial^\mu T^E_{\mu\nu} = \partial^\mu T^M_{\mu\nu}$ и $\partial^\nu T^E_{\mu\nu} = \partial^\nu T^M_{\mu\nu}$, где $T^E_{\mu\nu}$ и $T^M_{\mu\nu}$, соответственно, тензоры электромагнитной и механической энергии-импульса. Если $T^E_{\mu\nu}$ является симметричным тензором, то вопросов не возникает, так как это уравнение является равенством дивергенций симметричных тензоров. Но если $T^E_{\mu\nu}$ является несимметричным тензором, то этот вопрос требует особого рассмотрения. Целью настоящей статьи является рассмотрение вопроса сохранения электромагнитной энергии, импульса и момента импульса для несимметричного ТЭИ.

2. Несимметричные тензоры энергии-импульса в электродинамике

Канонический ТЭИ запишем в общем виде [16]:

$$\mathcal{T}_{\mu\nu}=\begin{bmatrix} W & i\frac{1}{c}\mathbf{S} \\ ic\cdot\mathbf{g} & t_{ik} \end{bmatrix} \qquad (\mu,\ \nu=0,1,2,3;\ \ i,k=1,2,3) \tag{1}$$

где W – плотность энергии;

S – плотность потока энергии (вектор Пойнтинга);

g – плотность импульса;

$\boldsymbol{t}_{\text{ik}}$ – тензор плотности потока импульса (тензор напряжений).

Тензор второго ранга имеет дивергенции по каждому из индексов:

$$\partial^{\mu}\mathcal{T}^{E}_{\mu\nu}=\partial^{\mu}\mathcal{T}^{M}_{\mu\nu}\ \text{ и }\ \partial^{\nu}\mathcal{T}^{E}_{\mu\nu}=\partial^{\nu}\mathcal{T}^{M}_{\mu\nu} \tag{2}$$

Правые части этих уравнений равны, поскольку у симметричного тензора механической энергии-импульса дивергенции по каждому из индексов равны. Дивергенции по каждому из индексов существуют одновременно, поэтому их можно записать в виде суммы дивергенций, сложив уравнения (2):

$$(\partial^{\mu}\mathcal{T}^{E}_{\mu\nu}+\partial^{\nu}\mathcal{T}^{E}_{\mu\nu})/2=\partial^{\mu}\mathcal{T}^{M}_{\mu\nu} \tag{3}$$

Несимметричный ТЭИ $\mathcal{T}^{E}_{\mu\nu}$ можно разложить на антисимметричный $\mathcal{T}^{E}_{[\mu\nu]}$ и симметричный $\mathcal{T}^{E}_{(\mu\nu)}$ ТЭИ:

$$\mathcal{T}^{E}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\cdot\mathcal{T}^{E}_{[\mu\nu]}+\frac{1}{2}\cdot\mathcal{T}^{E}_{(\mu\nu)}=\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} 0 & i\frac{1}{c}\mathbf{S}-ic\cdot\mathbf{g} \\ -i\frac{1}{c}\mathbf{S}+ic\cdot\mathbf{g} & t_{ik}-t_{ki} \end{bmatrix}+\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} 2W & i\frac{1}{c}\mathbf{S}+ic\cdot\mathbf{g} \\ i\frac{1}{c}\mathbf{S}+ic\cdot\mathbf{g} & t_{ik}+t_{ki} \end{bmatrix} \tag{4}$$

Очевидно, что дивергенции антисимметричного ТЭИ $\mathcal{T}^{E}_{[\mu\nu]}$ равны по абсолютной величине и имеют разные знаки. Поэтому сумма его дивергенций равна нулю. Тогда в левую часть уравнения (3) войдут только две равные дивергенции по различным индексам симметричного ТЭИ $\mathcal{T}^{E}_{(\mu\nu)}$ и уравнение (3) можно записать в виде:

$$\partial^{\mu}\mathcal{T}^{E}_{(\mu\nu)}=\partial^{\mu}\mathcal{T}^{M}_{\mu\nu} \tag{5}$$

