“光速为有限值”条件下
运动观测中“时空变换”的最简捷推导

中国社会科学院 周 方

zhoufang@cass.org.cn tony_zf_zf_zf@126.com

摘要 **伽利略变换**只在“真空中光速为无穷大”假定条件下才能够成立。**伽利略变换**描述‘互作匀速直线相对运动的两个观测者对同一运动质点的观测矢量通过两观测者之间的位置矢量形成的矢量合成关系’。笔者利用**伽利略变换**的这一性质，用最简捷的方法推导出“两观测者有相对运动且真空中光速为有限值”条件下唯一客观存在的时空变换 — **周方变换**（Z 变换）。

关键词 时空变换 伽利略变换 周方变换 Z 变换

（一）伽利略变换

设：在物理空间内 K 系的 x 轴、y 轴、z 轴中没有任何一个轴优越于另一个轴，以及 K' 系的 x' 轴、y' 轴、z' 轴中也没有任何一个轴优越于另一个轴。K' 系与 K 系之间始终保持 x' 轴平行于 x 轴，y' 轴平行于 y 轴及 z' 轴平行于 z 轴。K' 系相对于 K 系作匀速直线平移运动，相对速度为 $u = const.$。相对速度矢量 u 在 x 轴、y 轴、z 轴上的分量分别为 u_x、u_y、u_z。观测者被设置在坐标系的原点。K 系观测者和 K' 系观测者各配有时钟，而且两时钟完全同步运行。在时刻 $t' = t = 0$，K' 系原点（$x' = y' = z' = 0$）恰好经过 K 系原点（$x = y = z = 0$），这时两观测者的时钟相互对准到零点。K' 系与 K 系之间的关系示于图 1。

