About asymmetric, symmetric and antisymmetric tensors of the electromagnetic field and Maxwell's equations

Yurii A. Spirichev

The State Atomic Energy Corporation ROSATOM, "Research and Design Institute of Radio-Electronic Engineering" - branch of Federal Scientific-Production Center "Production Association "Start" named after Michael V.Protsenko", Zarechny, Penza region, Russia

E-mail: yurii.spirichev@mail.ru

(Dated: August 6, 2017)

Abstract

The asymmetric and symmetric tensors can be associated with to the electromagnetic field (EMF) canonical antisymmetric tensor. From these tensors, in the form of their divergences, new EMF equations of follow. The introduction of field sources into Maxwell's equations is mathematically incorrect, since these equations are a four-dimensional divergence with respect to one of the indices of the four-dimensional rotor (antisymmetric tensor). The total divergence of the antisymmetric EMF tensor is equal to the sum of divergences for each of its indices. These divergences have different signs, and their sum is identically zero. Thus, EMF sources can only be attributed to the total divergence of asymmetric or symmetric EMF tensors, the full divergences of which can be non-zero. As a result, it can be argued that Maxwell's equations do not carry a real physical meaning and should be replaced by field equations that follow in the form of a four-dimensional divergence from the symmetric EMF tensor. Only these EMF equations can be attributed to the field sources. These equations represent a new complete system of EMF equations, replacing the system of Maxwell's equations. From the symmetric EMF tensor follows the dynamic Navier-Stokes equation for the vector potential showing the unity of the field and the continuum.

Keywords: Electromagnetic field, asymmetric tensor, symmetric tensor, antisymmetric tensor, Maxwell equations

О несимметричном, симметричном и антисимметричном тензорах электромагнитного поля и уравнениях Максвелла

Юрий А. Спиричев

Государственная корпорация по атомной энергии "Росатом". Научно-исследовательский и конструкторский институт радиоэлектронной техники – филиал федерального государственного унитарного предприятия федерального научно-производственного центра «Производственное объединение «Старт» имени М.В. Проценко»

E-mail: yurii.spirichev@mail.ru

Аннотация

Канонический антисимметричный тензор электромагнитного поля (ЭМП) можно связать с несимметричным и симметричным тензорами ЭМП. Из этих тензоров, в виде их дивергенций, следуют новые уравнения ЭМП. Введение источников поля в уравнения Максвелла является математически некорректным, так как эти уравнения являются четырехмерной дивергенцией по одному из индексов четырехмерного ротора (антисимметричного тензора). Полная дивергенция антисимметричного тензора ЭМП равна сумме дивергенций по каждому из его индексов. Эти дивергенции имеют разные знаки а их сумма тождественно равна нулю. Таким образом, источники ЭМП можно приписать только к полным дивергенциям несимметричного или симметричного тензоров ЭМП, полные дивергенции которых могут быть не равными нулю. В результате можно утверждать, что уравнения Максвелла не несут реального физического смысла и должны быть заменены уравнениями поля, вытекающими в виде четырехмерной дивергенции из симметричного тензора ЭМП. Только в эти уравнения ЭМП можно ввести источники поля. Эти уравнения представляют собой новую полную систему уравнений ЭМП, заменяющую систему уравнений Максвелла. Из симметричного тензора ЭМП следует динамическое уравнение Навье-Стокса для векторного потенциала, показывающее единство поля и сплошной среды.

Ключевые слова: Электромагнитное поле, несимметричный тензор, симметричный тензор, антисимметричный тензор, уравнения Максвелла.

Содержание

1. Введение

В электродинамике электромагнитное поле (ЭМП) описывается каноническим антисимметричным тензором второго ранга [1]:

$$F_{[\mu\nu]} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu \tag{1}$$

где $\mathbf{A}_\nu$ – четырехмерный электромагнитный потенциал, а ∂_μ - оператор четырехмерного дифференцирования. Компонентами антисимметричного тензора $F_{[\mu\nu]}$ являются производные скалярного φ и векторного **A** потенциалов ЭМП, которые определены в этом тензоре как компоненты электрического **E** и магнитного **B** поля. Из этого тензора в виде его четырехмерной дивергенции следуют трехмерные уравнения Максвелла:

$$-\partial_t \nabla\cdot\mathbf{A} - \Delta\varphi = \rho/\varepsilon_0 \qquad \text{или} \qquad \nabla\cdot\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0 \tag{2}$$

$$\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\partial_t\nabla\varphi + \nabla\times\nabla\times\mathbf{A} = \mu_0\cdot\mathbf{J} \qquad \text{или} \qquad \nabla\times\mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\partial_t\mathbf{E} = \mu_0\cdot\mathbf{J} \tag{3}$$

где ρ – плотность зарядов; **J** – плотность тока. В эти уравнения источники поля ρ и **J** введены вручную, исходя из общих соображений, и теоретического обоснования это действие не имеет.

