周方变换（Z 变换）：

运动观测理论与哈勃定律的理论表达式

中国社会科学院　周 方

zhoufang@cass.org.cn　　tony_zf_zf_zf@126.com

摘要 互相作匀速直线相对运动的两个观测者对同一个“事件”（空间内同一个“点”）进行观测时，在两个观测者“见到”这个点的时刻及空间位置之间，存在着完全确定的对应关系。也就是说，在“两观测者有相对运动而且光传播速度为有限值”的场合下，两观测者在对同一个事件进行观测时必然在不同时刻“见到”该事件处在不同空间位置上。在观测者“见到”该事件的时刻以及该事件所处的空间坐标之间，在数值上必然存在着确定的转换关系。通常我们把这种“转换”称之为“时空变换”。由此可见，“时空变换”实为客观存在，而绝不是被人为地“创建”、“设计”出来的。至今，人们居然还沉陷在这样的误区里，狭义相对论之“洛伦兹变换”就是这个误区里的产物。因此，我们绝不可以通过纯粹的数学模型进行“数学推导”去“建立”甚至“拼凑、编造”出一个“时空变换”，而只能依据客观的物理事实去“发现”这种客观存在的“时空变换”。只有“发现”了这种客观存在的“时空变换”，才能够建立正确的运动观测理论。本文作者首次发现并揭示了“两观测者有相对运动而且光传播速度为有限值”场合下两个观测者对同一事件进行观测时唯一客观存在的“时空变换”，它是伽利略型的“时空变换”，而（经典的）伽利略变换 $x' = x - ut$，$y' = y$，$z' = z$，$t' = t$ 则不过是此时空变换在“光速为无限大”假定条件下的特例。1929 年，美国天文物理学家哈勃（**E. P. Hubble**）发现河外星系视向退行速度与距离成正比，即距离越远，视向退行速度越大。**“哈勃定律”**中速度和距离都是间接观测得到的物理量。**“哈勃定律”**通常被用来推算遥远星系的距离。可是，至今**“哈勃定律”**只是以实测数据统计拟合的直线形式呈现的，而从未得到理论上的解释与表达。本文十分简捷地首次给出了**“哈勃定律”**的理论表达式。实际上，从本文作者首次发现的“两观测者有相对运动而且光传播速度为有限值”情况下唯一客观存在的时空变换 — **周方变换**（Z 变换）即可直接导出**“哈勃定律”**的理论表达式。

关键词　哈勃定律　时空变换　伽利略变换　广义的伽利略变换　周方变换　Z 变换

一．周方变换（Z 变换）

（一）“一般 Z 变换”

设：在 K 系的 x 轴、y 轴、z 轴中没有任何一个轴优越于另一个轴，以及在 K' 系的 x' 轴、y' 轴、z' 轴中也没有任何一个轴优越于另一个轴。K' 系与 K 系之间始终保持 x’ 轴平行于 x 轴，y’ 轴平行于 y 轴及 z’ 轴平行于 z 轴。K' 系相对于 K 系作匀速直线平移运动，相对速度为 u。相对速度矢量 u 在 x 轴、y 轴、z 轴上的分量分别为 u_x、u_y、u_z。观测者被设置在坐标系的原点。K 系观测者和 K' 系观测者各配有时钟，而且两时钟完全同步运行。在时刻 $t' = t = 0$，K' 系原点（$x' = y' = z' = 0$）恰好经过 K 系原点（$x = y = z = 0$），这时两观测者的时钟相互对准到零点。

K' 系与 K 系之间的关系示于图 1。

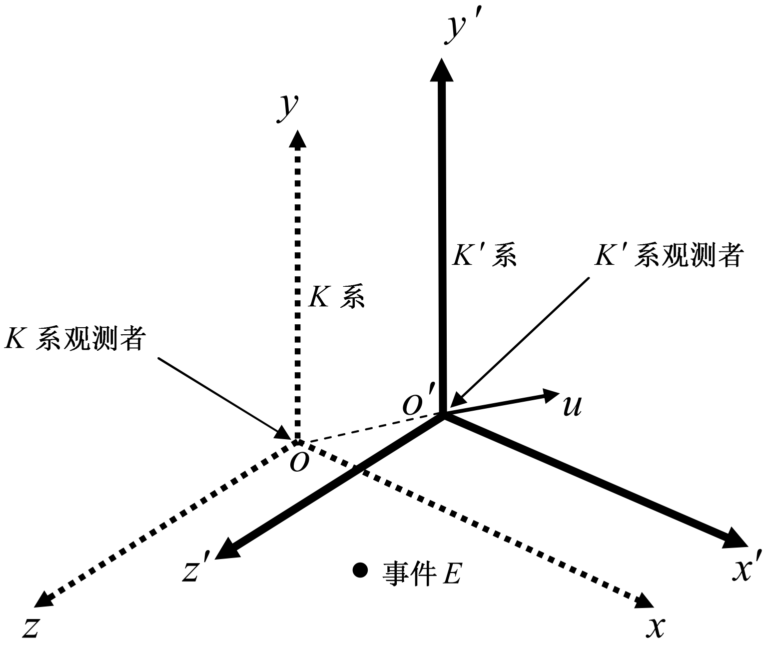


图 1　K' 系与 K 系之间的关系

A．以 K 系为静系，K' 系对 K 系沿 x 轴方向的相对运动物理模型示于图 2a（K' 系对 K 系沿 x 轴方向的相对运动）。

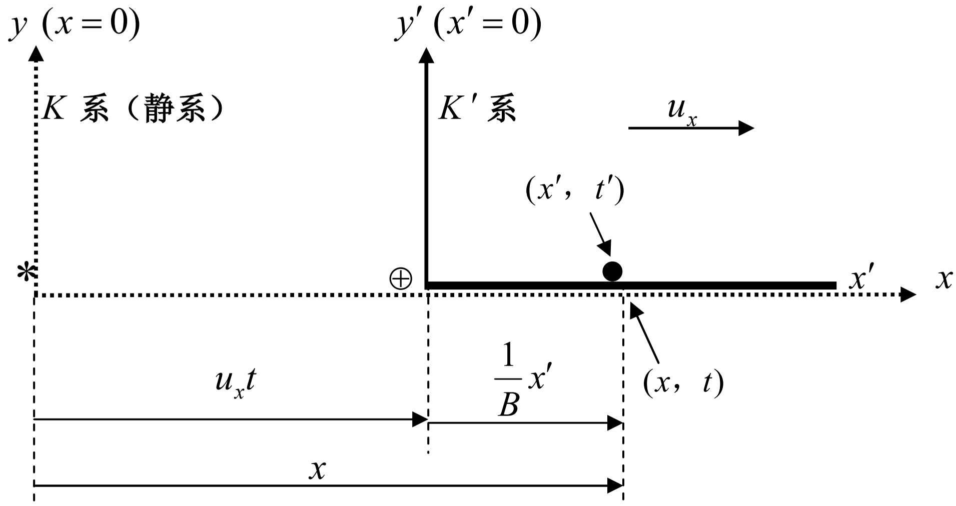


图 2a　K' 系沿 x 轴方向的相对运动（以 K 系为静系）

参看图 2a：

（1）* 为 K 系观测者，⊕ 为 K' 系观测者；u_x 为 K' 系对 K 系的相对速度矢量 u 在 x 轴方向的分量；

（2）K 系观测者与 K' 系观测者持有相同的时钟及量尺；在 K' 系观测者掠过 K 系观测者的时刻，两者的时钟对准到零点（$t'=t=0$）；

（3）x' 为 K' 系观测者（在时刻 t'）‘实际测得’的某运动质点的 K' 系坐标；而 $\frac{1}{B}x'$ 则是 K 系观测者（在时刻 t）‘所估计’的“K' 系观测者（在时刻 t）‘应当测得’的该运动质点的 K' 系坐标值”。在“两观测者有相对运动（相对速度 $u \neq 0$）且光传播速度 c 为有限值”的条件下，系数 B 必为‘不等于 1 的正数’。从图 2a 有：$x-u_x t=\frac{1}{B}x'$，从而有空间变换方程：

$$x' = B(x-u_x t)$$

系数 B 与相对速度 u 的模 $|u|$ 有关，而与 u 的分量 u_x、u_y、u_z 无关。

B．以 K' 系为静系，此时图 2a 可表为下面的图 2b（K 系对 K' 系沿 x' 轴方向的相对运动）：

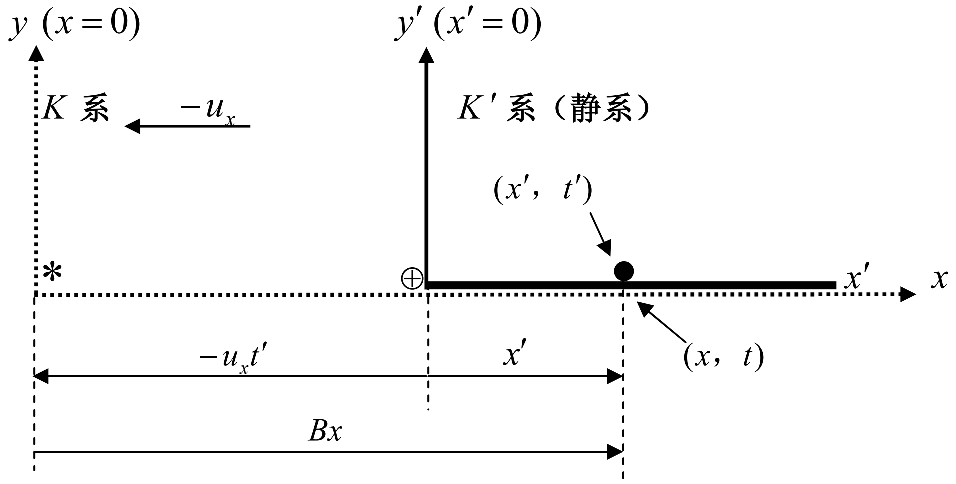


图 2b K 系沿 x' 轴方向的相对运动（以 K' 系为静系）

参看图 2b：

（1）$*$ 为 K 系观测者，$\oplus$ 为 K' 系观测者；$-u_x$ 为 K 系对 K' 系的相对速度 $-u$ 在 x' 轴方向的分量；

（2）K **系观测者**与 K' **系观测者**持有相同的时钟及量尺；在 K **系观测者**掠过 K' **系观测者**的时刻，两者的时钟对准到零点（$t'=t=0$）；

（3）x' 为 K' **系观测者**（在时刻 t'）‘实际测得’的某运动质点的 K' 系坐标；而 Bx 则是 K' **系观测者**（在时刻 t'）‘所估计’的“K **系观测者**（在时刻 t'）‘应当测得’的该运动质点的 K 系坐标值”。在“两观测者有相对运动（相对速度 $u\neq 0$）且光传播速度 c 为有限值”的条件下，系数 B 必为‘不等于 1 的正数’。从图 2b 有：$x'-(-u_x t')=x'+u_x t'=Bx$，从而有空间变换方程：

$$x=\frac{1}{B}(x'+u_x t')$$

系数 B 与相对速度 u 的模 $|u|$ 有关，而与 u 的分量 u_x、u_y、u_z 无关。

从图 2a 所得之方程 $x'=B(x-u_x t)$ 与从图 2b 所得之方程 $x=\frac{1}{B}(x'+u_x t')$ 实际上为（互为正、逆函数的）**同一个方程**!! 因此，以下等价关系成立：

$$\{x'=B(x-u_x t)\}\Leftrightarrow\{x=\frac{1}{B}(x'+u_x t')\}$$

由此得同时成立的两个关系式：

1. $x'=B(x-u_x t)$，即 $Bx-x'=Bu_x t$。

2. $x=\frac{1}{B}(x'+u_x t')$，即 $Bx-x'=u_x t'$。

从而得到使这两个关系式同时成立的充要条件：$Bu_x t=u_x t'$，即 $Bt=t'$。$t'=Bt$ 就是两参考系之间的**时间变换式**。

于是，我们得到以下同时成立的方程组：

沿 x（x'）轴的方程组：
$$\begin{cases} x'=B(x-u_x t) \\ x=\frac{1}{B}(x'+u_x t') \\ t'=Bt \end{cases}$$

由于在 x 轴、y 轴、z 轴中没有任何一个轴优越于另一个轴，以及在 x' 轴、y' 轴、z' 轴中也没有任何一个轴优越于另一个轴，且系数 B 与相对速度 u 的模 $|u|$ 有关，而与 u 的分量 u_x、u_y、u_z 无关。因此，用与上述完全相同的方法可以得到以下同时成立的方程组：

沿 y（y'）轴的方程组：
$$\begin{cases} y'=B(y-u_y t) \\ y=\frac{1}{B}(y'+u_y t') \\ t'=Bt \end{cases}$$

沿 z（z'）轴的方程组：
$$\begin{cases} z'=B(z-u_z t) \\ z=\frac{1}{B}(z'+u_z t') \\ t'=Bt \end{cases}$$

这样，我们就得到互相等价的“正变换”方程组及“逆变换”方程组：

$$\begin{cases} x=\frac{1}{B}(x'+u_x t') \\ y=\frac{1}{B}(y'+u_y t') \\ z=\frac{1}{B}(z'+u_z t') \\ t=\frac{1}{B}t' \end{cases} \qquad \begin{cases} x'=B(x-u_x t) \\ y'=B(y-u_y t) \\ z'=B(z-u_z t) \\ t'=Bt \end{cases}$$

此变换方程组称为**“周方变换（一般 Z 变换）”**，简称“**一般 Z 变换**”。将变换方程组写成矩阵形式：

$$\boxed{\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \\ t \end{bmatrix} = \frac{1}{B}\begin{bmatrix} (x'_{t'} + u_x t') \\ (y'_{t'} + u_y t') \\ (z'_{t'} + u_z t') \\ t' \end{bmatrix} \quad \textbf{或：} \quad \begin{bmatrix} x'_{t'} \\ y'_{t'} \\ z'_{t'} \\ t' \end{bmatrix} = B\begin{bmatrix} (x_t - u_x t) \\ (y_t - u_y t) \\ (z_t - u_z t) \\ t \end{bmatrix}}$$

将变换方程组

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \\ t \end{bmatrix} = \frac{1}{B}\begin{bmatrix} (x'_{t'} + u_x t') \\ (y'_{t'} + u_y t') \\ (z'_{t'} + u_z t') \\ t' \end{bmatrix}$$

表为

$$\begin{bmatrix} r_t \\ t \end{bmatrix} = \frac{1}{B}\begin{bmatrix} r'_{t'} + ut' \\ t' \end{bmatrix}$$

式中：$r_t = [x_t, y_t, z_t]^T$，$r'_{t'} = [x'_{t'}, y'_{t'}, z'_{t'}]^T$，$u = [u_x, u_y, u_z]^T$

