Zeta function and infinite sums

François MENDZINA ESSOMBA

Résumé

Je suis arrivé à la conclusion, après avoir achevé une première réflexion sur les sommes infinies, que toutes les fonctions qui s'écrivent sous la forme d'une somme infinie s'écrivent en fonction de la fameuse fonction zeta, ce constat est explicitément présenté dans cet article .

I have come to the conclusion, after finishing a first reflection on infinite sums, that all the functions which are written in the form of an infinite sum are written according to the famous Zeta function, this statement is explicitly presented in this article.

soit f une fonction réelle définie dans R ou dans C.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x^{\beta n} \quad ; \beta, \lambda_n \in R. \tag{1}$$

Nous avons :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x^{\beta k} \quad ; \quad f(\frac{x}{2}) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \frac{x^{\beta n}}{2^{\beta n}} \quad ; \quad f(\frac{x}{3}) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \frac{x^{\beta n}}{3^{\beta n}} \quad ;$$

$$f(\frac{x}{4}) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \frac{x^{\beta n}}{4^{\beta n}} \quad ; \cdots ; \quad f(\frac{x}{p}) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \frac{x^{\beta n}}{p^{\beta n}} \quad ; \cdots ;$$

si nous procédons à la somme toutes les sommes :

$$\begin{aligned} f(x) + f(\frac{x}{2}) + f(\frac{x}{3}) + f(\frac{x}{4}) + \cdots + f(\frac{x}{p}) + \cdots &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x^{\beta n} + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \frac{x^{\beta n}}{2^{\beta n}} + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \frac{x^{\beta n}}{3^{\beta n}} \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \frac{x^{\beta n}}{4^{\beta n}} + \cdots + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \frac{x^{\beta k}}{p^{\beta n}} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x^{\beta n} \left(1 + \frac{1}{2^{\beta n}} + \frac{1}{3^{\beta n}} + \frac{1}{4^{\beta n}} + \cdots + \frac{1}{p^{\beta n}} + \cdots \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x^{\beta n} \zeta(\beta n) \end{aligned}$$

nous en déduisons de ce qui précède que :

$$f(x) - f(\frac{x}{2}) + f(\frac{x}{3}) - f(\frac{x}{4}) + \cdots + (-1)^{p+1} f(\frac{x}{p}) + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x^{\beta n} \left(1 - \frac{1}{2^{\beta n}} + \frac{1}{3^{\beta n}} - \frac{1}{4^{\beta n}} + \cdots + (-1)^{p+1} \frac{1}{p^{\beta n}} + \cdots\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x^{\beta n} \eta(\beta n) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x^{\beta n} \eta(1 - 2^{1-\beta n}) \zeta(\beta n)$$

Ce qui nous donnera finalement :

$$\sum_{p=1}^{\infty} f(\frac{x}{p}) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x^{\beta n} \zeta(\beta n) \tag{2}$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p+1} f(\frac{x}{p}) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x^{\beta n} (1 - 2^{1-\beta n}) \zeta(\beta n) \tag{3}$$

les sommes impliquant les zéta négatifs :
reprenons la somme (1) vue plus haut et cette fois procédons en usant de multiples : Nous avons :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x^{\beta k} \quad ; \quad f(2x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \frac{x^{\beta n}}{2^{-\beta n}} \quad ; \quad f(3x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \frac{x^{\beta n}}{-3^{\beta n}} \quad ;$$

$$f(4x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \frac{x^{\beta n}}{4^{-\beta n}} \quad ; \cdots ; \quad f(px) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \frac{x^{\beta n}}{p^{-\beta n}} \quad ; \cdots ;$$

si nous procédons à la somme de tous les thermes :

$$f(x) + f(2x) + f(3x) + f(4x) + \cdots + f(\frac{x}{p}) + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x^{\beta n} + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \frac{x^{\beta n}}{2^{-\beta n}} + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \frac{x^{\beta k}}{3^{-\beta n}} + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \frac{x^{\beta n}}{4^{-\beta n}} + \cdots + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \frac{x^{\beta n}}{p^{-\beta n}} + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x^{\beta n} \left(1 + \frac{1}{2^{-\beta n}} + \frac{1}{3^{-\beta n}} + \frac{1}{4^{-\beta n}} + \cdots + \frac{1}{p^{-\beta n}} + \cdots\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x^{\beta n} \zeta(-\beta n)$$

nous en déduisons de ce qui précède que :

$$f(x) - f(2x) + f(3x) - f(4x) + \cdots + (-1)^{p+1} f(\frac{x}{p}) + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x^{\beta n} - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \frac{x^{\beta n}}{2^{-\beta n}} + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \frac{x^{\beta k}}{3^{-\beta n}} - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \frac{x^{\beta n}}{4^{-\beta n}} + \cdots + (-1)^{p+1} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \frac{x^{\beta n}}{p^{-\beta n}} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x^{\beta n} \left(1 + \frac{1}{2^{-\beta n}} + \frac{1}{3^{-\beta n}} + \frac{1}{4^{-\beta n}} + \cdots + \frac{1}{p^{-\beta n}} + \cdots \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x^{\beta n} \eta(-\beta n) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x^{\beta n} (1 - 2^{1+\beta n}) \zeta(-\beta n)$$