Описание ЭМП в виде антисимметричного тензора (1) можно дополнить симметричным и несимметричным тензорами [2], следующими из разложения несимметричного тензора второго ранга на симметричную и антисимметричную части $F_{\mu\nu} = F_{[\mu\nu]}/2 + F_{(\mu\nu)}/2$. Компонентами симметричного $F_{(\mu\nu)}$ и несимметричного $F_{\mu\nu}$ тензоров также являются производные скалярного и векторного потенциалов ЭМП. Из этих тензоров, в виде их четырехмерных дивергенций, также следуют уравнения поля, в частности, из симметричного тензора $F_{(\mu\nu)}$ следует уравнение Навье - Стокса для векторного потенциала **A**, а из несимметричного тензора $F_{\mu\nu}$ следуют уравнения Максвелла в калибровке Лоренца и производные калибровочного условия Лоренца [2]. Таким образом, введение в электродинамику несимметричного $F_{\mu\nu}$ и симметричного $F_{(\mu\nu)}$ тензоров, связанных с каноническим антисимметричным тензором ЭМП (1), расширяет возможности описания ЭМП. Одновременно с введением этих новых тензоров ЭМП возникают вопросы, ответы на которые заставляют пересмотреть устоявшиеся взгляды на теорию ЭМП.

В трехмерной векторной алгебре существует векторное тождество, по которому дивергенция ротора тождественно равна нулю. Это векторное тождество применяется в электродинамике и известно как уравнение Максвелла для магнитной индукции $\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$. В соответствии с этим тождеством магнитное поле не имеет источников. Антисимметричный тензор ЭМП (1) также является четырехмерным ротором, а уравнения Максвелла (2) и (3) находятся в виде его четырехмерной дивергенции по одному из индексов тензора. Этой четырехмерной дивергенции вручную приписывается четырехмерный источник поля в виде четырехмерной плотности тока. Полная дивергенция тензора второго ранга равна сумме дивергенций по каждому из его индексов. У антисимметричного тензора второго ранга эти дивергенции равны по абсолютной величине и противоположны по знаку, а их сумма тождественно равна нулю. Таким образом, полная дивергенция антисимметричного тензора второго ранга принципиально не имеет источников. Дивергенция антисимметричного тензора по одному из индексов не имеет физического смысла, так как обе его дивергенции существуют одновременно. Этот казус заставляет проанализировать как сами уравнения Максвелла (2) и (3), так и правомерность введения в них источников ЭМП. Введение в электродинамику несимметричного и симметричного тензоров ЭМП и следующих из них новых уравнений поля позволяет решить проблему введения источников в уравнения ЭМП и изменяет существующий взгляд на уравнения Максвелла.

Целью настоящей статьи является анализ тензоров ЭМП и математически корректное решение проблемы введения источников поля в уравнения ЭМП.

ЭМП рассматривается в вакууме. Геометрия пространства-времени принимается в виде псевдоевклидова пространства Минковского (ct, ix, iy, iz) [3]. Полагается, что в пространстве существует четырехмерный электромагнитный потенциал, определяемый как $\mathbf{A}_\nu(\varphi/c, i\mathbf{A})$, где φ и A скалярный и векторный потенциалы ЭМП.

2. Несимметричный, симметричный и антисимметричный тензоры электромагнитного поля

Несимметричный тензор второго ранга $F_{\mu\nu}$ получим четырехмерным дифференцированием электромагнитного потенциала $F_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu$. Несимметричный тензор ЭМП $F_{\mu\nu}$ в матричном представлении имеет вид:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu = \begin{pmatrix} \frac{1}{c^2}\partial_t\varphi & \frac{1}{c}i\cdot\partial_t A_x & \frac{1}{c}i\cdot\partial_t A_y & \frac{1}{c}i\cdot\partial_t A_z \\ -\frac{1}{c}i\cdot\partial_x\varphi & \partial_x A_x & \partial_x A_y & \partial_x A_z \\ -\frac{1}{c}i\cdot\partial_y\varphi & \partial_y A_x & \partial_y A_y & \partial_y A_z \\ -\frac{1}{c}i\cdot\partial_z\varphi & \partial_z A_x & \partial_z A_y & \partial_z A_z \end{pmatrix} \tag{4}$$