考虑到**时间变换式** $t = \frac{1}{B}t'$，可得下面这个矢量关系式：

$$r_t = \frac{1}{B}[r'_{t'} + ut'] = \frac{1}{B}ut' + \frac{1}{B}r'_{t'} = ut + \frac{1}{B}r'_{t'}$$

式中：$r_t = [x_t, y_t, z_t]^T$，$r'_{t'} = [x'_{t'}, y'_{t'}, z'_{t'}]^T$，$u = [u_x, u_y, u_z]^T$

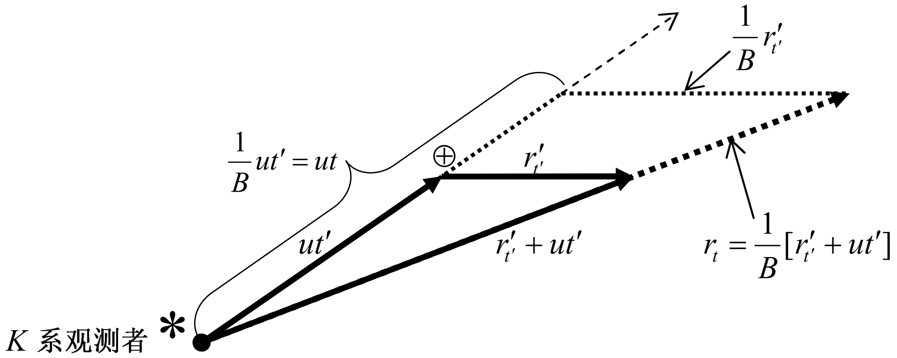
一般 Z 变换的矢量图列于**表** 1。

表 1 一般 Z 变换的矢量图

$$r_t = \frac{1}{B}[r'_{t'} + ut'] = \frac{1}{B}ut' + \frac{1}{B}r'_{t'} = ut + \frac{1}{B}r'_{t'}$$

$$t = \frac{1}{B}t'$$

$$r_t = \left[x_t, y_t, z_t\right]^T,\quad r'_{t'} = \left[x'_{t'}, y'_{t'}, z'_{t'}\right]^T,\quad u = \left[u_x, u_y, u_z\right]^T$$



“相对性原理”检验

取一般 Z 变换方程组：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} = B\begin{bmatrix} (x-u_x t) \\ (y-u_y t) \\ (z-u_z t) \\ t \end{bmatrix} = B\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -u_x \\ 0 & 1 & 0 & -u_y \\ 0 & 0 & 1 & -u_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

即：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} = B\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -u_x \\ 0 & 1 & 0 & -u_y \\ 0 & 0 & 1 & -u_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

即：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & 0 & 0 & -Bu_x \\ 0 & B & 0 & -Bu_y \\ 0 & 0 & B & -Bu_z \\ 0 & 0 & 0 & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

方程组的变换矩阵 Φ 为：

$$\Phi = \begin{bmatrix} B & 0 & 0 & -Bu_x \\ 0 & B & 0 & -Bu_y \\ 0 & 0 & B & -Bu_z \\ 0 & 0 & 0 & B \end{bmatrix} = B\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -u_x \\ 0 & 1 & 0 & -u_y \\ 0 & 0 & 1 & -u_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

逆变换矩阵Φ^{-1}为：

$$\Phi^{-1} = \frac{1}{B^4}\begin{bmatrix} B^3 & 0 & 0 & B^3u_x \\ 0 & B^3 & 0 & B^3u_y \\ 0 & 0 & B^3 & B^3u_z \\ 0 & 0 & 0 & B^3 \end{bmatrix} = \frac{1}{B}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & u_x \\ 0 & 1 & 0 & u_y \\ 0 & 0 & 1 & u_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可见，**变换矩阵**Φ与**逆变换矩阵**Φ^{-1}具有完全相同的张量形式。而且，有：

$$\Phi \times \Phi^{-1} = B\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -u_x \\ 0 & 1 & 0 & -u_y \\ 0 & 0 & 1 & -u_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{B}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & u_x \\ 0 & 1 & 0 & u_y \\ 0 & 0 & 1 & u_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -u_x \\ 0 & 1 & 0 & -u_y \\ 0 & 0 & 1 & -u_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & u_x \\ 0 & 1 & 0 & u_y \\ 0 & 0 & 1 & u_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所以，**一般 Z 变换**满足**“相对性原理”**。

代入系数$B = \dfrac{1}{1+\dfrac{|u|}{c}}$，式中$|u| = (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)^{1/2}$，$c$为真空中光速，即得到**周方变换**（**一般 Z 变换**），列于表 2。

表 2 周方变换（一般 Z 变换）

周方变换（一般 Z 变换）
$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \\ t \end{bmatrix} = \left(1+\dfrac{\lvert u\rvert}{c}\right)\begin{bmatrix} (x'_{t'} + u_x t') \\ (y'_{t'} + u_y t') \\ (z'_{t'} + u_z t') \\ t' \end{bmatrix}$ **或：** $\begin{bmatrix} x'_{t'} \\ y'_{t'} \\ z'_{t'} \\ t' \end{bmatrix} = \dfrac{1}{1+\dfrac{\lvert u\rvert}{c}}\begin{bmatrix} (x_t - u_x t) \\ (y_t - u_y t) \\ (z_t - u_z t) \\ t \end{bmatrix}$
$r_t = [x_t, y_t, z_t]^T$，$r'_{t'} = [x'_{t'}, y'_{t'}, z'_{t'}]^T$，$u = [u_x, u_y, u_z]^T$，$\lvert u\rvert = (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)^{1/2}$
c为真空中光速

一般 Z 变换的变换方程组

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \\ t \end{bmatrix} = \left(1+\frac{|u|}{c}\right)\begin{bmatrix} (x'_{t'}+u_x t') \\ (y'_{t'}+u_y t') \\ (z'_{t'}+u_z t') \\ t' \end{bmatrix}$$

可以表为

$$\begin{bmatrix} r_t \\ t \end{bmatrix} = \left(1+\frac{|u|}{c}\right)\begin{bmatrix} r'_{t'}+ut' \\ t' \end{bmatrix}$$

式中：$r_t = \left[x_t, y_t, z_t\right]^T$，$r'_{t'} = \left[x'_{t'}, y'_{t'}, z'_{t'}\right]^T$，$u = \left[u_x, u_y, u_z\right]^T$

$|u| = (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)^{1/2}$，$c$ 为真空中光速

考虑到**时间变换式**：$\left(1+\frac{|u|}{c}\right)t' = t$，可得下面这个矢量关系式：

$$r_t = \left(1+\frac{|u|}{c}\right)[r'_{t'}+ut'] = \left(1+\frac{|u|}{c}\right)ut' + \left(1+\frac{|u|}{c}\right)r'_{t'} = ut + \left(1+\frac{|u|}{c}\right)r'_{t'}$$

式中：$r_t = \left[x_t, y_t, z_t\right]^T$，$r'_{t'} = \left[x'_{t'}, y'_{t'}, z'_{t'}\right]^T$，$u = \left[u_x, u_y, u_z\right]^T$

$|u| = (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)^{1/2}$，$c$ 为真空中光速

周方变换（一般 Z 变换）的矢量图列于表 3。

表 3 周方变换（一般 Z 变换）的矢量图

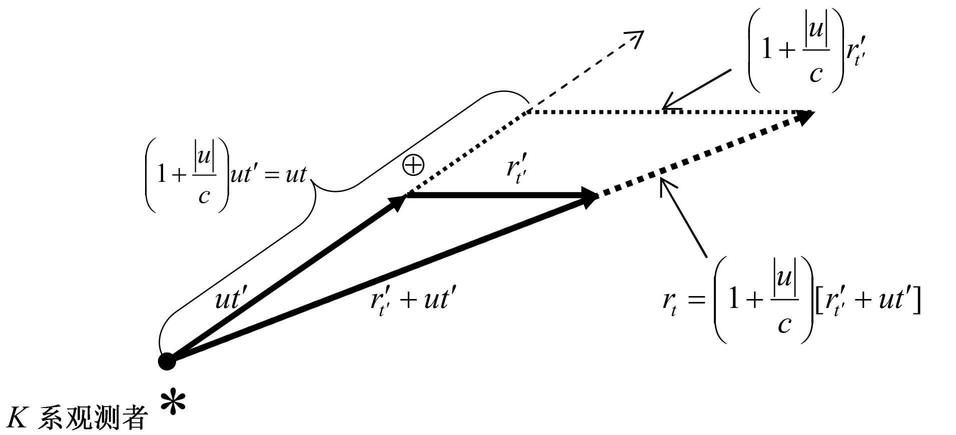
周方变换（一般 Z 变换）

$$r_t=\left(1+\frac{|u|}{c}\right)[r'_{t'}+ut']=\left(1+\frac{|u|}{c}\right)ut'+\left(1+\frac{|u|}{c}\right)r'_{t'}=ut+\left(1+\frac{|u|}{c}\right)r'_{t'}$$

$$t=t'+\frac{|u|\bullet t'}{c}=\left(1+\frac{|u|}{c}\right)t'$$

$$r_t=\left[x_t,y_t,z_t\right]^T,\quad r'_{t'}=\left[x'_{t'},y'_{t'},z'_{t'}\right]^T,\quad u=\left[u_x,u_y,u_z\right]^T,\quad |u|=(u_x^2+u_y^2+u_z^2)^{1/2}$$

(c 为真空中光速)



在一般 Z 变换中令 $c=+\infty$，则得到**伽利略变换**。

$$\begin{bmatrix}x_t\\y_t\\z_t\\t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(x'_{t'}+u_xt')\\(y'_{t'}+u_yt')\\(z'_{t'}+u_zt')\\t'\end{bmatrix}\qquad \textbf{或：}\qquad \begin{bmatrix}x'_{t'}\\y'_{t'}\\z'_{t'}\\t'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(x_t-u_xt)\\(y_t-u_yt)\\(z_t-u_zt)\\t\end{bmatrix}$$

伽利略变换的变换方程组

$$\begin{bmatrix}x_t\\y_t\\z_t\\t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(x'_{t'}+u_xt')\\(y'_{t'}+u_yt')\\(z'_{t'}+u_zt')\\t'\end{bmatrix}$$

可以表为

$$\begin{bmatrix}r_t\\t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r'_{t'}+ut'\\t'\end{bmatrix}$$

式中：$r_t=\left[x_t,y_t,z_t\right]^T$，$r'_{t'}=\left[x'_{t'},y'_{t'},z'_{t'}\right]^T$，$u=\left[u_x,u_y,u_z\right]^T$

伽利略变换的矢量图列于表 4。

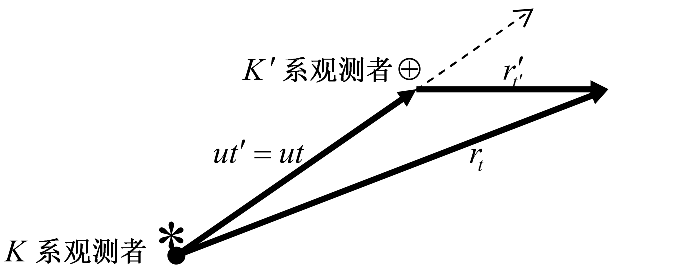
表 4 伽利略变换的矢量图

伽利略变换

$$r_t = ut' + r'_{t'} = ut + r'_{t'}$$

$$t = t'$$

$$r_t = [x_t, y_t, z_t]^T,\quad r'_{t'} = [x'_{t'}, y'_{t'}, z'_{t'}]^T,\quad u = [u_x, u_y, u_z]^T$$