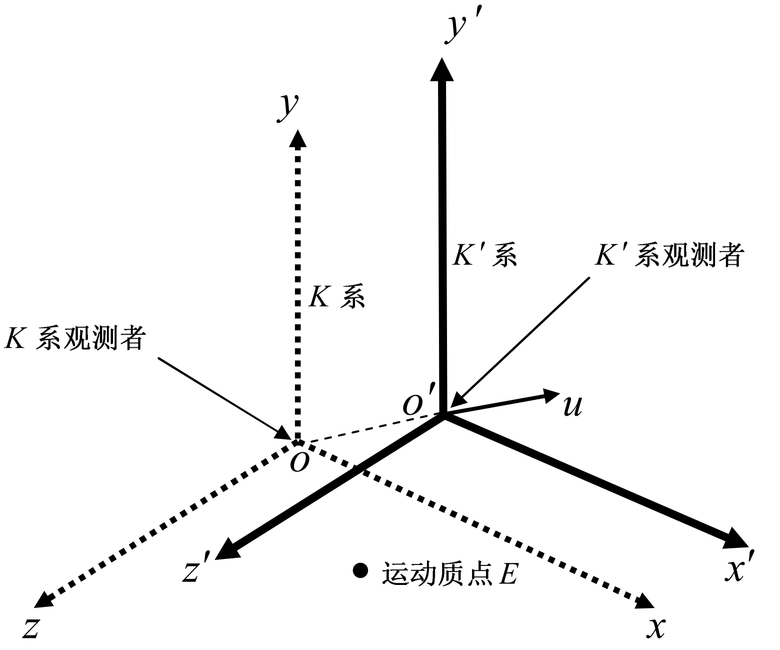


图 1 K' 系与 K 系之间的关系

观测矢量合成图示于图 2。

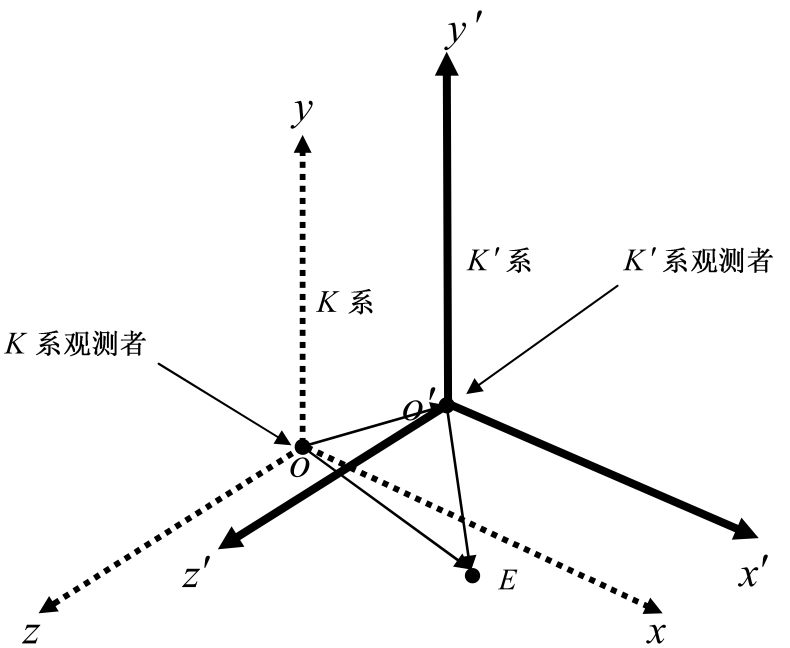


图 2 观测矢量合成图

参看图 2。

（a）K' 系观测者 O' 对 K 系观测者 O 的位置，用矢量表示，称为“位置矢量”。在时刻 t'，

K' 系观测者 O' 对 K 系观测者 O 的位置矢量为 $\overline{OO'}(t') = ut'$， $u = [u_x, u_y, u_z]^T$。

（b）观测者观测到运动质点的时刻及质点在该观测者所属参考系内的位置，即是该观测者

的“时空点”，用一个出自观测者的矢量表示，称为“观测矢量”或“时空点矢量”。在时刻t'，K'系观测者O'观测到运动质点E，这时K'系观测者O'对运动质点E的**观测矢量**（或称‘K'系观测者O'的K'系**时空点矢量**’）为$\overline{O'E}(t')=r'_{t'}$，$r'_{t'}=\left[x'_{t'},y'_{t'},z'_{t'}\right]^T$。

（c）在时刻t，K系观测者O观测到运动质点E，这时K系观测者O的观测矢量为$\overline{OE}(t)=\overline{r}_t$，$\overline{r}_t=\left[\overline{x}_t,\overline{y}_t,\overline{z}_t\right]^T$。

矢量$\overline{OO'}(t')$、矢量$\overline{O'E}(t')$与矢量$\overline{OE}(t)$满足矢量合成定律（即构成封闭的矢量合成三角形），其充要条件是$t=t'$。这就是说，只有在“真空中光速为无穷大”的条件下K系观测者O与K'系观测者O'才能够在时刻$t=t'$同时观测到运动质点E；这时，两观测者对该运动质点的观测矢量通过两观测者之间的位置矢量形成矢量合成关系，如图 2 所示。因此，可以得出结论：在$t=t'$条件下，三个时变矢量$\overline{OO'}(t')$、$\overline{O'E}(t')$、$\overline{OE}(t)$满足矢量合成定律：

$$\overline{OE}(t)=\overline{OO'}(t')+\overline{O'E}(t')$$

即：“K系观测者O的K系时空点矢量$\overline{OE}(t)$”是“K'系观测者O'对K系观测者O的位置矢量$\overline{OO'}(t')$”与“K'系观测者O'的K'系时空点矢量$\overline{O'E}(t')$”之和。