где, с учетом коэффициента 1/2 $\mathcal{T}^{E}_{(\mu\nu)}=\begin{bmatrix} W & (i\frac{1}{c}\mathbf{S}+ic\cdot\mathbf{g})/2 \\ (i\frac{1}{c}\mathbf{S}+ic\cdot\mathbf{g})/2 & (\ t_{ik}+t_{ki})/2 \end{bmatrix}$. Теперь в правой и левой частях этого уравнения стоят симметричные ТЭИ, следовательно, в нем сохраняется момент импульса. Таким образом, существующее мнение о том, что для несимметричного ТЭИ не сохраняется момент импульса является ошибочным. Причиной этого ошибочного мнения является то, что обычно рассматривают дивергенцию только по одному из индексов, при этом в уравнении сохранения импульса для диэлектрической среды появляется вихревая сила Абрагама $\mathbf{F}_{A}=\partial_{t}\mathbf{g}^{M}-\partial_{t}\mathbf{g}^{A}=\nabla\times(\mathbf{E}\times\mathbf{D}+\mathbf{B}\times\mathbf{H})$ [60], которая нарушает закон сохранения момента импульса. При этом в уравнениях взаимодействия электромагнитного поля со средой появляется не скомпенсированный момент импульса (эффект Фейгеля). Эта ошибка приводит к тому, что некоторые авторы [61 - 67] и др. рассматривают возможность извлечения этого момента импульса из вакуума. Сила Абрагама следует из антисимметричного ТЭИ $T^{E}_{[\mu\nu]}$ в виде его дивергенции по любому из индексов. В полные дивергенции несимметричного и антисимметричного ТЭИ сила Абрагама входит с разными знаками и при сложении дивергенций по обоим индексам она сокращается. Таким образом, полная дивергенция антисимметричного ТЭИ $T^{E}_{[\mu\nu]}$ доказывает, что сила Абрагама тождественно равна нулю и реально в природе не существует. Следовательно, не скомпенсированного момента импульса в природе также не существует, и извлечь его из вакуума невозможно.

Все полные законы сохранения для энергии и импульса следуют из симметричной части $T^{E}_{(\mu\nu)}$ несимметричного тензора $T^{E}_{\mu\nu}$. Следовательно, каждому несимметричному ТЭИ соответствует связанный с ним симметричный ТЭИ, который можно использовать для практических вычислений.

Несимметричному ТЭИ Минковского соответствует (с учетом коэффициента ½) симметричный ТЭИ:

$$W = (\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{H}\cdot\mathbf{B})/2 \qquad \mathbf{S} = (c^2\cdot(\mathbf{D}\times\mathbf{B}) + \mathbf{E}\times\mathbf{H})/2$$

$$\mathbf{g} = (\mathbf{D}\times\mathbf{B} + \mathbf{E}\times\mathbf{H}/c^2)/2 \qquad t_{ik} = (E_i D_k + E_k D_i + B_i H_k + B_k H_i)/2 - \delta_{ik}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H})/2$$

Несимметричному ТЭИ, полученному в работе [4], соответствует (с учетом коэффициента ½) симметричный ТЭИ:

$$W = \mathbf{E}\cdot\mathbf{D} \qquad \mathbf{S} = (c^2\cdot(\mathbf{D}\times\mathbf{B}) + \mathbf{E}\times\mathbf{H})/2$$

$$\mathbf{g} = (\mathbf{D}\times\mathbf{B} + \mathbf{E}\times\mathbf{H}/c^2)/2 \qquad t_{ik} = (E_i D_k + E_k D_i + B_i H_k + B_k H_i)/2 - 3\cdot\delta_{ik}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}) \qquad (6)$$

Этот ТЭИ имеет замечательную особенность, отличающую его от других известных ТЭИ. Его линейным инвариантом (суммой диагональных компонентов) является выражение $I = \mathbf{E}\cdot\mathbf{D} - \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}$. Для вакуума этот инвариант является каноническим квадратичным инвариантом электромагнитного поля $I = E^2 - B^2$, представляющим собой плотность функции Лагранжа электромагнитного поля [68]. Этот ТЭИ отличается от ТЭИ Минковского только диагональными компонентами, но это различие является принципиальным, так как оно связано с электромагнитными силами в среде. Из этого инварианта следует, что электромагнитные силы в среде могут менять знак в зависимости от соотношения величины электрических и магнитных характеристик среды, связанных с **D** и **H**.