一般 Z 变换沿 x 轴、y 轴及 z 轴的时空图示于图 3、图 4、图 5。

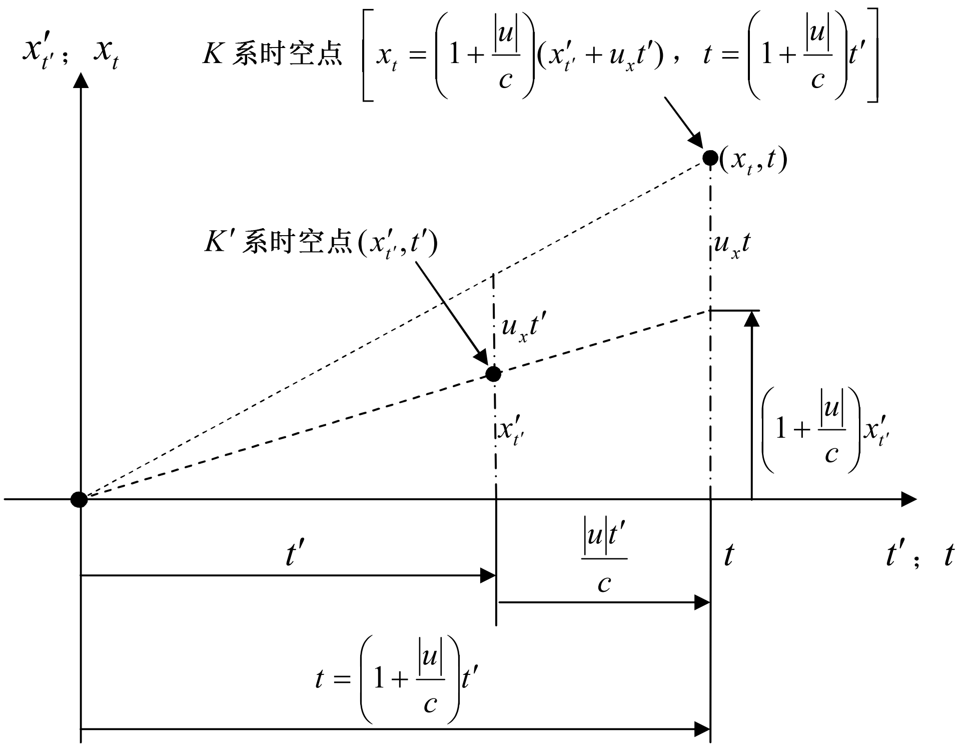


图 3 一般 Z 变换沿 x 轴的时空图

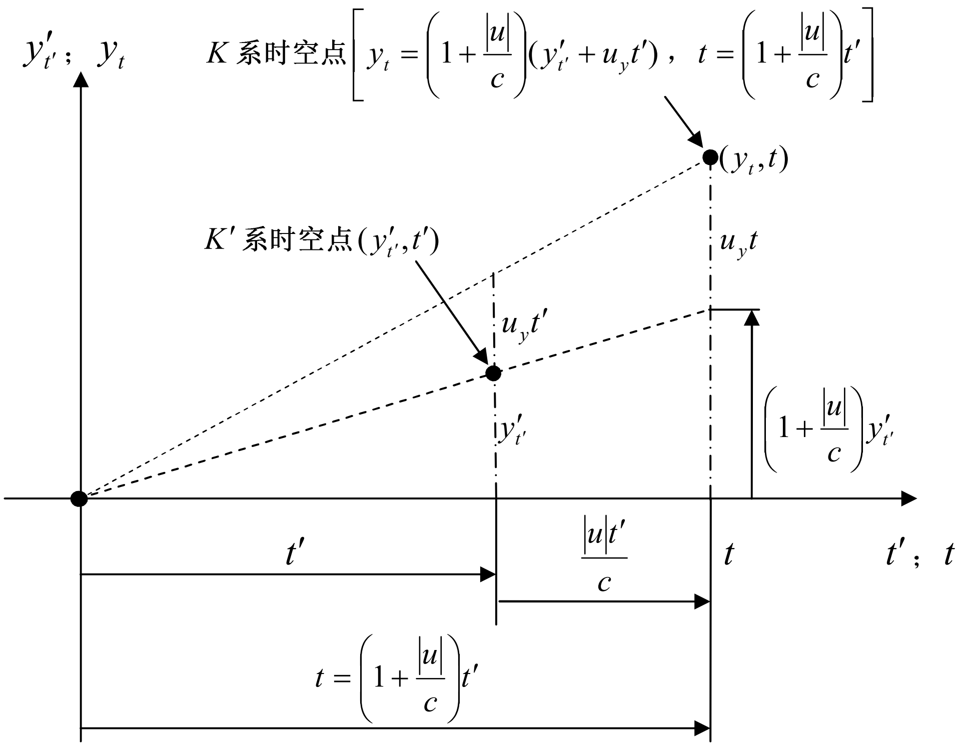


图 4 一般 Z 变换沿 y 轴的时空图

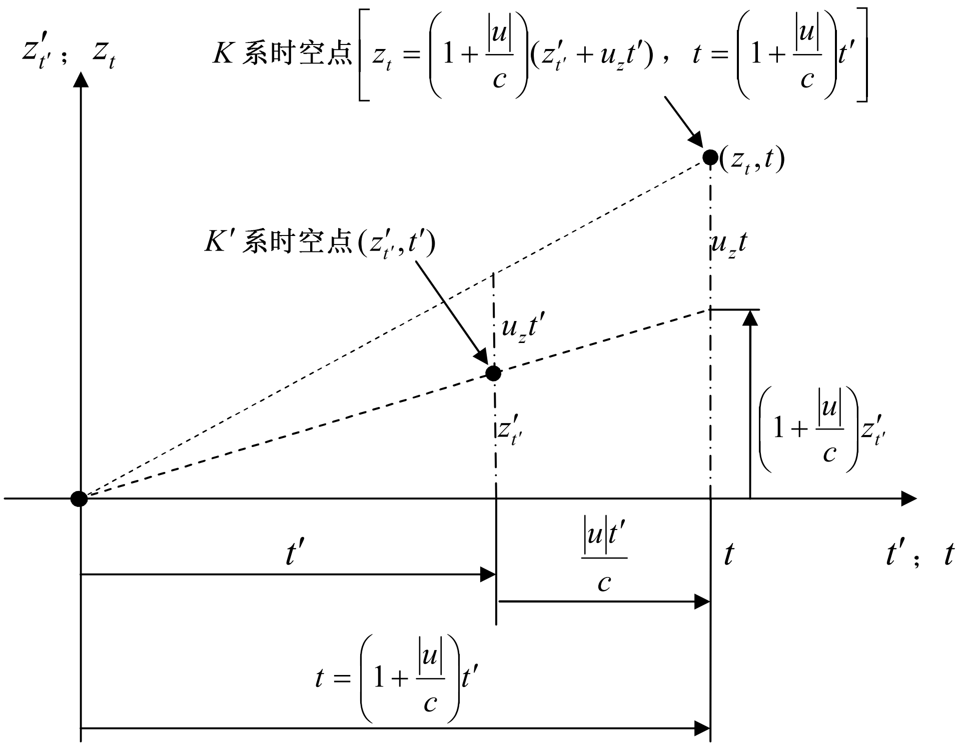


图 5 一般 Z 变换沿 z 轴的时空图

“相对性原理”检验

一般 Z 变换为：

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{1+\dfrac{|u|}{c}}(x-u_x t) \\ y' = \dfrac{1}{1+\dfrac{|u|}{c}}(y-u_y t) \\ z' = \dfrac{1}{1+\dfrac{|u|}{c}}(z-u_z t) \\ t' = \dfrac{1}{1+\dfrac{|u|}{c}}t \end{cases}$$

表为矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+\dfrac{|u|}{c}} & 0 & 0 & -\dfrac{u_x}{1+\dfrac{|u|}{c}} \\ 0 & \dfrac{1}{1+\dfrac{|u|}{c}} & 0 & -\dfrac{u_y}{1+\dfrac{|u|}{c}} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{1+\dfrac{|u|}{c}} & -\dfrac{u_z}{1+\dfrac{|u|}{c}} \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{1+\dfrac{|u|}{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

方程组的**变换矩阵**Φ为：

$$\Phi = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+\dfrac{|u|}{c}} & 0 & 0 & -\dfrac{u_x}{1+\dfrac{|u|}{c}} \\ 0 & \dfrac{1}{1+\dfrac{|u|}{c}} & 0 & -\dfrac{u_y}{1+\dfrac{|u|}{c}} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{1+\dfrac{|u|}{c}} & -\dfrac{u_z}{1+\dfrac{|u|}{c}} \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{1+\dfrac{|u|}{c}} \end{bmatrix} = \frac{1}{1+\dfrac{|u|}{c}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -u_x \\ 0 & 1 & 0 & -u_y \\ 0 & 0 & 1 & -u_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

逆变换矩阵Φ^{-1}为：

$$\Phi^{-1}=\frac{1}{\left(\frac{1}{1+\frac{|u|}{c}}\right)^4}\begin{bmatrix}\left(\frac{1}{1+\frac{|u|}{c}}\right)^3 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{1+\frac{|u|}{c}}\right)^3 u_x\\ 0 & \left(\frac{1}{1+\frac{|u|}{c}}\right)^3 & 0 & \left(\frac{1}{1+\frac{|u|}{c}}\right)^3 u_y\\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{1+\frac{|u|}{c}}\right)^3 & \left(\frac{1}{1+\frac{|u|}{c}}\right)^3 u_z\\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{1+\frac{|u|}{c}}\right)^3\end{bmatrix}$$

$$=\left(1+\frac{|u|}{c}\right)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & u_x\\ 0 & 1 & 0 & u_y\\ 0 & 0 & 1 & u_z\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

可见，变换矩阵Φ与逆变换矩阵Φ^{-1}具有完全相同的张量形式。而且，有：

$$\Phi\times\Phi^{-1}=\frac{1}{1+\frac{|u|}{c}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -u_x\\ 0 & 1 & 0 & -u_y\\ 0 & 0 & 1 & -u_z\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\times\left(1+\frac{|u|}{c}\right)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & u_x\\ 0 & 1 & 0 & u_y\\ 0 & 0 & 1 & u_z\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -u_x\\ 0 & 1 & 0 & -u_y\\ 0 & 0 & 1 & -u_z\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & u_x\\ 0 & 1 & 0 & u_y\\ 0 & 0 & 1 & u_z\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

所以，一般 Z 变换满足**“相对性原理”**。

（二）“特殊 Z 变换”

设：K'系沿K系的x轴正方向作匀速直线平移运动，且保持 **x’** 轴与 **x** 轴重合；**y’** 轴与 **y** 轴平行及 **z’** 轴与 **z** 轴平行。在这种场合下，有$u_x=u$，$u_y=0$，$u_z=0$。

K'系与K系之间的关系示于图 6。

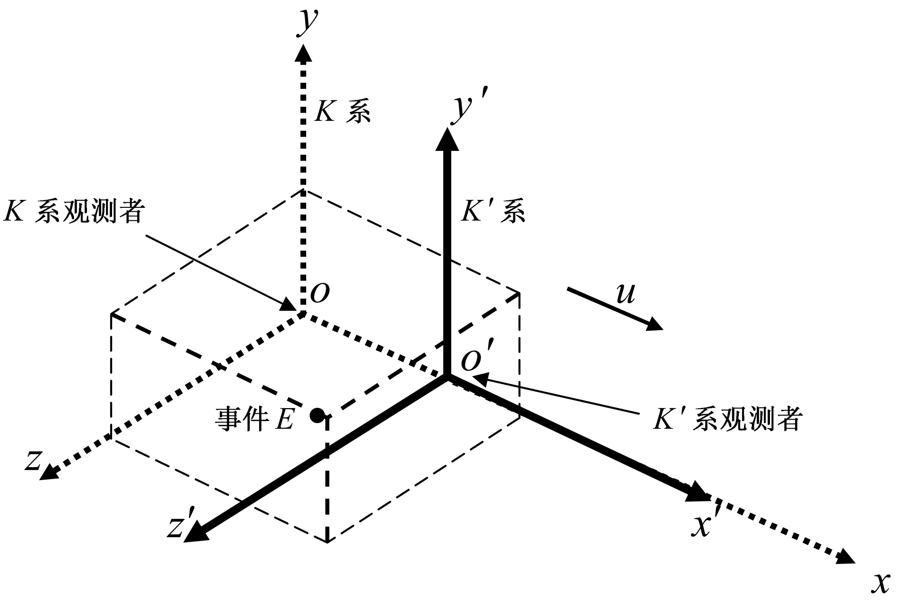


图 6 K'系与K系之间的关系

在一般 Z 变换中，令$u_x = u$，$u_y = 0$，$u_z = 0$，即得到变换方程组：

$$\left(1+\frac{u}{c}\right)\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} = \frac{1}{1+\frac{u}{c}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \frac{1}{1+\frac{u}{c}}\begin{bmatrix} (x-ut) \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

即：

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{1+\frac{u}{c}}(x-ut), \\ y' = \dfrac{1}{1+\frac{u}{c}}y, \\ z' = \dfrac{1}{1+\frac{u}{c}}z, \\ t' = \dfrac{1}{1+\frac{u}{c}}t \end{cases}$$