将$\overline{OE}(t)=\overline{r}_t$，$\overline{OO'}(t')=ut'$及$\overline{O'E}(t')=r'_{t'}$代入上面的矢量合成关系式，得：

$$\begin{cases}\overline{r}_t=ut'+r'_{t'}\\ t=t'\end{cases}$$

由此可见，两观测者的观测矢量$\overline{O'E}(t')$、$\overline{OE}(t)$与两观测者之间的位置矢量$\overline{OO'}(t')$所形成的矢量合成关系$\overline{OE}(t)=\overline{OO'}(t')+\overline{O'E}(t')$，$t=t'$，$\overline{OO'}(0)=\overline{O'E}(0)=\overline{OE}(0)=0$，就是**“一般伽利略变换”**：

$$\begin{cases}\overline{r}_t=ut'+r'_{t'}\\ t=t'\end{cases}\qquad\qquad\begin{cases}r'_{t'}=\overline{r}_t-ut\\ t'=t\end{cases}$$

$$\overline{r}_t=\left[\overline{x}_t,\overline{y}_t,\overline{z}_t\right]^T,\quad r'_{t'}=\left[x'_{t'},y'_{t'},z'_{t'}\right]^T,\quad u=\left[u_x,u_y,u_z\right]^T$$

“一般伽利略变换”的观测矢量合成图示于**图 3**。

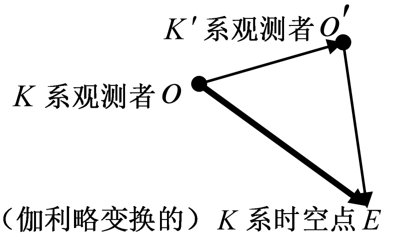


图 3 “一般伽利略变换”的观测矢量合成图

“一般伽利略变换”的矢量图列于表 1。

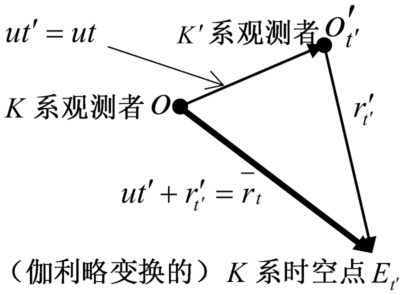
表 1 “一般伽利略变换”的矢量图

“一般伽利略变换”

$$\bar{r}_t = ut' + r'_{t'} = ut + r'_{t'}$$

$$t = t'$$

$$\bar{r}_t = \left[\bar{x}_t, \bar{y}_t, \bar{z}_t\right]^T, \quad r'_{t'} = \left[x'_{t'}, y'_{t'}, z'_{t'}\right]^T, \quad u = \left[u_x, u_y, u_z\right]^T$$



“一般伽利略变换”可以写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \bar{r}_t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r'_{t'} + ut' \\ t' \end{bmatrix}$$

式中：$\bar{r}_t = \left[\bar{x}_t, \bar{y}_t, \bar{z}_t\right]^T$，$r'_{t'} = \left[x'_{t'}, y'_{t'}, z'_{t'}\right]^T$，$u = \left[u_x, u_y, u_z\right]^T$，$|u| = (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)^{1/2}$

将矩阵形式的“一般伽利略变换”写成代数形式，我们就得到“一般伽利略变换”的“正变换”方程组及“逆变换”方程组：

$$\begin{cases} \bar{x} = x' + u_x t' \\ \bar{y} = y' + u_y t' \\ \bar{z} = z' + u_z t' \\ t = t' \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \bar{x} - u_x t \\ y' = \bar{y} - u_y t \\ z' = \bar{z} - u_z t \\ t' = t \end{cases}$$

令 $u=\left[u_x,u_y,u_z\right]^T=\left[u \quad 0 \quad 0\right]^T$，我们就得到“**特殊伽利略变换**”：

$$\begin{cases}\bar{x}=x'+ut'\\ \bar{y}=y'\\ \bar{z}=z'\\ t=t'\end{cases} \qquad \begin{cases}x'=\bar{x}-ut\\ y'=\bar{y}\\ z'=\bar{z}\\ t'=t\end{cases}$$