Операциями альтернирования и симметрирования его можно однозначно разложить на симметричный и антисимметричный тензоры ЭМП:

$$F_{\mu\nu} = F_{[\mu\nu]}/2 + F_{(\mu\nu)}/2 = \frac{1}{2}(\partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \mathbf{A}_\nu + \partial_\nu \mathbf{A}_\mu) \tag{5}$$

Канонический антисимметричный тензор ЭМП $F_{[\mu\nu]}$ в матричном представлении имеет вид

$$F_{[\mu\nu]} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_x + \partial_x\varphi) & \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_y + \partial_y\varphi) & \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_z + \partial_z\varphi) \\ -\frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_x + \partial_x\varphi) & 0 & (\partial_x A_y - \partial_y A_x) & (\partial_x A_z - \partial_z A_x) \\ -\frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_y + \partial_y\varphi) & -(\partial_x A_y - \partial_y A_x) & 0_y & (\partial_y A_z - \partial_z A_y) \\ -\frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_z + \partial_z\varphi) & -(\partial_x A_z - \partial_z A_x) & -(\partial_y A_z - \partial_z A_y) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}i\cdot E_x & -\frac{1}{c}i\cdot E_y & -\frac{1}{c}i\cdot E_z \\ \frac{1}{c}i\cdot E_x & 0 & B_z & -B_y \\ \frac{1}{c}i\cdot E_y & -B_z & 0 & B_x \\ \frac{1}{c}i\cdot E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

В этом тензоре напряженность электрического поля **E** и индукция магнитного поля **B** выражаются (в системе СИ) в виде:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \partial_t \mathbf{A} \qquad \mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A} = (\partial_y A_z - \partial_z A_y)_x + (\partial_z A_x - \partial_x A_z)_y + (\partial_x A_y - \partial_y A_x)_z \tag{7}$$

Аналогично запишем в матричном виде и симметричный тензор ЭМП $F_{(\mu\nu)}$:

$$F_{(\mu\nu)} = \begin{pmatrix} 2\frac{1}{c^2}\partial_t\varphi & \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_x - \partial_x\varphi) & \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_y - \partial_y\varphi) & \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_z - \partial_z\varphi) \\ \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_x - \partial_x\varphi) & 2\partial_x A_x & (\partial_x A_y + \partial_y A_x) & (\partial_x A_z + \partial_z A_x) \\ \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_y - \partial_y\varphi) & (\partial_x A_y + \partial_y A_x) & 2\partial_y A_y & (\partial_y A_z + \partial_z A_y) \\ \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_z - \partial_z\varphi) & (\partial_x A_z + \partial_z A_x) & (\partial_y A_z + \partial_z A_y) & 2\partial_z A_z \end{pmatrix} \qquad (8)$$

В этом симметричном тензоре ЭМП комбинации потенциалов вида (7) отсутствуют, т.е. в нем отсутствует описание электрического и магнитного поля. Новым комбинациям потенциалов можно присвоить новые обозначения и наименования.

Симметричный тензор ЭМП $F_{(\mu\nu)}$, по аналогии с механикой сплошных сред, можно рассматривать как тензор четырехмерной деформации ЭМП.

3. Новые уравнения электромагнитного поля

Сначала рассмотрим уравнения ЭМП без источников. Эти уравнения следуют из тензоров ЭМП (1), (3) и (4) в виде их четырехмерных дивергенций. Тензор второго ранга имеет дивергенции по каждому из индексов (для выбранной формы записи можно не различать ковариантные и контравариантные индексы):

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = 0 \qquad \text{и} \qquad \partial_\nu F_{\mu\nu} = 0 \qquad (8)$$

Запишем эти уравнения поля в развернутом виде:

$$\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\varphi - \Delta\varphi = 0 \qquad (9) \qquad\qquad \frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A} = 0 \qquad (10)$$

$$\partial_t(\frac{1}{c^2}\partial_t\varphi + \nabla\cdot\mathbf{A}) = 0 \qquad (11) \qquad\qquad -\nabla(\frac{1}{c^2}\partial_t\varphi + \nabla\cdot\mathbf{A}) = 0 \qquad (12)$$

Уравнения (9) и (10) являются каноническими волновыми уравнениями Даламбера [4] для потенциалов ЭМП, которые часто называют уравнениями Максвелла в калибровке Лоренца. В данном случае эти уравнения без дополнительных условий, в виде калибровки Лоренца, следуют из несимметричного тензора ЭМП (4). Уравнения (11) и (12) являются производными калибровочного условия Лоренца $\partial_t\varphi / c^2 + \nabla\cdot A = 0$.