此变换方程组称为**“周方变换（特殊 Z 变换）”**，简称**“特殊 Z 变换”**。

特殊 Z 变换沿 x 轴、y 轴及 z 轴的时空图示于**图 7、图 8、图 9**。

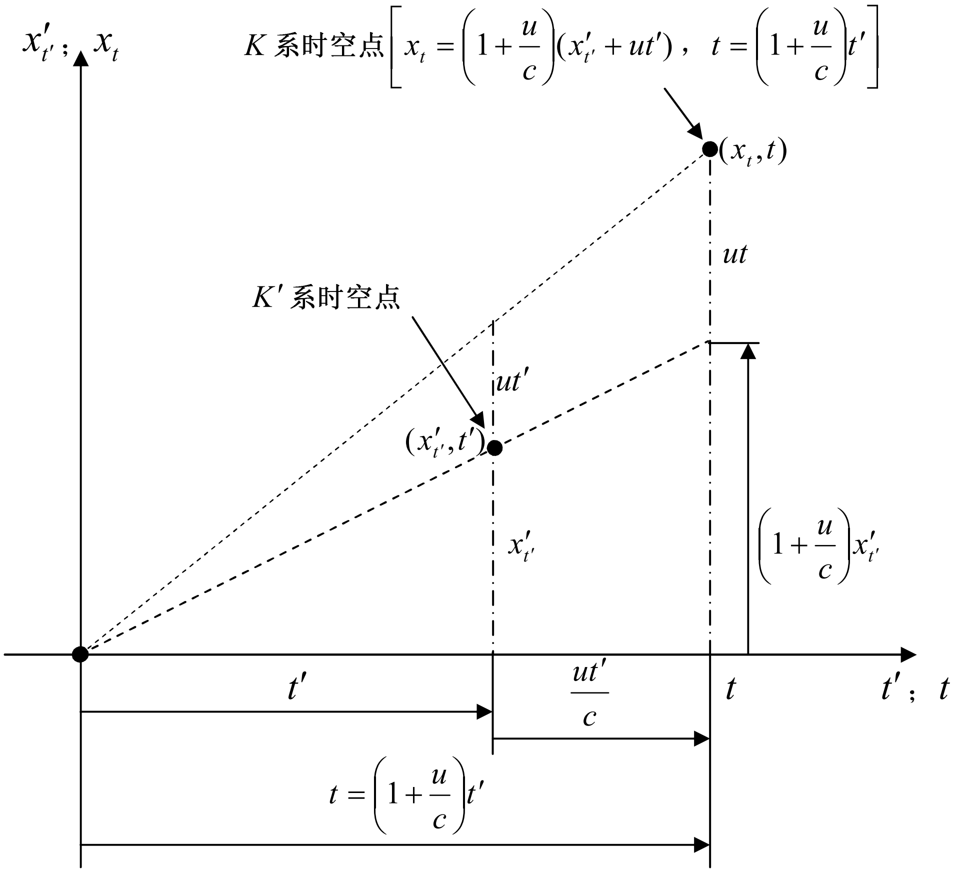


图 7 特殊 Z 变换沿 x 轴的时空图

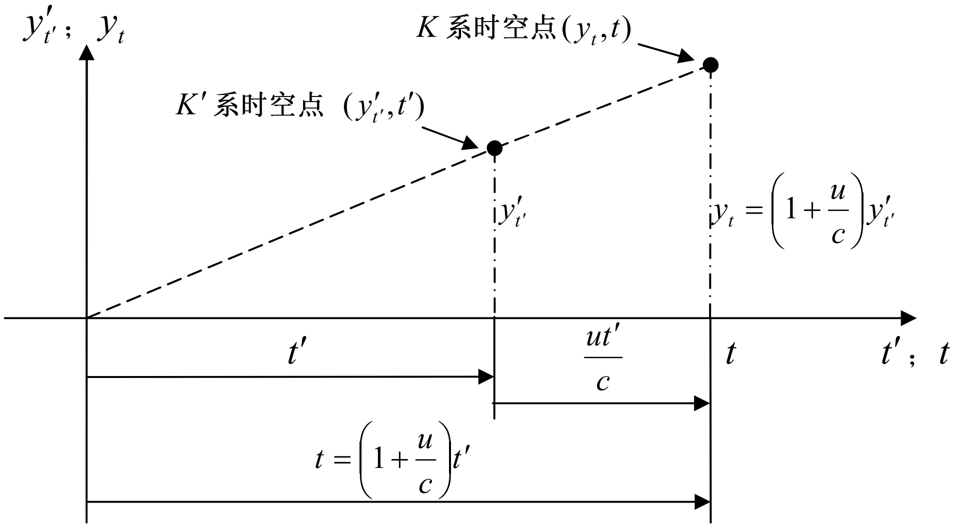


图 8 特殊 Z 变换沿 y 轴的时空图

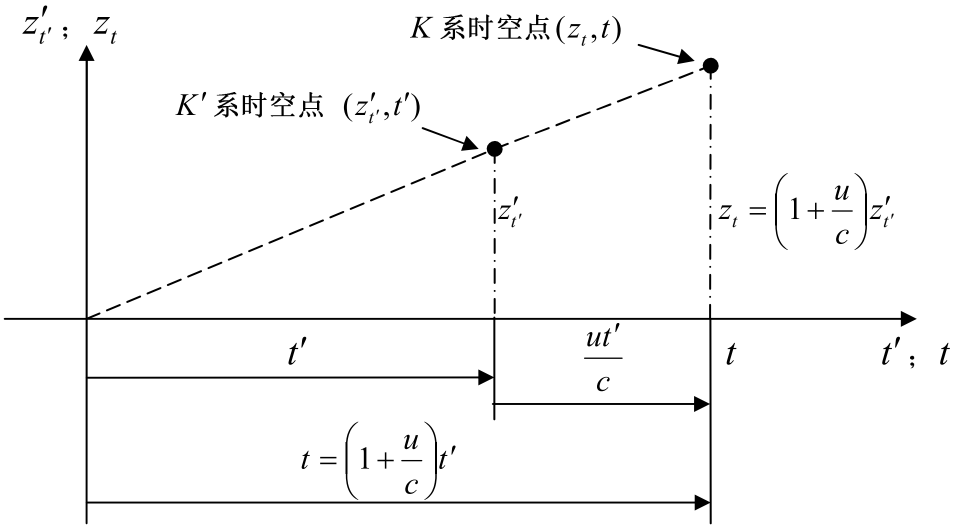


图 9 特殊 Z 变换沿 z 轴的时空图

将图 7、图 8、图 9 三个图整合为一个图，得图 10。

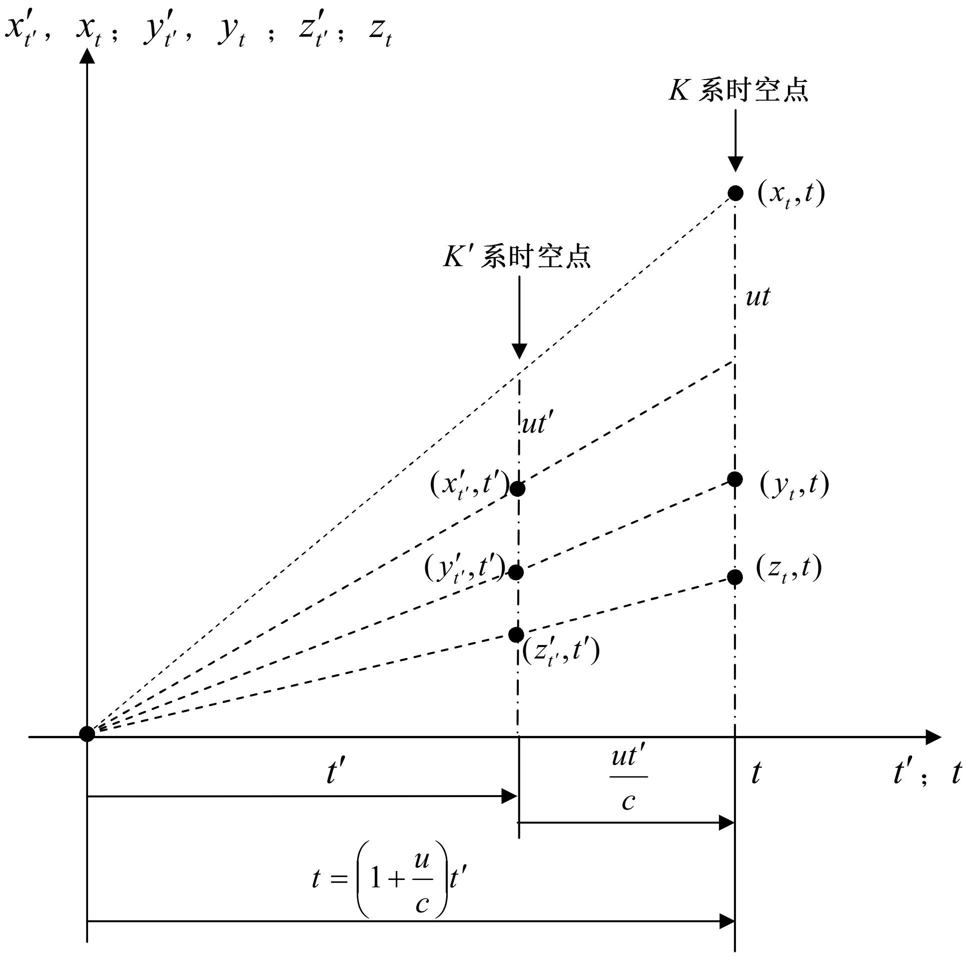


图 10 特殊 Z 变换的时空图

“相对性原理”检验

将特殊 Z 变换

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}}(x-ut), \\ y' = \dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}}y, \\ z' = \dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}}z, \\ t' = \dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}}t \end{cases}$$

表为矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}} & 0 & 0 & -\dfrac{u}{1+\dfrac{u}{c}} \\ 0 & \dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

方程组的变换矩阵 Φ 为：

$$\Phi = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}} & 0 & 0 & -\dfrac{u}{1+\dfrac{u}{c}} \\ 0 & \dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}} \end{bmatrix} = \frac{1}{1+\dfrac{u}{c}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

逆变换矩阵 Φ^{-1} 为：

$$\Phi^{-1}=\frac{1}{\left(\frac{1}{1+\frac{u}{c}}\right)^{4}}\begin{bmatrix}\left(\frac{1}{1+\frac{u}{c}}\right)^{3} & 0 & 0 & \left(\frac{1}{1+\frac{u}{c}}\right)^{3}u\\ 0 & \left(\frac{1}{1+\frac{u}{c}}\right)^{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{1+\frac{u}{c}}\right)^{3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{1+\frac{u}{c}}\right)^{3}\end{bmatrix}$$

$$=\left(1+\frac{u}{c}\right)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & u\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

可见，**变换矩阵** Φ **与逆变换矩阵** Φ^{-1} 具有完全相同的张量形式。而且，有：

$$\Phi\times\Phi^{-1}=\frac{1}{1+\frac{u}{c}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -u\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\times\left(1+\frac{u}{c}\right)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & u\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -u\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & u\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

所以，**周方变换（特殊 Z 变换）**满足**“相对性原理”**。

（三）伽利略变换

伽利略变换是**周方变换**（**特殊 Z 变换**）在**“真空中光速为无限大”**条件下的特例。在上面的**特殊 Z 变换**

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} = \frac{1}{1+\frac{u}{c}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \frac{1}{1+\frac{u}{c}} \begin{bmatrix} (x-ut) \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

中令$c=\infty$，即得到**伽利略变换**：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x-ut) \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

即：

$$\begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

伽利略变换沿x轴、y轴及z轴的时空图示于图 11、图 12、图 13。

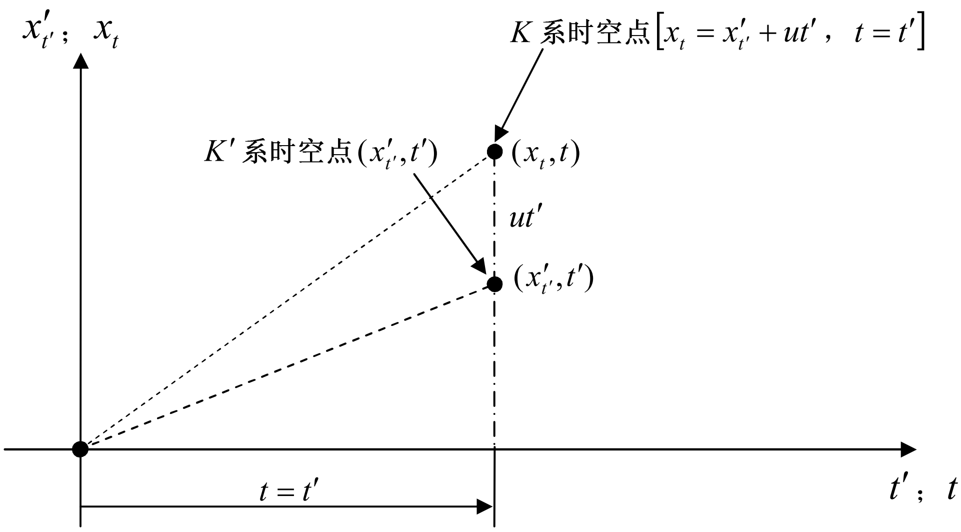


图 11 伽利略变换沿x轴的时空图

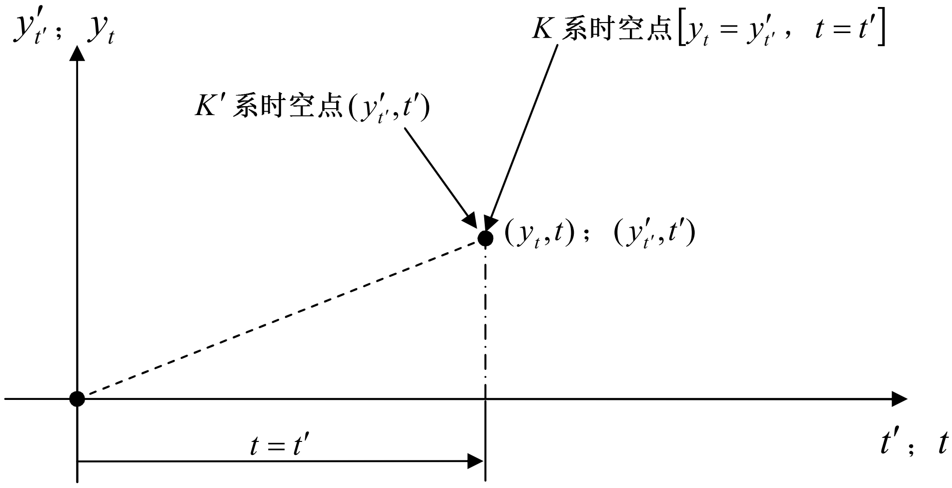


图 12 伽利略变换沿 y 轴的时空图

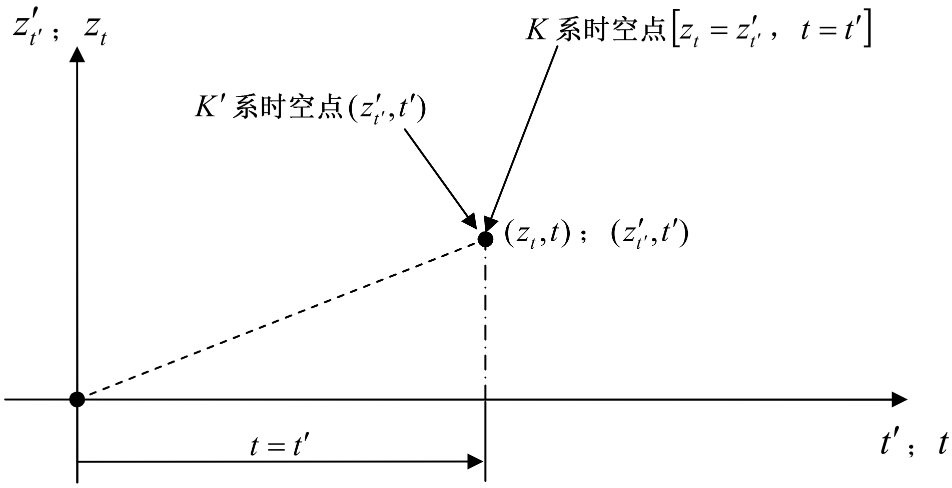


图 13 伽利略变换沿 z 轴的时空图

将图 11、图 12、图 13 三个图整合为一个图，得图 14。

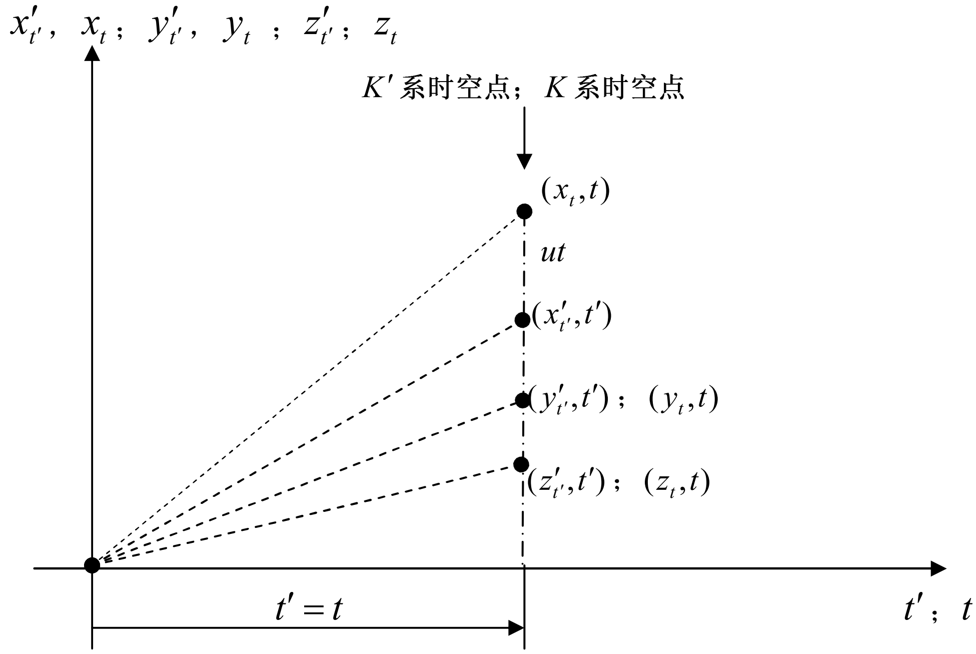


图 14 伽利略变换的时空图

“相对性原理”检验

伽利略变换为：

$$\begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

表为矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

方程组的**变换矩阵** Φ 为：

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

逆变换矩阵 Φ^{-1} 为：

$$\Phi^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&u\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

可见，**变换矩阵** Φ 与**逆变换矩阵** Φ^{-1} 具有完全相同的张量形式。而且，有：

$$\Phi\times\Phi^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&-u\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&0&0&u\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

所以，**（经典的）伽利略变换**满足**“相对性原理”（“相似性原理”）**。

（四）（相向运动的）“特殊 Z 变换”

设：K' 系沿着 K 系的 x 轴负方向作匀速直线平移相向运动，且保持：**x’**轴与 **x** 轴重合，**y’**轴与 **y** 轴平行及 **z’**轴与 **z** 轴平行。这种场合下，有 $u_x=-u$，$u_y=0$，$u_z=0$。