必须强调指出，**伽利略变换**只在‘真空中光速为无穷大’假定条件下才能够成立。

（二）周方变换（“一般 Z 变换”）

下面，我们推导出“两观测者有相对运动且真空中光速为有限值”条件下唯一客观存在的时空变换 — **周方变换**（Z 变换）。

$t=\left(1+\frac{|u|}{c}\right)t'$ 时的观测矢量合成图示于**图 4**。

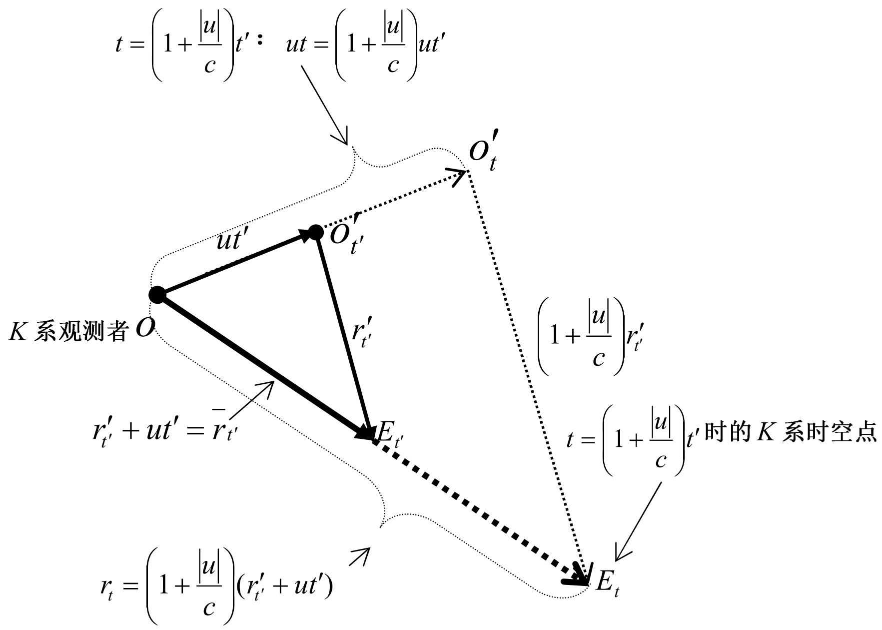


图 4 $t=\left(1+\frac{|u|}{c}\right)t'$ **时的观测矢量合成图**

参看图 4。

（1）在时刻t'，K'系观测者$O'_{t'}$对K系观测者O的位置矢量为$\overline{OO'_{t'}}=ut'$。此时K'系观测者$O'_{t'}$观测到运动质点$E_{t'}$，若‘真空中光速为无穷大’，则K系观测者O与K'系观测者$O'_{t'}$应同时（在时刻t'）观测到运动质点$E_{t'}$，形成观测矢量合成关系：$\overline{r_{t'}}=ut'+r'_{t'}$。可是，由于真空中光速为有限值（$c$），故在时刻$t'$，$K$系观测者$O$尚不能在时刻$t'$观测到运动质点$E_{t'}$。

（2）直到时刻$t=t'+\dfrac{|u|t'}{c}=\left(1+\dfrac{|u|}{c}\right)t'>t'$ [式中$|u|=(u_x^2+u_y^2+u_z^2)^{1/2}$]，$K'$系观测者$O'_t$对$K$系观测者$O$的位置矢量为$\overline{OO'_t}$。此时，$K$系观测者$O$在矢量$\overline{OE_{t'}}$方向上才观测到点$E_t$。图 4 中的点$E_t$乃是$K$系观测者$O$在时刻$t$时观测到运动质点$E_{t'}$之“视在点”，它就是“$K$系观测者$O$在时刻$t=\left(1+\dfrac{|u|}{c}\right)t'$的$K$系时空点”。在$K$系观测者$O$看来，$K'$系观测者$O'_t$在矢量$\overline{O'_{t'}E_{t'}}$方向(即矢量$\overline{O'_tE_t}$方向)上也将在时刻$t=\left(1+\dfrac{|u|}{c}\right)t'$观测到点$E_t$。也就是说，在$K$系观测者$O$看来，在时刻$t=\left(1+\dfrac{|u|}{c}\right)t'$，$K$系观测者$O$与$K'$系观测者$O'_t$同时观测到点$E_t$。