Линейным инвариантом ТЭИ Минковского является выражение: $I^M = \mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}$. Инвариант ТЭИ Минковского для электромагнитного поля в вакууме $I^M = E^2 + B^2$ не совпадает с каноническим квадратичным инвариантом электромагнитного поля $I = E^2 - B^2$. Следовательно, инвариант ТЭИ Минковского является неправильным, так как для электромагнитного поля существует только два квадратичных инварианта: $I_1 = E^2 - B^2$ и $I_2 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$. Из этого следует, что неправильным является и трехмерный тензор напряжений Минковского, описывающий электромагнитные силы.

В работе [5] получен несимметричный ТЭИ для проводящей среды $T^E_{\mu\nu} = \mathbf{A}_\mu \otimes \mathbf{J}_\nu$, где $\mathbf{A}_\mu$ - электромагнитный потенциал, $\mathbf{J}_\nu$ - четырехмерная плотность тока. Его компоненты имеют вид:

$W = \rho \cdot \varphi$ - плотность полной электромагнитной энергии, где ρ - плотность зарядов, φ - скалярный потенциал электромагнитного поля;

$\mathbf{g} = \rho \cdot \mathbf{A}$ - плотность электромагнитного импульса, где $\mathbf{A}$ - векторный потенциал электромагнитного поля;

$\mathbf{S} = \varphi \cdot \mathbf{J}$ - плотность потока электромагнитной энергии, где $\mathbf{J}$ - плотность тока;

$t_{ik} = -\mathbf{A}_i \otimes \mathbf{J}_k$ - трехмерный тензор плотности потока электромагнитного импульса или тензор напряжений.

Этот несимметричный ТЭИ также можно разложить на антисимметричный и симметричный ТЭИ (4). Из антисимметричного ТЭИ, в виде его дивергенции по одному из индексов, следует уравнение силы Абрагама для проводящей среды:

$$\mathbf{F}_A = \partial_t(\rho \cdot \mathbf{A}) - \frac{1}{c^2}\partial_t(\varphi \cdot \mathbf{J}) = \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{J})$$

Здесь также сила Абрагама входит в полные дивергенции несимметричного и антисимметричного ТЭИ с разными знаками и при сложении дивергенций по разным индексам она сокращается, т.е. и здесь сила Абрагама тождественно равна нулю и реально в природе не существует.

Этому несимметричному ТЭИ для проводящей среды соответствует симметричный ТЭИ:

$$W = \rho \cdot \varphi \qquad \mathbf{S} = (\varphi \cdot \mathbf{J} + c^2 \cdot \rho \cdot \mathbf{A})/2$$

$$\mathbf{g} = ((\varphi \cdot \mathbf{J})/c^2 + \rho \cdot \mathbf{A})/2 \qquad t_{ik} = (\mathbf{A}_i \otimes \mathbf{J}_k + \mathbf{A}_k \otimes \mathbf{J}_i)/2 \tag{7}$$

Линейный инвариант этого симметричного ТЭИ имеет вид:

$$I = \varphi \cdot \rho - \mathbf{A} \cdot \mathbf{J}$$

Этот инвариант известен в электродинамике [69], как плотность функции Лагранжа взаимодействия электромагнитного поля с электрическими зарядами.