K' 系与 K 系之间的关系示于图 15。

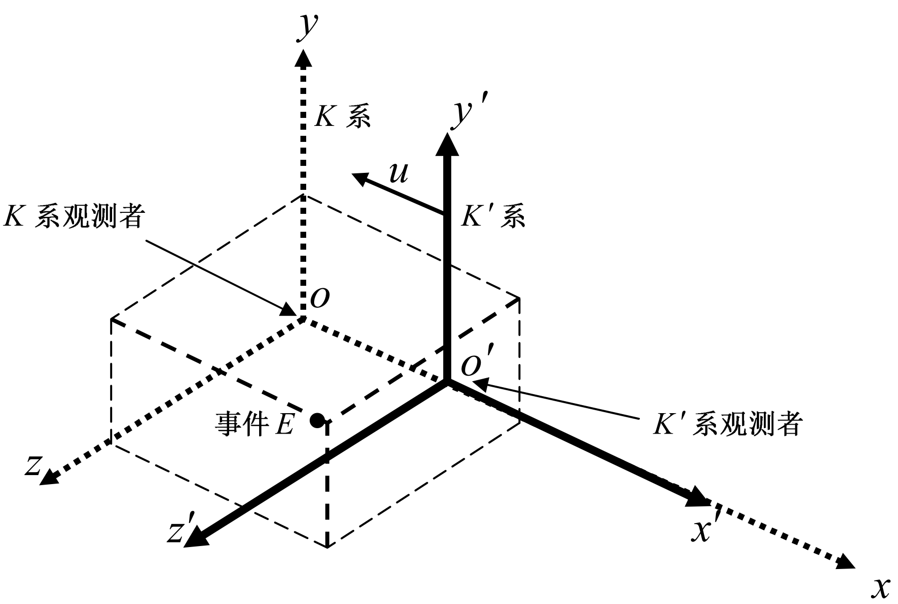


图 15 K' 系与 K 系之间的关系

于是，得到（相向运动的）“特殊 Z 变换”方程组：

$$\left(1-\frac{u}{c}\right)\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\\t'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&-u\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\\t'\end{bmatrix}=\frac{1}{1-\frac{u}{c}}\begin{bmatrix}1&0&0&-u\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}=\frac{1}{1-\frac{u}{c}}\begin{bmatrix}(x-ut)\\y\\z\\t\end{bmatrix}$$

即：

$$\begin{cases}x'=\dfrac{1}{1-\frac{u}{c}}(x-ut)\,,\\ y'=\dfrac{1}{1-\frac{u}{c}}y\,,\\ z'=\dfrac{1}{1-\frac{u}{c}}z\,,\\ t'=\dfrac{1}{1-\frac{u}{c}}t\end{cases}$$

（相向运动的）“特殊 Z 变换”的时空图示于图 16、图 17、图 18。

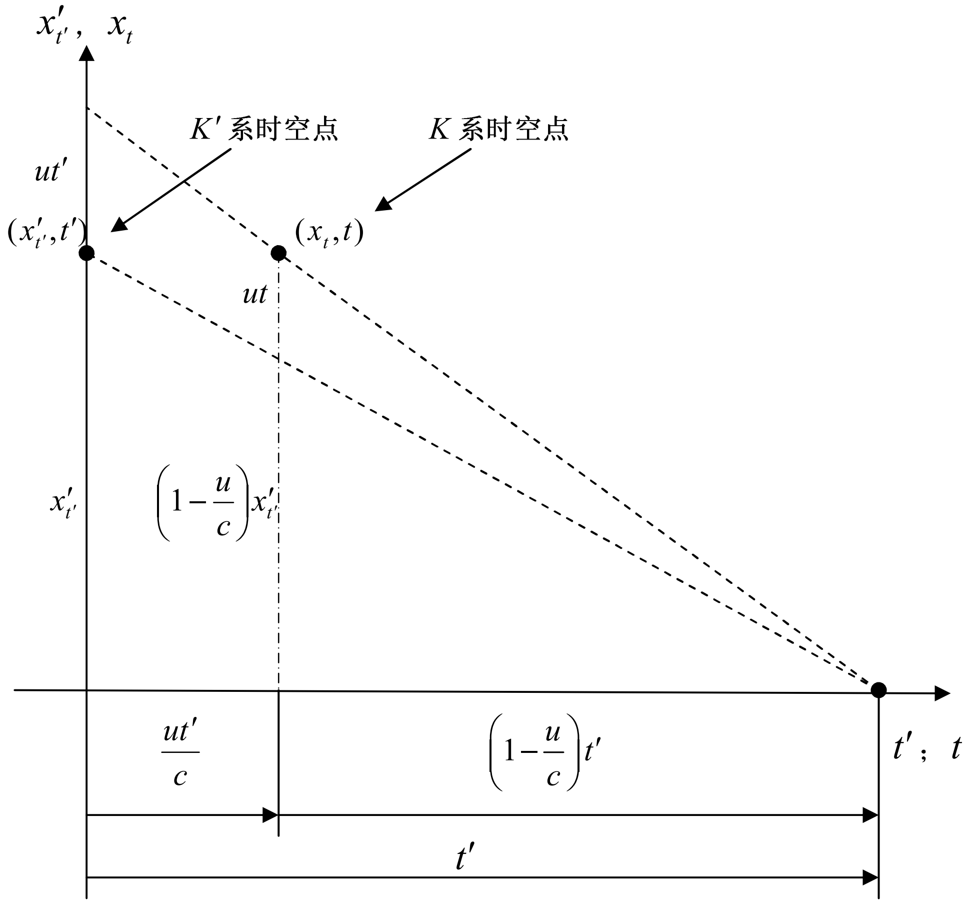


图 16 （相向运动的）“特殊 Z 变换”沿 x 轴的时空图

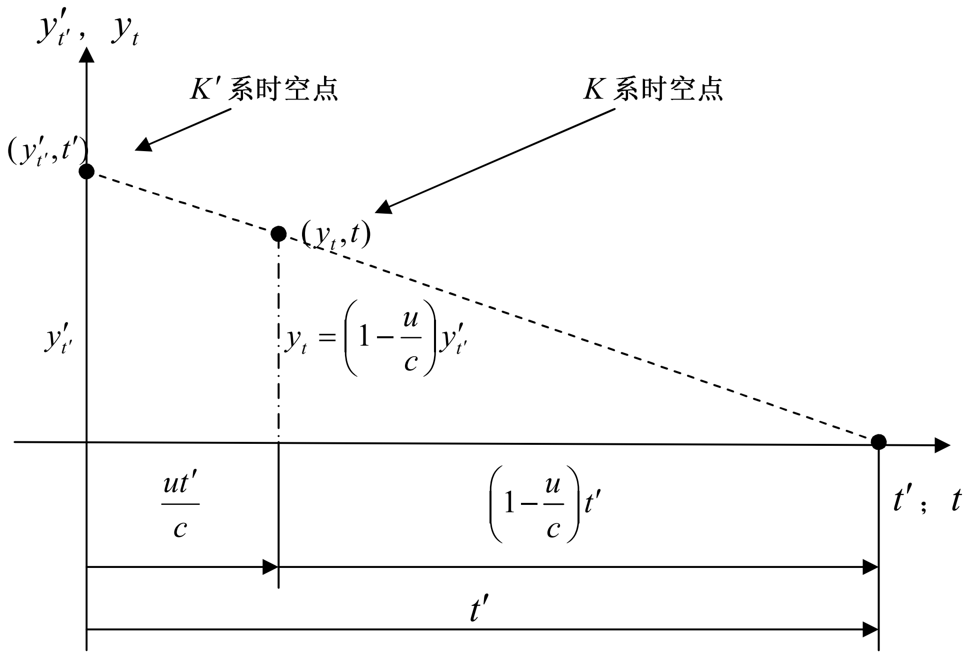


图 17 （相向运动的）“特殊 Z 变换”沿 y 轴的时空图

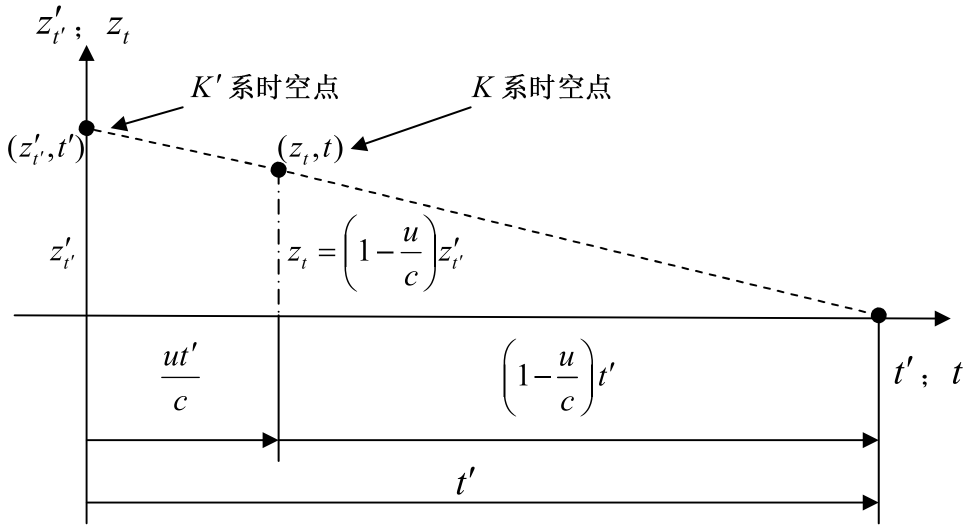


图 18 （相向运动的）“特殊 Z 变换”沿 z 轴的时空图

将图 16、图 17、图 18 三个图整合为一个图，得图 19。

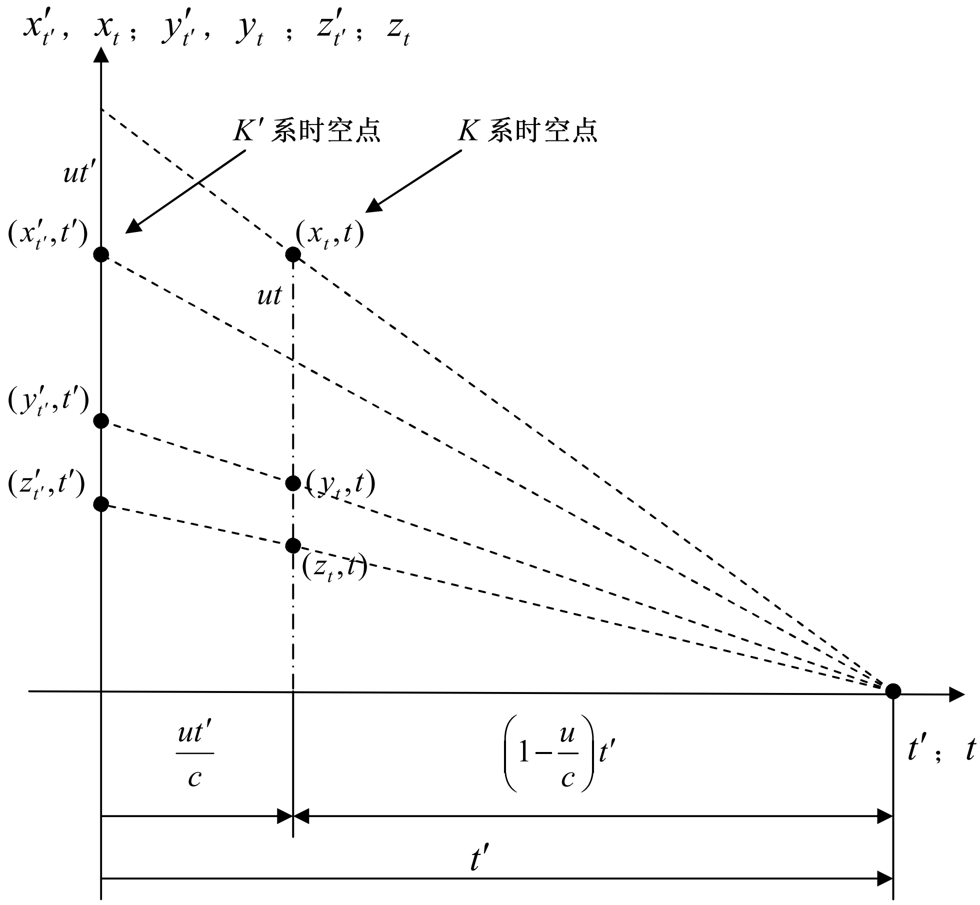


图 19 （相向运动的）“特殊 Z 变换”的时空图

“相对性原理”检验

（相向运动的）“特殊 Z 变换”为：

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{1-\dfrac{u}{c}}(x-ut), \\ y' = \dfrac{1}{1-\dfrac{u}{c}}y, \\ z' = \dfrac{1}{1-\dfrac{u}{c}}z, \\ t' = \dfrac{1}{1-\dfrac{u}{c}}t \end{cases}$$

表为矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1-\dfrac{u}{c}} & 0 & 0 & -\dfrac{u}{1-\dfrac{u}{c}} \\ 0 & \dfrac{1}{1-\dfrac{u}{c}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{1-\dfrac{u}{c}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{1-\dfrac{u}{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

方程组的变换矩阵 Φ 为：

$$\Phi = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1-\dfrac{u}{c}} & 0 & 0 & -\dfrac{u}{1-\dfrac{u}{c}} \\ 0 & \dfrac{1}{1-\dfrac{u}{c}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{1-\dfrac{u}{c}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{1-\dfrac{u}{c}} \end{bmatrix} = \frac{1}{1-\dfrac{u}{c}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

逆变换矩阵Φ^{-1}为：

$$\Phi^{-1}=\frac{1}{\left(\frac{1}{1-\frac{u}{c}}\right)^4}\begin{bmatrix}\left(\frac{1}{1-\frac{u}{c}}\right)^3 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{1-\frac{u}{c}}\right)^3 u\\ 0 & \left(\frac{1}{1-\frac{u}{c}}\right)^3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{1-\frac{u}{c}}\right)^3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{1-\frac{u}{c}}\right)^3\end{bmatrix}$$

$$=\left(1-\frac{u}{c}\right)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & u\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

可见，变换矩阵Φ与逆变换矩阵Φ^{-1}具有完全相同的张量形式。而且，有：

$$\Phi\times\Phi^{-1}=\frac{1}{1-\frac{u}{c}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -u\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\times\left(1-\frac{u}{c}\right)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & u\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -u\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & u\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