如图4所示，在时刻$t=\left(1+\dfrac{|u|}{c}\right)t'$，$K'$系观测者$O'_t$对$K$系观测者$O$的位置矢量为$\overline{OO'_t}$：

$\overline{OO'_t}=\left(1+\dfrac{|u|}{c}\right)\overline{OO'_{t'}}$，即$\overline{OO'_t}=\left(1+\dfrac{|u|}{c}\right)ut'=ut$。在此时刻，$K'$系观测者$O'_t$对$K$系观测者$O$的位置矢量$\overline{OO'_t}$、$K'$系观测者$O'_t$的观测矢量$\overline{O'_tE_t}$、$K$系观测者$O$的观测矢量$\overline{OE_t}$三个矢量构成观测矢量合成三角形$OO'_tE_t$。这个三角形$OO'_tE_t$与**伽利略变换**的观测矢量合成三角形$OO'_{t'}E_{t'}$成为‘相似三角形’：$\Delta OO'_tE_t\cong\Delta OO'_{t'}E_{t'}$。

于是，从图 4 可得：

a. K'系观测者O'_t对K系观测者O的位置矢量$\overline{OO'_t}$：$\overline{OO'_t}=\left(1+\dfrac{|u|}{c}\right)ut'=ut$；

b. K' 系观测者 O_t' 的 K' 系时空点矢量 $\overline{O_t'E_t}$：$\overline{O_t'E_t} = \left(1+\frac{|u|}{c}\right) r_{t'}'$；

c. K 系观测者 O 的 K 系时空点矢量 $\overline{OE_t}$：$\overline{OE_t} = r_t = \left(1+\frac{|u|}{c}\right)(r_{t'}' + ut')$。

这样，我们从 c. 项就得到方程组：

$$\begin{cases} r_t = \left(1+\frac{|u|}{c}\right)(r_{t'}'+ut') = \left(1+\frac{|u|}{c}\right)ut' + \left(1+\frac{|u|}{c}\right)r_{t'}' = ut + \left(1+\frac{|u|}{c}\right)r_{t'}' \\ t = \left(1+\frac{|u|}{c}\right)t' \end{cases}$$

式中：$r_t = [x_t, y_t, z_t]^T$，$r_{t'}' = [x_{t'}', y_{t'}', z_{t'}']^T$，$u = [u_x, u_y, u_z]^T$，$|u| = (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)^{1/2}$

(c 为真空中光速)

此方程组就是**周方变换（一般 Z 变换）**。

一般 Z 变换可以写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} r_t \\ t \end{bmatrix} = \left(1+\frac{|u|}{c}\right)\begin{bmatrix} r_{t'}' + ut' \\ t' \end{bmatrix} \qquad (c \text{ 为真空中光速})$$

式中：$r_t = [x_t, y_t, z_t]^T$，$r_{t'}' = [x_{t'}', y_{t'}', z_{t'}']^T$，$u = [u_x, u_y, u_z]^T$，$|u| = (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)^{1/2}$