3. Формы электромагнитного импульса для несимметричного тензора

Плотность электромагнитного импульса для диэлектрической среды в форме Минковского имеет вид $\mathbf{g}^M = \mathbf{D} \times \mathbf{B}$. Плотность электромагнитного импульса в форме Абрагама имеет вид $\mathbf{g}^A = \mathbf{S}/c^2 = \mathbf{E} \times \mathbf{H}/c^2$. Рассмотрим различия этих двух форм электромагнитного импульса. Зоммерфельд А. [70] разделил электромагнитные величины на силовые и количественные. К силовым величинам он отнес напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ и индукцию магнитного поля $\mathbf{B}$. К количественным величинам он отнес электрическую индукцию $\mathbf{D}$ и напряженность магнитного поля $\mathbf{H}$. Связь между $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ определяется материальными уравнениями. Для слабого электромагнитного поля в изотропной неферромагнитной диэлектрической среде без дисперсии обычно принимают материальные уравнения в виде $\mathbf{D} = \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot \mathbf{E}$ и $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu \cdot \mu_0$, где ε и μ, соответственно, относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды. Электрическая индукция **D** и напряженность магнитного поля **H** соответственно, зависят от электрических и магнитных характеристик среды. Тогда плотность электромагнитного импульса Минковского $\mathbf{g}^M = \mathbf{D} \times \mathbf{B}$, в которую входит электрическая индукция **D**, описывает часть электромагнитного импульса, связанную с электрическими характеристиками среды. Плотность электромагнитного импульса Абрагама $\mathbf{g}^A = \mathbf{E} \times \mathbf{H}/c^2$, в которую входит магнитная индукция **H**, описывает часть электромагнитного импульса, связанную с магнитными характеристиками среды. Из этого следует, что каждая из этих форм описывает только часть полного электромагнитного импульса. Из несимметричного ТЭИ (6) в виде дивергенций по каждому из его индексов следуют уравнения сохранения для обеих форм плотности импульса. Из разложения несимметричного ТЭИ на симметричный и антисимметричный ТЭИ следует полная форма плотности электромагнитного импульса для диэлектрической среды в виде:

$$\mathbf{g}^E = (\mathbf{g}^M + \mathbf{g}^A)/2 = (\mathbf{D} \times \mathbf{B} + \mathbf{E} \times \mathbf{H}/c^2)/2.$$

Из несимметричного ТЭИ для проводящей среды $T^E_{\mu\nu} = \mathbf{A}_\mu \otimes \mathbf{J}_\nu$ также следуют две формы плотности электромагнитного импульса: 1) $\mathbf{g}^E = \rho \cdot \mathbf{A}$ и 2) $\mathbf{g}^E = \varphi \cdot \mathbf{J}/c^2$. Первая форма импульса связана с плотностью зарядов, а вторая форма импульса связана со скоростью их движения. Из разложения несимметричного ТЭИ на симметричный и антисимметричный ТЭИ следует полная форма плотности электромагнитного импульса для проводящей среды в виде:

$$\mathbf{g}^E = (\varphi \cdot \mathbf{J}/c^2 + \rho \cdot \mathbf{A})/2$$

Эта форма плотности электромагнитного импульса может найти применение при теоретическом исследовании динамики плазмы.

4 Уравнения сохранения электромагнитной энергии и импульса для несимметричного тензора

Уравнения сохранения электромагнитной энергии и импульса следуют в виде полных четырехмерных дивергенций несимметричного ТЭИ $T^E_{\mu\nu}$: $(\partial^\mu T^E_{\mu\nu} + \partial^\nu T^E_{\mu\nu})/2 = \partial^\mu T^M_{\mu\nu}$ или его симметричной части $\partial^\mu T^E_{(\mu\nu)} = \partial^\mu T^M_{\mu\nu}$. Запишем трехмерные уравнения сохранения плотности энергии и импульса для диэлектрической среды с потерями:

$$\frac{1}{c}\partial_t(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}) + c\cdot\nabla\cdot(\mathbf{D}\times\mathbf{B} + (\mathbf{E}\times\mathbf{H})/c^2)/2 = \partial_t m + \nabla\cdot\mathbf{p} \tag{8}$$

$$(\frac{1}{c^2}\partial_t(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) + \partial_t(\mathbf{D}\times\mathbf{B}) - \partial_i(E_iD_k + B_iH_k - 3\delta_{ik}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})) + \partial_k(E_iD_k + B_iH_k - 3\delta_{ik}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})))/2 = \partial_t\mathbf{p} + \nabla(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V})$$

или $$\partial_t(\mathbf{g}^A + \mathbf{g}^M)/2 - (\partial_i(E_iD_k + B_iH_k - 3\delta_{ik}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})) + \partial_k(E_iD_k + B_iH_k - 3\delta_{ik}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})))/2 = \partial_t\mathbf{p} + \nabla(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}), \tag{9}$$

где m – плотность массы зарядов; **p** – плотность механического импульса; **V** – скорость зарядов.