所以，（相向运动的）“特殊 Z 变换”满足“相对性原理”。

参考系相离运动及相向运动的时空图示于图 20、图 21、图 22。

在图 20 中，K'系沿K系的x轴作速度为u的直线平移相对运动。在时刻t'，K'系瞬刻以原速率返回。

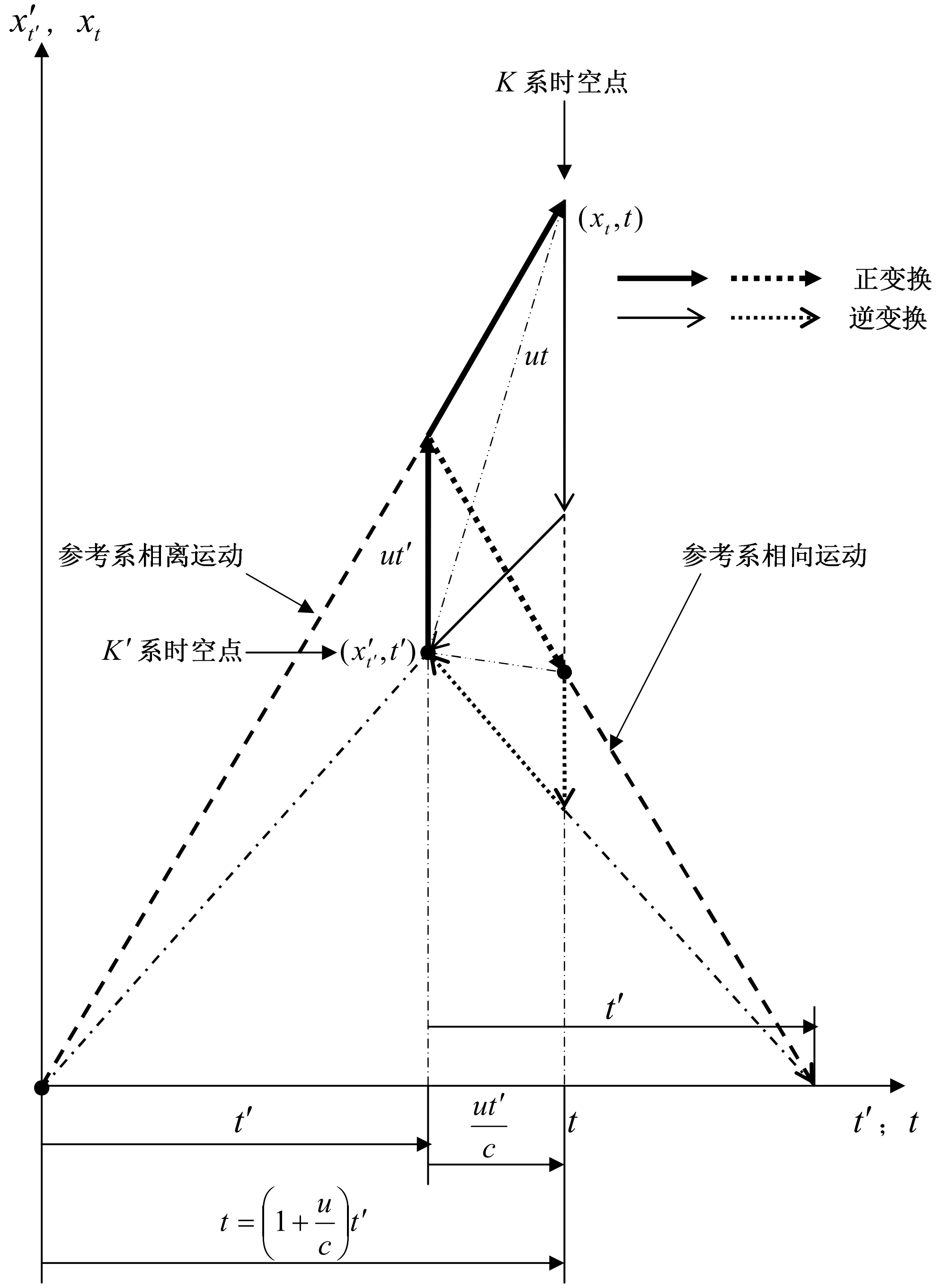


图 20 参考系相离运动及相向运动的沿 x 轴时空图

在图 21 中，K' 系沿 K 系的 x 轴作速度为 u 的直线平移相对运动。在时刻 t'，K' 系瞬刻以小于 $|u|$ 的相对速率向 K 系返回。

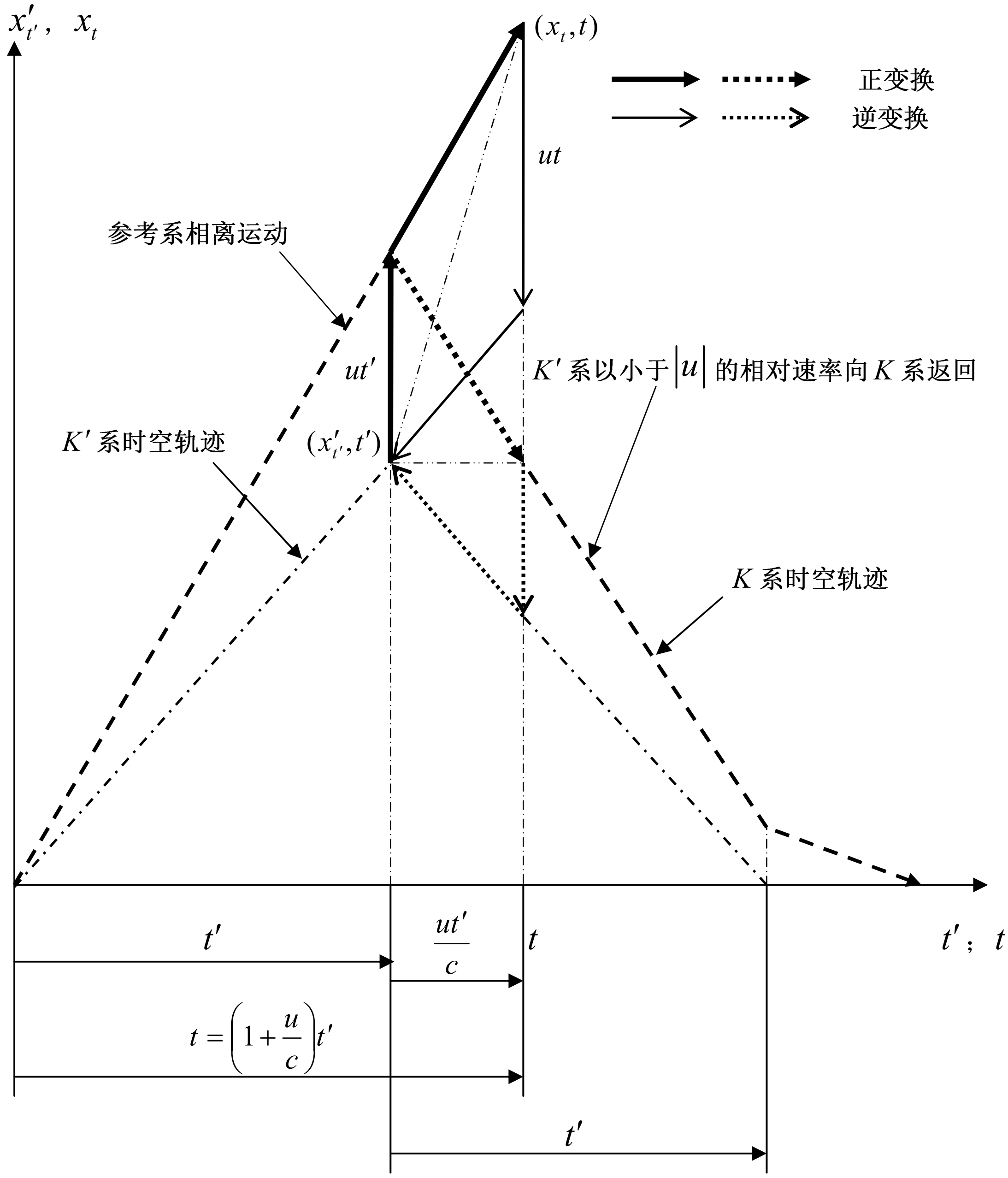


图 21 参考系相离运动及相向运动的沿 x 轴时空图

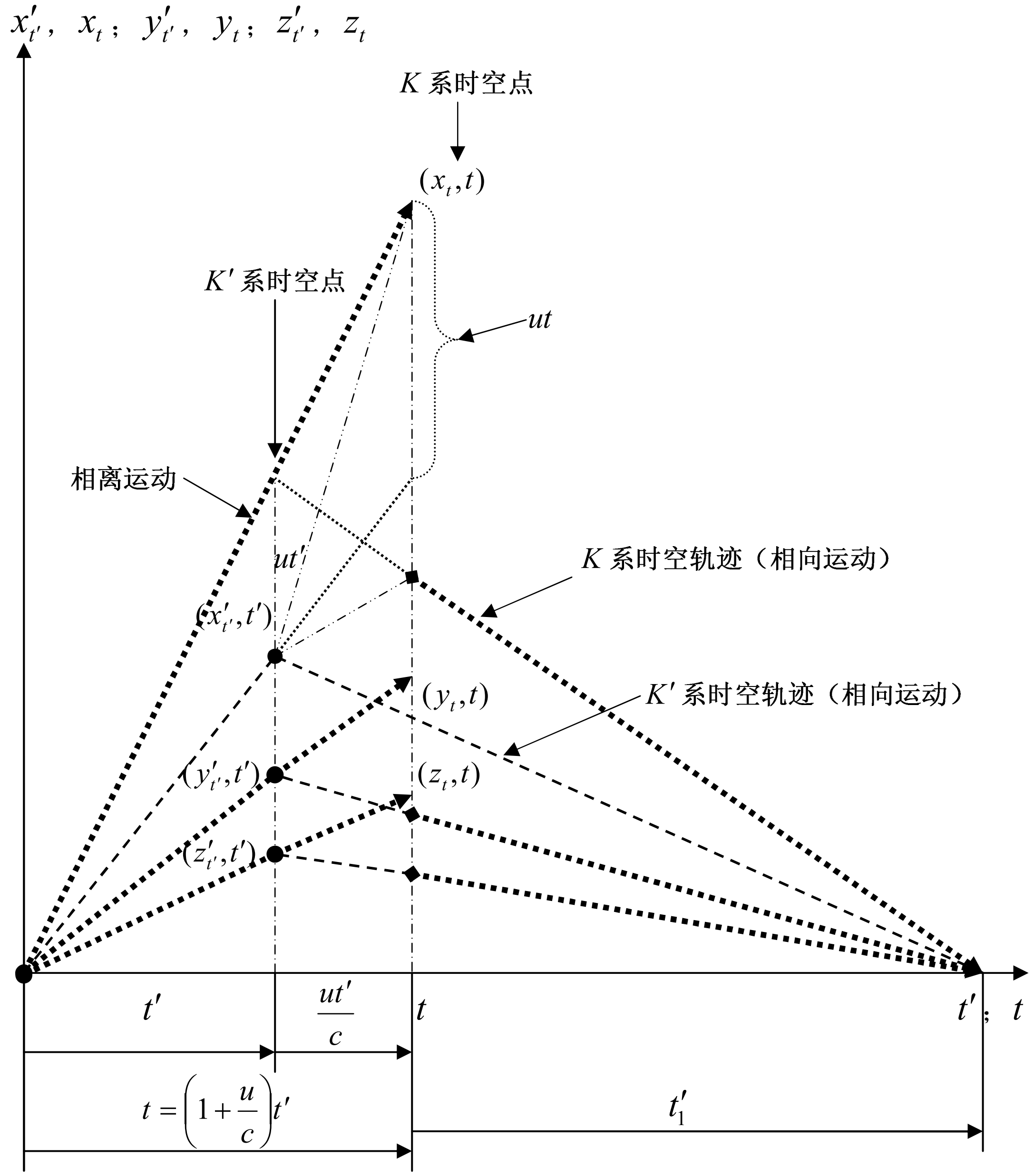


图 22 参考系相离运动及相向运动的时空图

相离运动与相向运动互相转换时 Z 变换的时空轨迹示于图 23、图 24。

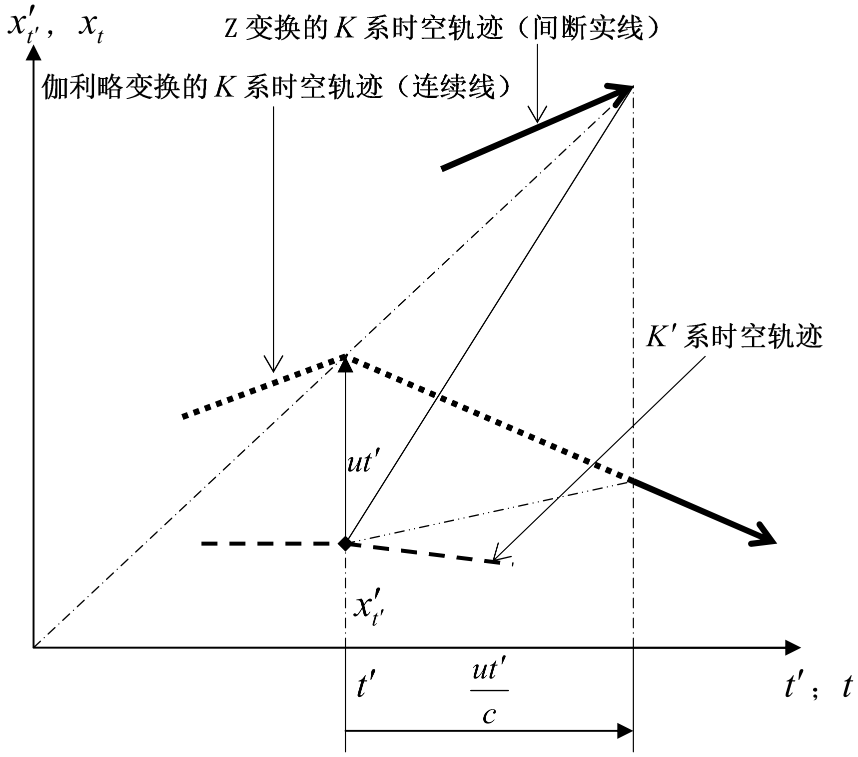


图 23 相离运动转为相向运动时 Z 变换的时空轨迹

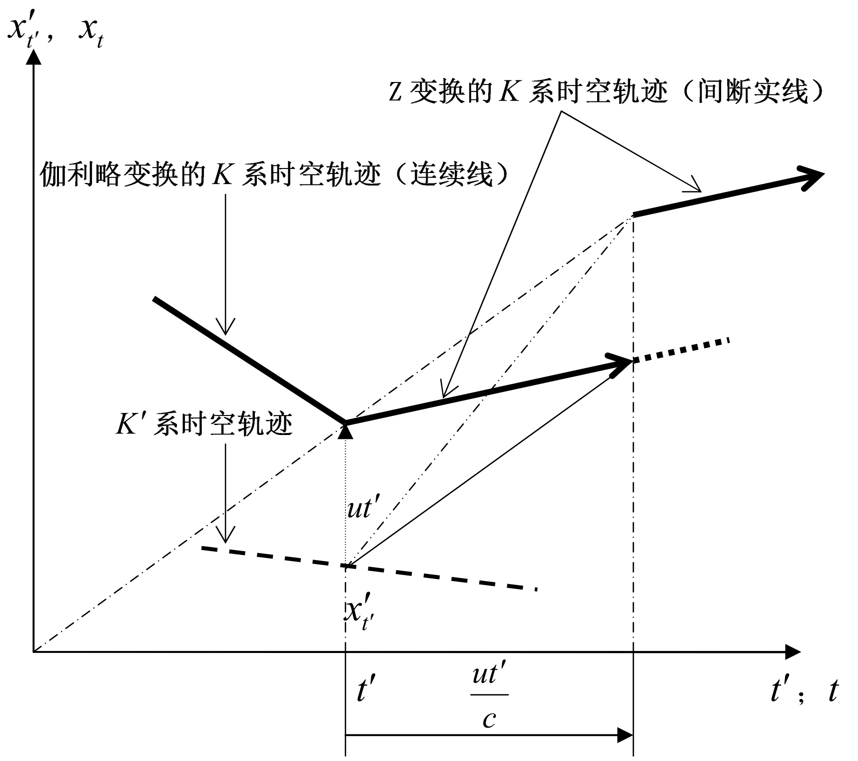


图 24 相向运动转为相离运动时 Z 变换的时空轨迹

（五）Z 变换与伽利略变换沿 x 轴时空轨迹之对照

Z 变换与伽利略变换的时空轨迹示于图 25、图 26、图 27、图 28。

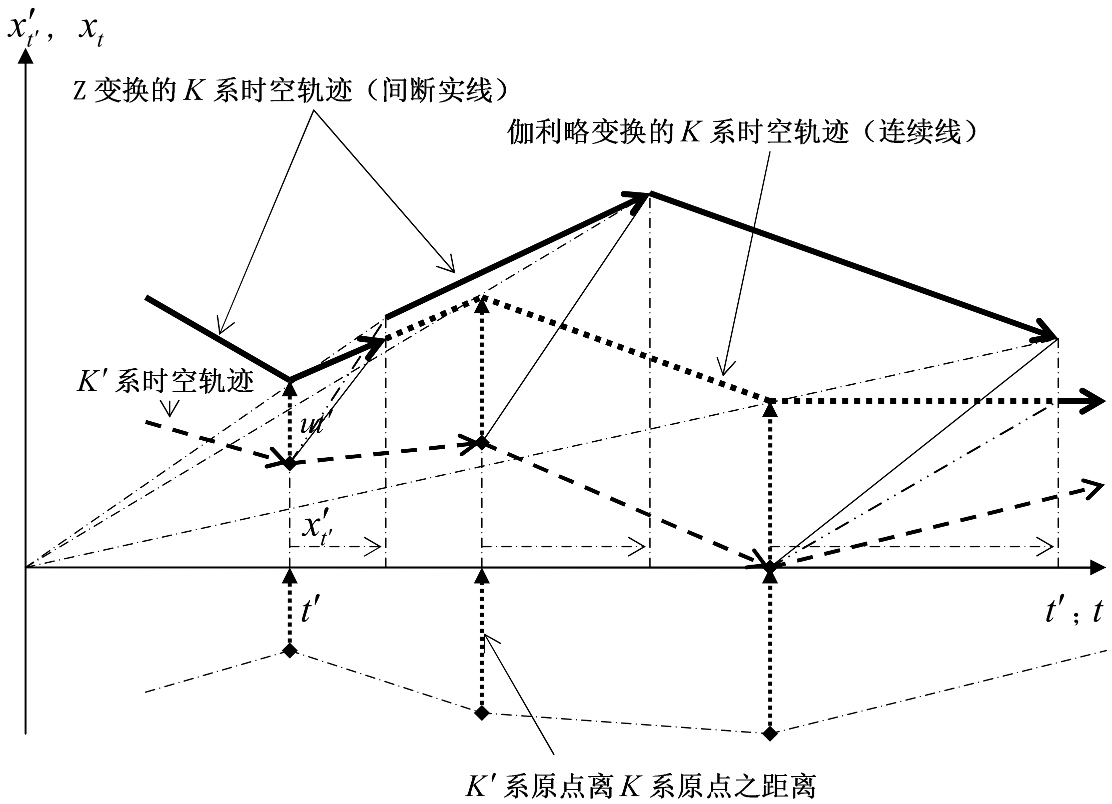


图 25 Z 变换与伽利略变换的沿 x 轴时空轨迹之比较

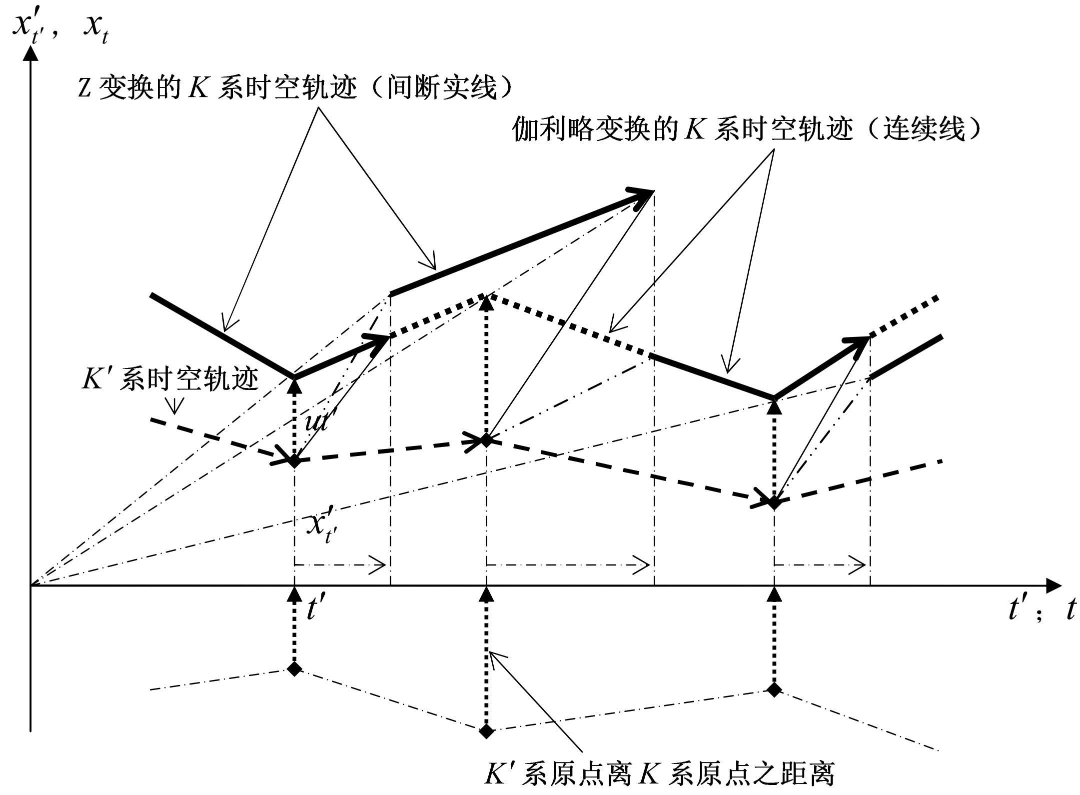


图 26 Z 变换与伽利略变换的沿 x 轴时空轨迹之比较

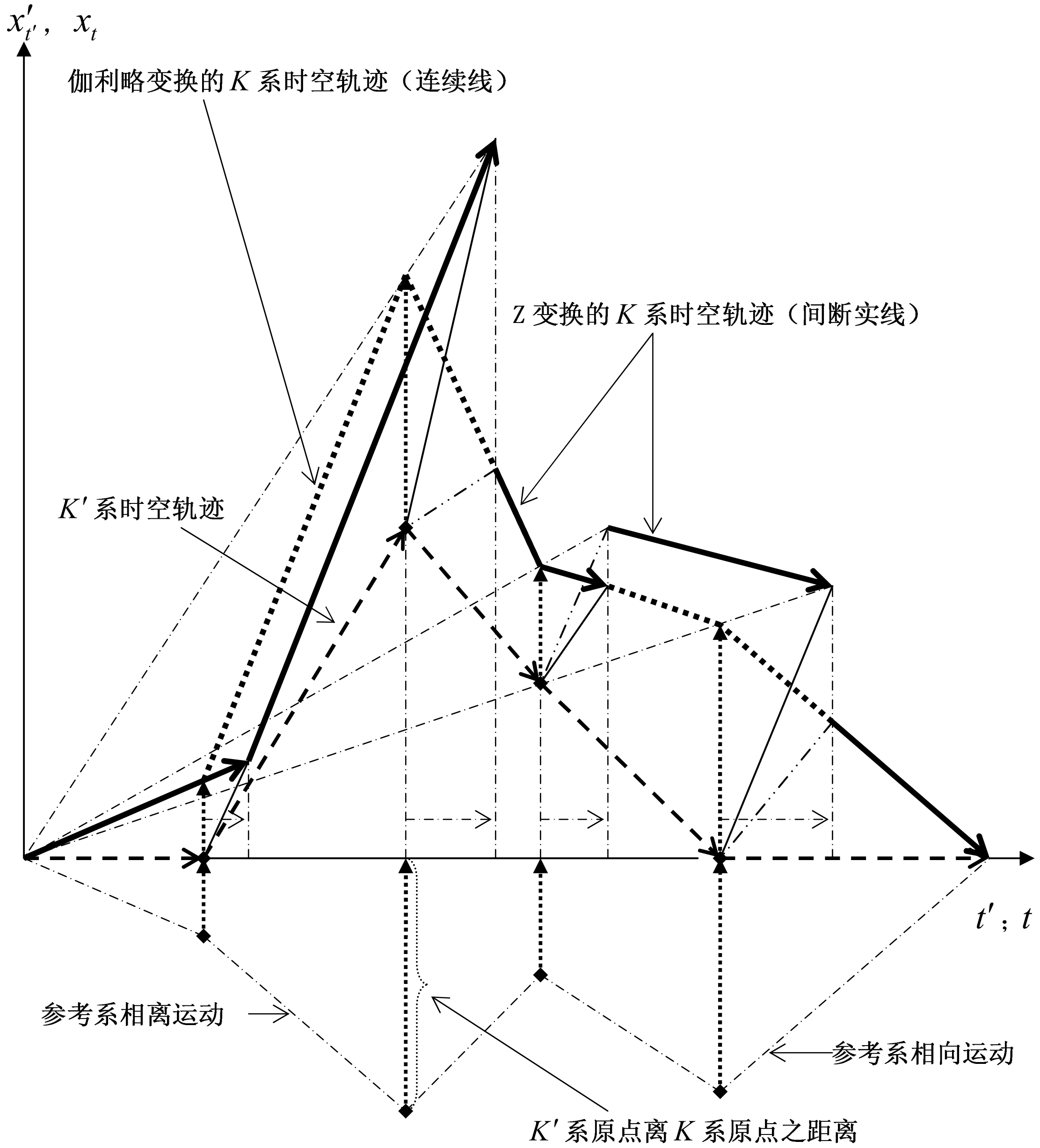


图 27 Z 变换与伽利略变换的沿 x 轴时空轨迹之比较

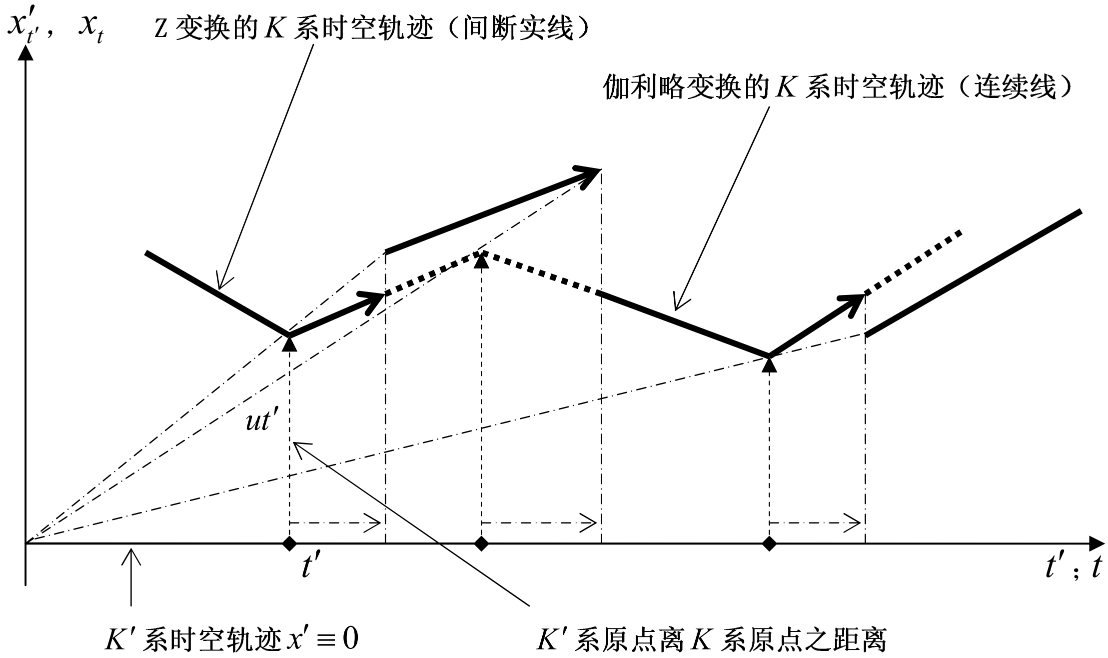


图 28 Z 变换与伽利略变换的沿 x 轴时空轨迹之比较

（六）Z 变换在x轴、y轴、z轴方向上时空轨迹的形成

下面给出x轴、y轴、z轴方向上 Z 变换的**时空轨迹**的形成过程。

（A）单一匀速相对运动

单一匀速相对运动(相对速度u)下 Z **变换**的时空点示于**图** 29。

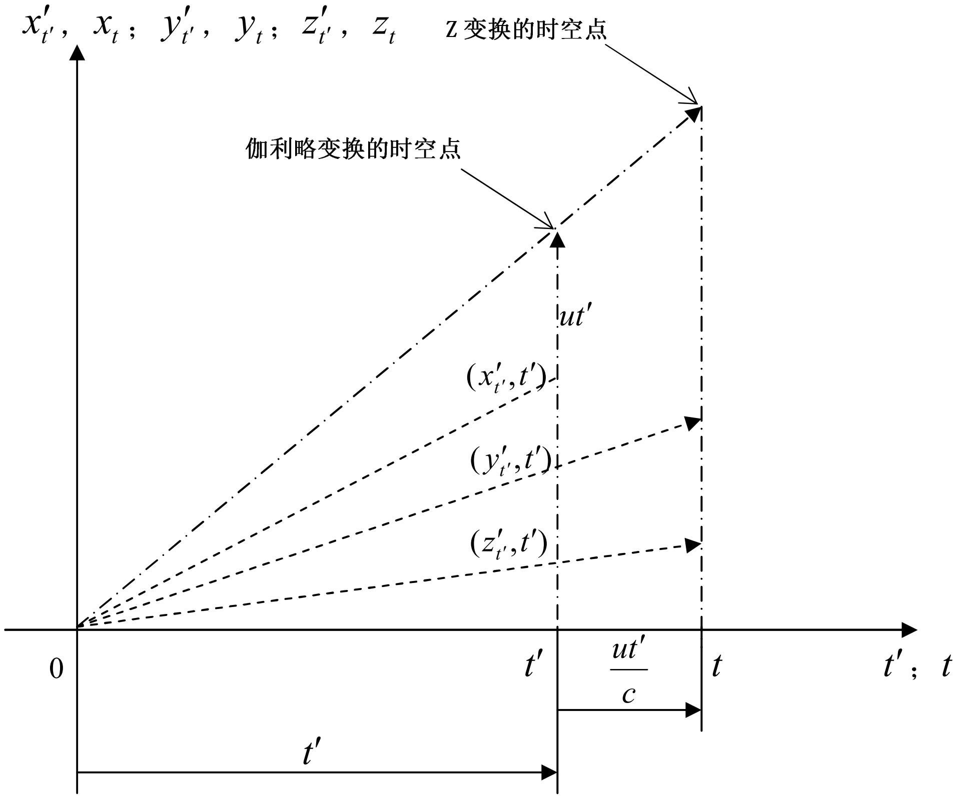


图 29 单一匀速相对运动下 Z 变换的时空点

参看**图** 29。对于任意时刻t'，都有：参考系相对速度为u，$u>0$。可得：

$$s(t')=ut'$$

式中$s(t')$为在时刻t'时K'系原点（K'**系观测者**）离K系原点（K **系观测者**）之距离。

K **系观测者**与K' **系观测者**对同一运动质点进行测量时，由于K'系沿K系的x轴正方向作匀速平移相对运动且光速为有限值，故K **系观测者**要在K' **系观测者**见到该运动质点的时刻t'之后的时刻t才可见到该运动质点。所以，有：

$$t=t'+\frac{s(t')}{c}$$

将$s(t')=ut'$代入此式，得：

$$t=t'+\frac{s(t')}{c}=\left[1+\frac{s(t')}{ct'}\right]t'=\left(1+\frac{ut'}{ct'}\right)t'=\left(1+\frac{u}{c}\right)t'$$

这就是 Z **变换**的**时间变换式**。根据此种表达形式的**时间变换式**相应地可得 Z **变换**的**空间变换式**：