周方变换（一般 Z 变换）的矢量图示于**表 2**。

表 2 周方变换（一般 Z 变换）的矢量图

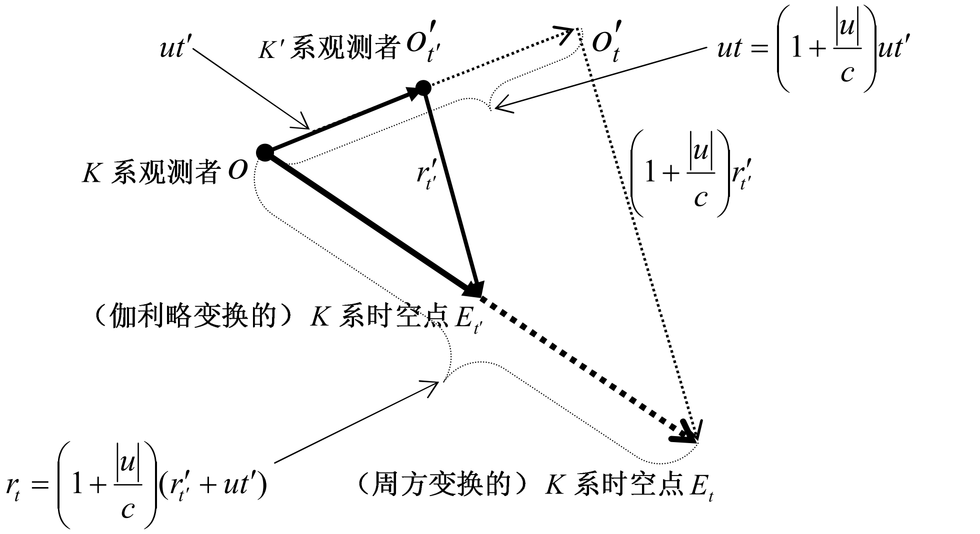
周方变换（一般 Z 变换）

$$r_t = \left(1+\frac{|u|}{c}\right)(r'_{t'}+ut') = \left(1+\frac{|u|}{c}\right)ut' + \left(1+\frac{|u|}{c}\right)r'_{t'} = ut + \left(1+\frac{|u|}{c}\right)r'_{t'}$$

$$t = t' + \frac{|u| \bullet t'}{c} = \left(1+\frac{|u|}{c}\right)t'$$

$r_t = [x_t, y_t, z_t]^T$， $r'_{t'} = [x'_{t'}, y'_{t'}, z'_{t'}]^T$， $u = [u_x, u_y, u_z]^T$， $|u| = (u_x^2+u_y^2+u_z^2)^{1/2}$

(c 为真空中光速)



将矩阵形式的**周方变换**（一般 Z 变换）

$$\begin{bmatrix} r_t \\ t \end{bmatrix} = \left(1+\frac{|u|}{c}\right)\begin{bmatrix} r'_{t'}+ut' \\ t' \end{bmatrix} \qquad (c\text{ 为真空中光速})$$

式中：$r_t = [x_t, y_t, z_t]^T$， $r'_{t'} = [x'_{t'}, y'_{t'}, z'_{t'}]^T$， $u = [u_x, u_y, u_z]^T$， $|u| = (u_x^2+u_y^2+u_z^2)^{1/2}$

写成代数形式，我们就得到**周方变换**（一般 Z 变换）的“正变换”及“逆变换”：

$$\begin{cases} x = \left(1+\frac{|u|}{c}\right)(x'+u_x t') \\ y = \left(1+\frac{|u|}{c}\right)(y'+u_y t') \\ z = \left(1+\frac{|u|}{c}\right)(z'+u_z t') \\ t = \left(1+\frac{|u|}{c}\right)t' \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \frac{1}{1+\frac{|u|}{c}}(x-u_x t) \\ y' = \frac{1}{1+\frac{|u|}{c}}(y-u_y t) \\ z' = \frac{1}{1+\frac{|u|}{c}}(z-u_z t) \\ t' = \frac{1}{1+\frac{|u|}{c}}t \end{cases}$$