Если диэлектрическая среда описывается каноническими материальными уравнениями со скалярными ε и μ, то недиагональные компоненты тензора напряжений t_{ik} равны нулю, а электромагнитные силы, действующие на среду, определяются только его диагональными компонентами. Тогда уравнения (8) и (9) можно записать в виде:

$$\frac{\varepsilon\cdot\varepsilon_0}{c}\partial_t E^2 + c\cdot\nabla\cdot(\varepsilon\cdot\varepsilon_0\mathbf{E}\times\mathbf{B} + (\mathbf{E}\times\mathbf{B})/\mu\cdot\mu_0\cdot c^2)/2 = \partial_t m + \nabla\cdot\mathbf{p} \tag{10}$$

$$\partial_t(\mathbf{g}^A + \mathbf{g}^M)/2 - \nabla(\varepsilon\cdot\varepsilon_0\cdot E^2 - 2\cdot B^2/\mu\cdot\mu_0)/2 = \partial_t\mathbf{p} + \nabla(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}) \tag{11}$$

Запишем трехмерные уравнения сохранения энергии и импульса для проводящей среды (для плотности зарядов и токов):

$$\frac{1}{c^2}\partial_t(\varphi\cdot\rho) + (\nabla\cdot(\rho\cdot\mathbf{A}) + \frac{1}{c^2}\nabla\cdot(\varphi\cdot\mathbf{J}))/2 = \partial_t m + \nabla\cdot\mathbf{p} \tag{12}$$

$$(\frac{1}{c^2}\partial_t(\varphi\cdot\mathbf{J}) + \partial_t(\rho\cdot\mathbf{A}) + \partial_i(\mathbf{A}_i\otimes\mathbf{J}_k) + \partial_k(\mathbf{A}_i\otimes\mathbf{J}_k))/2 = \partial_t\mathbf{p} + \nabla(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}) \tag{13}$$

Уравнения (10) и (12) являются полными уравнениями сохранения энергии, а уравнения (9), (11) и (13) являются уравнениями баланса плотности электромагнитных и механических сил. Уравнения (12) и (13) могут найти применение в физике плазмы для моделирования движения заряженных частиц в электромагнитном поле.

5 Заключение

Существующее мнение о нарушения закона сохранения момента импульса при описании взаимодействия электромагнитного поля со средой несимметричным ТЭИ является ошибочным. Полная дивергенция тензора второго ранга равна сумме дивергенций по каждому из его индексов. В полную дивергенцию несимметричного ТЭИ входит только его симметричная часть, т.е. симметричный ТЭИ, а полная дивергенция его антисимметричной части тождественно равна нулю. При этом момент импульса сохраняется, так как уравнение сохранения импульса следует из симметричного ТЭИ. Получены полные формы электромагнитных импульсов для диэлектрической и проводящей среды и полные уравнения сохранения энергии и импульса. Показано, что линейный инвариант ТЭИ Минковского для вакуума не совпадает с квадратичным инвариантом электромагнитного поля. Это указывает на неправильность линейного инварианта ТЭИ Минковского и трехмерного тензора напряжений.