$$\begin{cases} x(t) = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)\left[x'(t') + s(t')\right] = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)\left[x'(t') + ut'\right] \\ y(t) = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)y'(t') \\ z(t) = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)z'(t') \end{cases}$$

Z **变换**的**“逆变换”**为：

$$\begin{cases} t' = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1} t \\ x'(t') = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1} x(t) - ut' \\ y'(t') = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1} y(t) \\ z'(t') = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1} z(t) \end{cases}$$

(B) **分段匀速相对运动**

第 1 个匀速相对运动时段为$0 < t' \le t_1'$。第 1 个匀速相对运动时段$\left(0，\ t_1'\right]$内的时空点示于图 30。

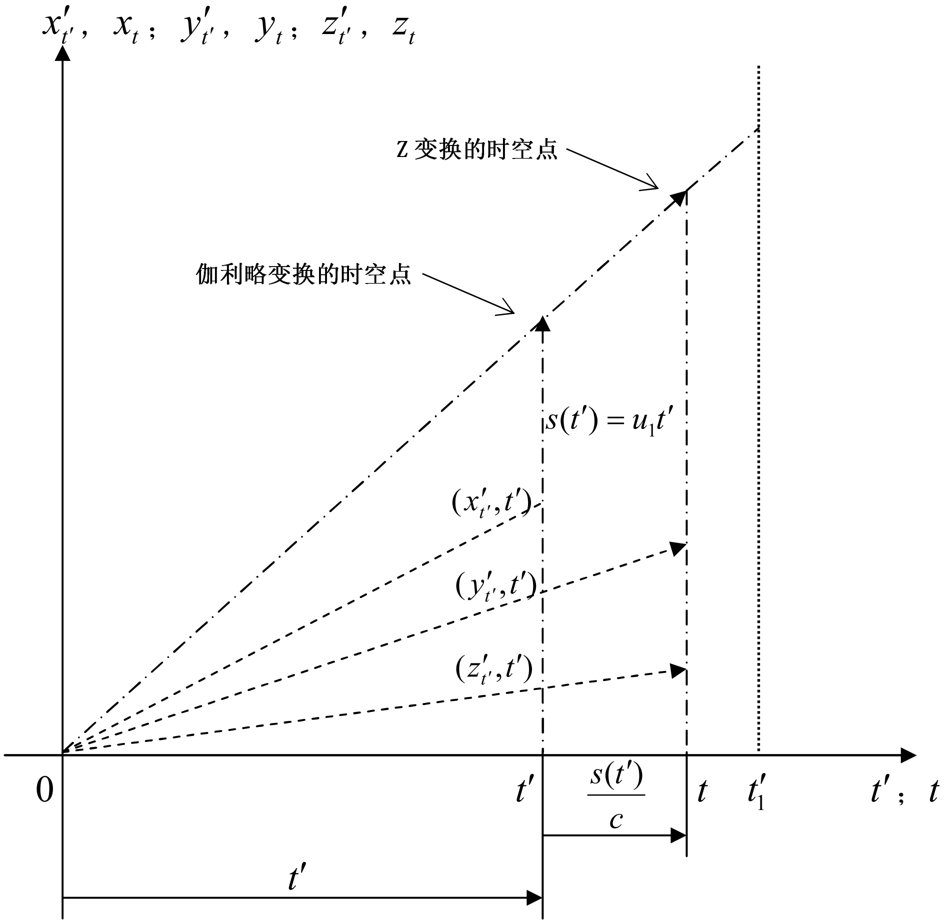


图 30 第 1 个匀速相对运动时段 $(0,\ t'_1]$ 内的时空点

参看图 30。对于第 1 时段 $(0,\ t'_1]$ 内的任意时刻 $t' \in (0,\ t'_1]$，有：在第 1 时段 $(0,\ t'_1]$ 内，参考系相对速度为 u_1，$u_1 > 0$。可得：

$$s(t') = u_1 t'$$

式中 $s(t')$ 为在时刻 t' 时 K' 系原点（K' **系观测者**）离 K 系原点（K **系观测者**）之距离。

K **系观测者**与 K' **系观测者**对同一运动质点进行测量时，由于 K' 系沿 K 系的 x 轴正方向作匀速平移相对运动且光速为有限值，故 K **系观测者**要在 K' **系观测者**见到该运动质点的时刻 t' 之后的时刻 t 才可见到该运动质点。所以，有：

$$t = t' + \frac{s(t')}{c}$$

将 $s(t') = u_1 t'$ 代入此式，得：

$$t = t' + \frac{s(t')}{c} = \left[1 + \frac{s(t')}{ct'}\right] t' = \left[1 + \frac{u_1 t'}{ct'}\right] t' = \left[1 + \frac{u_1}{c}\right] t'$$

这就是 Z 变换的**时间变换式**。根据此种表达形式的**时间变换式**相应地可得 Z 变换的**空间变换式**：

$$\begin{cases} x(t)=\left[1+\dfrac{u_1}{c}\right]\left[x'(t')+s(t')\right]=\left[1+\dfrac{u_1}{c}\right]\left[x'(t')+u_1t'\right] \\ y(t)=\left[1+\dfrac{u_1}{c}\right]y'(t') \\ z(t)=\left[1+\dfrac{u_1}{c}\right]z'(t') \end{cases}$$

将所得结果列于表 5。

表 5 （第 1 时段）

（第 1 时段）： $0<t'\le t_1'$； （t_1'—相对运动变动时刻） $s(t')=u_1t'$； $s(t_1')=u_1t_1'$
$t=t'+\dfrac{s(t')}{c}=\left[1+\dfrac{s(t')}{ct'}\right]t'=\left[1+\dfrac{u_1t'}{ct'}\right]t'=\left[1+\dfrac{u_1}{c}\right]t'$