式中：$u=[u_x,u_y,u_z]^T$，$|u|=(u_x^2+u_y^2+u_z^2)^{1/2}$，$c$ 为真空中光速。

（三）周方变换（“特殊 Z 变换”）

设：K' 系沿 K 系的 x 轴正方向作匀速直线平移运动，相对速度为 u，且保持 x' 轴与 x 轴重合；y' 轴与 y 轴平行及 z' 轴与 z 轴平行。在这种场合下，有：$u_x=u$，$u_y=0$，$u_z=0$。

K' 系与 K 系之间的关系示于图 5。

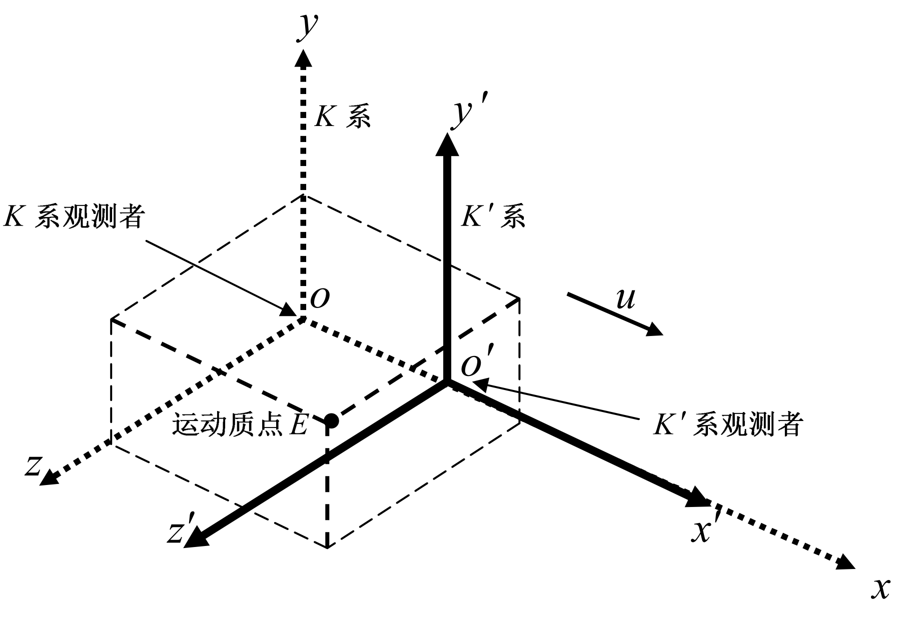


图 5 K' 系与 K 系之间的关系

在一般 Z 变换中，令 $u=\left[u_x,u_y,u_z\right]^T=\left[u \quad 0 \quad 0\right]^T$，即得到变换方程组：

$$
\begin{cases}
x=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)(x'+ut') \\
y=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)y' \\
z=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)z' \\
t=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)t'
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
x'=\dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}}(x-ut) \\
y'=\dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}}y \\
z'=\dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}}z \\
t'=\dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}}t
\end{cases}
$$

此变换方程组称为**“周方变换（特殊 Z 变换）”**，简称**“特殊 Z 变换”**。

参 考 文 献

[1]**《现代牛顿力学的运动观测理论—兼评狭义相对论之“洛伦兹变换”》**，周 方/著 经济科学出版社 2014 年版

[2]**《现代牛顿力学的运动观测理论—兼评狭义相对论之“洛伦兹变换”》**，**(第二版)**，周 方/著 经济科学出版社 2016 年版

[3] 周 方:**《新牛顿力学时空变换 —周方变换（广义的伽利略变换)》**
(The Transformation of Space-time for the Neo-Newtonian Mechanics)
http://www.vixra.org/pdf/1209.0089v1.pdf

On the Simplest Deduction for Space-Time Transformation in Motion Observation

Zhoufang

(Chinese Academy of Social Sciences)

Abstract The Galilean Transformation exhibits a composition of observers' observation vectors.The author of this article presents the simplest deduction for space-time transformation objectively existing in motion observation under the circumstances of limited light velocity, utilizing the inherent exiting property of Galilean Transformation.