Ce qui nous donnera finalement :

$$\sum_{p=1}^{\infty} f(px) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x^{\beta n} \zeta(-\beta n) \tag{4}$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p+1} f(px) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x^{\beta n} (1 - 2^{1+\beta n}) \zeta(-\beta n) \tag{5}$$

présentation de cette propriété dans les fonctions usuelles :
cas de la fonctions cosinus

$$\sum_{p=1}^{\infty} \cos(\frac{x}{p}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!} \zeta(2n) \qquad \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p+1} \cos(\frac{x}{p}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!} (1 - 2^{1-2n}) \zeta(2n)$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \cos(px) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!} \zeta(-2n) \qquad \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p+1} \cos(px) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!} (1 - 2^{1+2n}) \zeta(-2n)$$

cas de la fonction sinus

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sin(\frac{x}{p}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \zeta(2n+1) \qquad \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p+1} \sin(\frac{x}{p}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n!} (1 - 2^{-2n}) \zeta(2n+1)$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sin(px) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \zeta(-2n-1)$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p+1} \sin(px) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} (1 - 2^{2+2n}) \zeta(-2n-1)$$

cas de la fonction cosinus hyperbolique :

$$\sum_{p=1}^{\infty}\cosh(\frac{x}{p})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n!}\zeta(2n) \qquad \sum_{p=1}^{\infty}(-1)^{p+1}\cosh(\frac{x}{p})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n!}(1-2^{1-2n})\zeta(2n)$$

$$\sum_{p=1}^{\infty}\cosh(px)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n!}\zeta(-2n) \qquad \sum_{p=1}^{\infty}(-1)^{p+1}\cosh(px)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n!}(1-2^{1+2n})\zeta(-2n)$$

cas de la fonction sinus hyperbolique :

$$\sum_{p=1}^{\infty}\sinh(\frac{x}{p})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\zeta(2n+1) \qquad \sum_{p=1}^{\infty}(-1)^{p+1}\sinh(\frac{x}{p})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n!}(1-2^{-2n})\zeta(2n+1)$$

$$\sum_{p=1}^{\infty}\sinh(px)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\zeta(-2n-1)$$

$$\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^{p+1}\sinh(px)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}(1-2^{2+2n})}{(2n+1)!}\zeta(-2n-1)$$

cas des fonctions exponentielles :

$$\sum_{p=1}^{\infty}\exp(\frac{x}{p})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}\zeta(n) \qquad \sum_{p=1}^{\infty}(-1)^{p+1}\exp(\frac{x}{p})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}(1-2^{1-n})\zeta(n)$$

$$\sum_{p=1}^{\infty}\exp(px)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}\zeta(-2n-1) \qquad \sum_{p=1}^{\infty}(-1)^{p+1}\exp(px)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}(1-2^{2+2n})}{n!}\zeta(-n)$$

Il en est de même pour toutes les fonctions à somme infinie, les fonctions tangentes, arc-tangente, arc-cosinus, arc-cotangente, et toutes les fonctions hypergeométriques.
Pourrai-je donc écrire :

$$\sum_{p=1}^{\infty}\cos(px)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}x^{2n}}{2n!}\zeta(-2n)=0$$

$$\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^{p+1}\cos(px)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}x^{2n}}{2n!}(1-2^{1+2n})\zeta(-2n)=0$$

$$\sum_{p=1}^{\infty}\cosh(px)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n!}\zeta(-2n)=0$$

$$\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^{p+1}\cosh(px) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n!}(1-2^{1+2n})\zeta(-2n) = 0$$

puisque $\zeta(-2n) = 0$
Interrogation ? ? ?

reférence

A] V. Adamchik, On Stirling numbers and Euler sums,J. Comput. Appl. Math.,79(1997), 119-130. [AIK] T. Arakawa, T. Ibukiyama, et M. Kaneko,Bernoulli numbers and zetafunctions, Springer Verlag, Tokyo,2014. [AK] T. Arakawa et M. Kaneko, Multiple zeta values, Poly-Bernoulli numbers andrelated zeta functions,Nagoya Math. J.,153(1999), 189-209. [B] B. C. Berndt,Ramanujan's Notebooks Part I, Springer Verlag, New York,1985. [BH] A. Bayad et Y. Hamahata, Arakawa-KanekoL-functions and generalized poly-Bernoulli polynomials,J. Number Theory,131(2011), 1020-1036. [Br] D. Broadhurst,Multiple zeta values and modular forms in quantum field theory, in Schneider et Blümlein (eds.), Computer algebra in quantum field theory, Springer Verlag, 33-73, 2013.