Литература

1. I. Brevik, *Minkowski momentum resulting from a vacuum–medium mapping procedure, and a brief review of Minkowski momentum experiments*, Annals of Physics 377 (2017) 10–21.
2. Rodrigo Medina and J. Stephany, *The energy-momentum tensor of electromagnetic fields in matter*, arXiv:1703.02109.
3. Mario G. Silveirinha, *Revisiting the Abraham-Minkowski Dilemma*, arXiv: 1702.05919.
4. Yu. A. Spirichev, *A new form of the energy-momentum tensor of the interaction of an electromagnetic field with a non-conducting medium. The wave equations. The electromagnetic forces*, arXiv: 1704.03815.
5. Yu. A. Spirichev, *About the Abraham force in a conducting medium*, arXiv: 1707.008642.
6. J. J. Bisognano, *Electromagnetic Momentum in a Dielectric: a Back to Basics Analysis of the Minkowski-Abraham Debate*, arXiv: 1701.08683.
7. Yu. A. Spirichev, *Electromagnetic energy, momentum and forces in a dielectric medium with losses*, arXiv: 1705.08447.
8. M. E. Crenshaw, *The Role of Conservation Principles in the Abraham--Minkowski Controversy*, arXiv: 1604.01801.
9. C. Wang, “Is the Abraham electromagnetic force physical?” Optik, (2016) 127, 2887–2889.
10. P. L. Saldanha, J. S. Oliveira Filho, *Hidden momentum and the Abraham-Minkowski debate*, arXiv: 1610.05785.
11. M. Testa, *A Comparison between Abraham and Minkowski Momenta*, Journal of Modern Physics, 2016, 7, 320-328.
12. C.J. Sheppard, B.A. Kemp, Phys. Rev. A 93 (2016) 053832.
13. I. N. Toptygin, K. Levina, Phys. Usp. **59** 141 (2016)
14. V. V. Nesterenko, A. V. Nesterenko, *Ponderomotive forces in electrodynamics of moving medium: The Minkowski and Abraham approaches*, arXiv: 1604.01708
15. V. V. Nesterenko and A. V. Nesterenko, J. Math. Phys. 57, 032901 (2016).
16. V. V. Nesterenko and A. V. Nesterenko, J. Math. Phys. 57, 092902 (2016).

17. C. Wang, J. Ng, M. Xiao, C.T. Chan, Sci. Adv. 2 (2016) e1501485.
18. H. Choi, M. Park, D. S. Elliott, K. Oh, *Optomechanical Measurement of the Abraham Force in an Adiabatic Liquid Core Optical Fiber Waveguide*, arXiv: 1501.05225.
19. L. Zhang, W. She, N. Peng, U. Leonhardt, New J. Phys. 17 (2015) 053035
20. G. Verma and K. P. Singh, Phys. Rev. Lett. 115, 143902 (2015)
21. S.M. Barnett, R. Loudon, New J. Phys. 17 (2015) 063027.
22. B.A. Kemp, Progr. Opt. 60 (2015) 437.
23. I. Brevik, *Explanation for the transverse radiation force observed on a vertically hanging fiber*, arXiv: 1401.6545.
24. I. Brevik, Trans. Roy. Norw. Soc. Sci. Lett. (3) (2014) 83. arXiv: 1310.3684 [quant-ph].
25. U. Leonhardt, Phys. Rev. A 90 (2014) 033801.
26. N.G.C. Astrath, L.C. Malacarne, M.L. Baesso, G.V.B. Lukasievicz, S.E. Bialkowski, Nature Commun. **5** (2014) 4363.
27. T. Ramos, G. F. Rubilar and Yu. N. Obukhov, *First principles approach to the Abraham-Minkowski controversy for the momentum of light in general linear non-dispersive media*, arXiv: 1310.0518.
28. Yu. N. Obukhov, *First principles approach to the Abraham-Minkowski controversy for the momentum of light in general linear non-dispersive medium*, arXiv: 1310.0518v2.
29. M. Testa, Ann. Phys. (NY) 336 (2013).
30. N.S. Aanensen, S.E. Ellingsen, I. Brevik, Phys. Scr. 87 (2013) 055402.
31. M. Mansuripur, A.R. Zakharian, E.M. Wright, Phys. Rev. A 88 (2013) 023826.
32. I. Brevik and S. E. Ellingsen, *Detection of the Abraham force with a succession of short optical pulses*, Phys. Rev. A 86, 025801 (2012).
33. D. J. Griffiths, Amer. J. Phys. 80 (2012) 7.
34. V. P. Makarov and A.A. Rukchadze, Phys. Usp. **54** 1285 (2011)
35. V. G. Veselago, Phys. Usp. **54** 1161 (2011)
36. M.E. Crenshaw and T.B. Bahder, *Energy-momentum tensor of the electromagnetic field in a dielectric*, Opt. Comm. 284 (2011) 2460-2465.
37. Pablo L. Saldanha, *Division of the Energy and of the Momentum of Electromagnetic Waves in Linear Medium into Electromagnetic and Material Parts*, arXiv: 1102.0491
38. B.A. Kemp, J. Appl. Phys. 109 (2011) 111101.
39. G.L.J.A. Rikken, B.A. van Tiggelen, Phys. Rev. Lett. 107 (2011) 170401.
40. I. Brevik and S.E. Ellingsen, Ann. Phys. 326 (2011) 754.
41. R. Wunenburger, B. Issenmann, E. Brasselet, C. Loussert, V. Houstane, J.P. Delville, J. Fluid Mech. 666 (2011) 273.
42. V. G. Veselago and V. V. Shchavlev, Phys. Usp. **53** 317 (2010)