Из канонического антисимметричного тензора $F_{[\mu\nu]}$ (6) следуют уравнения Максвелла (2) и (3) без источников поля (правые части уравнений равны нулю).

Из симметричного тензора $F_{(\mu\nu)}$ следуют новые уравнения поля [2], описывающие четырехмерную деформацию ЭМП в пространстве Минковского,:

$$(\partial_\mu F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\mu\nu})/2 = 0 \qquad \text{или} \qquad \partial_\mu F_{(\mu\nu)} = 0$$

В развернутой форме эти уравнения имеют вид:

$$2\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\varphi + \partial_t \nabla \cdot \mathbf{A} - \Delta\varphi = 0 \quad (13)$$

$$\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\partial_t \nabla\varphi - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A} = 0 \quad (14)$$

Уравнение (14) является электромагнитным аналогом уравнения движения изотропной упругой среды [5], известного как динамическое уравнение Навье-Стокса (или уравнение Ламе). Здесь это уравнение показывает общность законов движения всех видов материи.

Таким образом, из тензоров ЭМП (4), (6) и (8) следуют уравнения (2), (3), (9) – (14). В связи с тем, что в этих уравнениях существует только четыре неизвестных величины (скалярный потенциал φ и три компоненты векторного потенциала А) количество уравнений поля является избыточным. Поскольку симметричный $F_{(\mu\nu)}$ и антисимметричный $F_{[\mu\nu]}$ тензоры являются составными частями несимметричного тензора ЭМП $F_{\mu\nu}$ (4), то этот тензор содержит всю информацию, имеющуюся в тензорах $F_{(\mu\nu)}$ и $F_{[\mu\nu]}$. Поэтому рассмотрим несимметричный тензор $F_{\mu\nu}$ более подробно. Из него следуют две различные четырехмерные дивергенции (8), существующие одновременно. Поэтому полная дивергенция тензора $F_{\mu\nu}$ равна сумме этих двух частных дивергенций $\partial_\mu F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\mu\nu} = 0$. Рассмотрим полную дивергенцию канонического антисимметричного тензора $F_{[\mu\nu]}$ (1). Частные дивергенции этого тензора по каждому из индексов равны по абсолютной величине и противоположны по знаку. Поэтому полная дивергенция антисимметричного тензора $F_{[\mu\nu]}$ тождественно равна нулю. Из этого следует, что полной дивергенции антисимметричного тензора нельзя приписать источник. Из этого следует, что полная дивергенция несимметричного тензора ЭМП $F_{\mu\nu}$ равна только дивергенции симметричного тензора ЭМП $F_{(\mu\nu)}$, т.е. уравнениям (13) и (14). Таким образом, источник поля в виде четырехмерной плотности тока $\mathbf{J}_\mu$ необходимо приписать полной дивергенции несимметричного тензора ЭМП $F_{\mu\nu}$ или дивергенции симметричного тензора ЭМП $F_{(\mu\nu)}$ по любому из индексов:

$$(\partial_\mu F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\mu\nu})/2 = \mathbf{J}_\mu \qquad \text{или} \qquad \partial_\mu F_{(\mu\nu)} = \mathbf{J}_\mu$$

В развернутой форме эти уравнения с источниками имеют вид:

$$2\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\varphi + \partial_t \nabla \cdot \mathbf{A} - \Delta\varphi = \rho / \varepsilon_0 \quad (15)$$

$$\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\partial_t \nabla\varphi - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A} = \mu_0 \cdot \mathbf{J} \quad (16)$$

Уравнения (15) и (16) заменяют уравнения Максвелла. Уравнение (15) заменяет уравнение (2), описывающее закон Гаусса для электрического поля, а уравнение (16) заменяет уравнение полного тока Ампера-Максвелла (3). Уравнение (16) можно записать в виде:

$$\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\partial_t\nabla\varphi-2\cdot\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})+\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}=\mu_0\cdot\mathbf{J} \tag{17}$$

В этой форме записи четвертый член представляет собой ротор магнитного поля. Для статического случая уравнения (15) и (17) можно записать в виде:

$$-\Delta\varphi=\rho/\varepsilon_0 \quad (18) \qquad -2\cdot\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})+\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}=\mu_0\cdot\mathbf{J} \quad (19)$$