43. M.V. Davidovich, Phys. Usp. **53** 595 (2010)
44. S. Barnett, *Resolution of the Abraham-Minkowski dilemma*, Phys. Rev. Lett. 104 (2010) 070401.
45. P.L. Saldanha, *Division of the momentum of electro- magnetic waves in linear medium into electromagnetic and material parts*, Optics Express 18 (2010) 2258-2268.
46. M. Mansuripur, *Resolution of the Abraham-Minkowski contro*versy, Opt. Comm. 283 (2010) 1997-2005.
47. I. Brevik and S. E. Ellingsen, *Transverse radiation force in a tailored optical fiber*, Phys. Rev. A (R) 81, 011806 (2010)
48. S.M. Barnett, R. Loudon, Phil. Trans. R. Soc. A 368 (2010) 927.
49. C. Baxter, R. Loudon, J. Modern Opt. 57 (2010) 830.
50. S.M. Barnett, Phys. Rev. 104 (2010) 070401.
51. P.W. Milonni, R.W. Boyd, Adv. Opt. Photonics 2 (2010) 519.
52. M. Abragam, Be.Circ. mat. Palermo **28**, 1 (1909); **31**, 527 (1910).
53. F.J. Belinfante, *Physica* **6**, 887 (1939).
54. L.P. Pitaevskii, Sov. Phys. JETP 12 1008 (1961).
55. V.G. Polevoi, S.M. Rytov, Sov. Phys. Usp. **21** 630 (1978).
56. Yu. N. Obukhov Ann. Phys. **17** 9/10 830 (2008).
57. V.P. Makarov, A.A. Rukchadze, Phys. Usp. **54** 1285 (2011).
58. V. L. Ginzburg, Sov. Phys. Usp. **16** 434 (1973)
59. V. L. Ginzburg and V. A. Ugarov, Sov. Phys. Usp. **19** 94 (1976)]
60. Yu. A. Spirichev, *Equation for the Abraham force in non-conducting medium and methods for its measurement*, arXiv: 1704.03368.
61. A. Feigel, Phys. Rev. Lett. 93, 268904 (2004).
62. K. Yu. Bliok and F. Nori, Transverse and longitudinal angular momenta of Light, arXiv: 1504.03113.
63. O. A. Croze, Does the Feigel effect break the first law?, arXiv: 1304.3338.
64. Yu. N. Obukhov and F. W. Hehl, Forces and momenta caused by electromagnetic waves in magnetoelectric media, arXiv: 0710.2219.
65. O. J. Birkeland and Iver Brevik, On the Feigel effect: extraction of momentum from vacuum? arXiv: 0707.2528.
66. G.L.J.A. Rikken and B.A. van Tiggelen, Magneto-electric momentum transfer to atoms and molecules, arXiv: 1107.5284.

67. K. Yu. Bliokh and Yu. P. Bliokh, Conservation of Angular Momentum, Transverse Shift, and Spin Hall Effect in Reflection and Refraction of Electromagnetic Wave Packet, arXiv: 0508.093.
68. L. D. Landau and E. M. Lifshits, *The Classical Theory of Fields* (Oxford: Pergamon Press, 1983).
69. J.D. Jackson, Classical electrodynamics, (Wiley, New York, 1975).
70. A. Zommerfeld, *Electrodinamix*, (M. 1958).