Уравнение (18) для статического случая совпадает с уравнением Максвелла (2) и также описывает закон Гаусса для постоянного потенциального электрического поля. Уравнение (19) отличается от уравнения Максвелла для стационарного случая наличием первого члена с дивергенцией векторного потенциала. Этот член представляет собой градиент гипотетического «скалярного (потенциального) магнитного поля» Николаева [6, 7]. Это гипотетическое «скалярное магнитное поле» эмпирически введено Николаевым в уравнение Ампера-Максвелла (3) для объяснения продольного взаимодействия между стационарными токами и для обеспечения соблюдения третьего закона Ньютона в электродинамике. Уравнение (19) с точностью до постоянного коэффициента первого члена совпадает с уравнением, приведенным Николаевым Г.В. [6] и Томилиным А.К. [7]. В этих работах уравнение (19) построено эмпирически на основе опытных результатов путем дополнения уравнения Ампера-Максвелла. Здесь уравнение (19) получено математически строго, как следствие дивергенции симметричного тензора ЭМП $F_{(\mu\nu)}$. Уравнение (16) является волновым уравнением для электромагнитного поля, т.е. оно описывает электромагнитное излучение. Взяв ротор от обеих частей уравнения (16), получим из него каноническое волновое уравнение для магнитной индукции **B** [4]:

$$\frac{1}{c^2}\partial_{tt}(\nabla\times\mathbf{A})+\Delta(\nabla\times\mathbf{A})=\mu_0\cdot\nabla\times\mathbf{J} \quad \text{или} \quad \frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{B}+\Delta\mathbf{B}=\mu_0\cdot\nabla\times\mathbf{J}$$

Левая, полевая часть уравнений (15) и (16) получена математически строго из аксиомы о существовании четырехмерного электромагнитного потенциала $\mathbf{A}_\nu$. В правые части этих уравнений источники поля введены вручную и не имеют достаточного теоретического обоснования. В связи с этим, правая часть уравнений (15) и (16) в дальнейшем может быть изменена при получении для этого достаточных оснований. Уравнения (15) и (16) представляют собой полную систему уравнений электромагнитного поля, заменяющую систему уравнений Максвелла. Уравнение (16) аналогично динамическому уравнению

Навье-Стокса, описывающему динамику движения сплошной среды. Такая аналогия позволяет рассматривать поле четырехмерного электромагнитного потенциала $\mathbf{A}_\nu$ как физическую среду, в которой распространяются электромагнитные волны (16), вызванные динамической деформацией этой среды. Таким образом, поле электромагнитного потенциала $\mathbf{A}_\nu$ можно гипотетически идентифицировать как «физический вакуум» или «эфир».

4. Заключение

Канонический антисимметричный тензор ЭМП можно связать с несимметричным и симметричным тензорами ЭМП, из которых в виде их дивергенций следуют уравнения ЭМП. Введение источников поля в уравнения Максвелла является математически некорректным, так как эти уравнения являются частной четырехмерной дивергенцией четырехмерного ротора (антисимметричного тензора второго ранга) по одному из индексов. Полная дивергенция антисимметричного тензора ЭМП равна сумме частных дивергенций по каждому из его индексов, имеющих разные знаки и тождественно равна нулю. Из этого следует, что источники ЭМП (заряды и токи) можно приписать только полным дивергенциям несимметричного или симметричного тензоров ЭМП, полные дивергенции которых не равны нулю. В результате можно утверждать, что уравнения Максвелла не несут физического смысла, а ЭМП описывается системой уравнений, вытекающей из симметричного тензора ЭМП. Следовательно, теория ЭМП требует пересмотра.

Литература

1 Рубаков В А Классические калибровочные поля (М.: «Эдиториал УРСС», 1999)

2 Yurii A. Spirichev, Symmetric and asymmetric tensors of the electromagnetic field, viXra: 1612.0405.

3 Тоннела М-А Основы электромагнетизма и теории относительности (М.: Издательство иностранной литературы, 1962)

4 Ландау Л Д , Лифшиц Е М Теория поля (М.: «ФИЗМАТЛИТ», 2003)
Landau L D, Lifshits E M The Classical Theory of Fields (Oxford: Pergamon Press, 1983)

5 Ландау Л Д, Лифшиц Е М Теория упругости (М.: «Наука», 1973)
Landau L D, Lifshits E M The Theory of elasticity (Oxford: Pergamon Press, 1983)

6 Николаев Г В Непротиворечивая электродинамика. Теории, эксперименты, парадоксы (Томск, Издательство НТЛ, 1997)

7 Томилин А К Обобщенная электродинамика (Усть-Каменогорск, ВКГТУ, 2009)