$x(t)=\left[1+\dfrac{u_1}{c}\right]\left[x'(t')+s(t')\right]=\left[1+\dfrac{u_1}{c}\right]\left[x'(t')+u_1t'\right]$
$y(t)=\left[1+\dfrac{u_1}{c}\right]y'(t')$
$z(t)=\left[1+\dfrac{u_1}{c}\right]z'(t')$

表 5 中的 Z 变换之**“逆变换”**列于表 6。

表 6　Z 变换之“逆变换”

（第 1 时段）：$0 < t' \le t'_1$；（t'_1—相对运动变动时刻）
$t' = \left(1 + \frac{u_1}{c}\right)^{-1} t$
$x'(t') = \left(1 + \frac{u_1}{c}\right)^{-1} x(t) - u_1 t'$
$y'(t') = \left(1 + \frac{u_1}{c}\right)^{-1} y(t)$
$z'(t') = \left(1 + \frac{u_1}{c}\right)^{-1} z(t)$

第 i 个（$i \ge 2$）匀速相对运动时段为$t'_{i-1} \le t' \le t'_i$。第 i 个（$i \ge 2$）匀速相对运动时段$\left[t'_{i-1},\ t'_i\right]$内的时空点示于图 31。

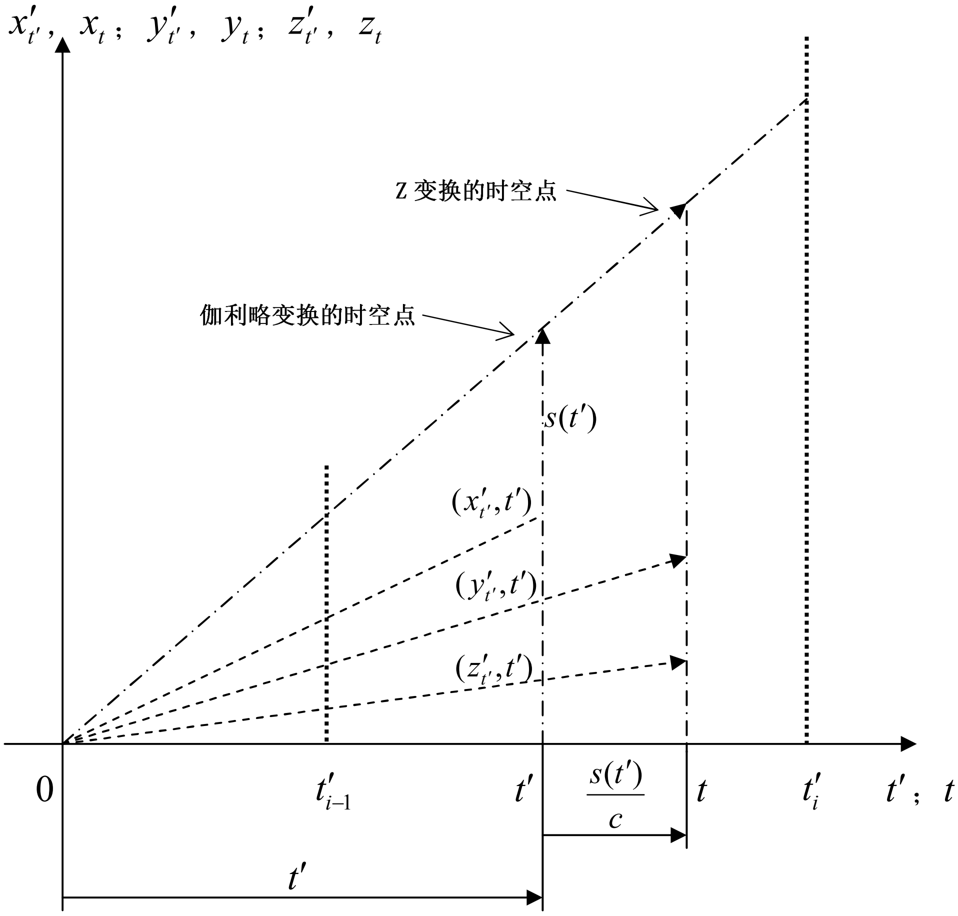


图 31 第 i 个匀速相对运动时段$\left[t'_{i-1},\ t'_i\right]$内的时空点

参看图 31。对于第 i 时段$\left[t'_{i-1},\ t'_i\right]$内的任意时刻$t' \in \left[t'_{i-1},\ t'_i\right]$，有：$\dfrac{s(t') - s(t'_{i-1})}{t' - t'_{i-1}} = u_i$，

u_i 为第 i 时段$\left[t'_{i-1},\ t'_i\right]$内的参考系相对速度。从公式$\dfrac{s(t') - s(t'_{i-1})}{t' - t'_{i-1}} = u_i$得：

$$s(t') = s(t'_{i-1}) + u_i(t' - t'_{i-1})$$

式中$s(t'_{i-1})$为**第**(i-1)**时段**之终点时刻t'_{i-1}时K'系原点（K'**系观测者**）离K系原点（K**系观测者**）之距离，故有：

$$s(t'_{i-1}) = u_1 t'_1 + \sum_{2}^{i-1} u_i(t'_i - t'_{i-1})$$

由此可得时刻t'时K'系原点离K系原点之距离$s(t')$：

$$\begin{aligned}
s(t') &= s(t'_{i-1}) + u_i(t' - t'_{i-1}) \\
&= u_1 t'_1 + \sum_{2}^{i-1} u_i(t'_i - t'_{i-1}) + u_i(t' - t'_{i-1}) \\
&= u_1 t'_1 + u_2(t'_2 - t'_1) + u_3(t'_3 - t'_2) + u_4(t'_4 - t'_3) + \ldots\ldots + u_{i-1}(t'_{i-1} - t'_{i-2}) + u_i(t' - t'_{i-1}) \\
&= (u_1 - u_2)t'_1 + (u_2 - u_3)t'_2 + (u_3 - u_4)t'_3 + \ldots\ldots + (u_{i-1} - u_i)t'_{i-1} + u_i t' \\
&= \sum_{2}^{i} (u_{i-1} - u_i)t'_{i-1} + u_i t'
\end{aligned}$$

即：
$$s(t') = \sum_{2}^{i} (u_{i-1} - u_i)t'_{i-1} + u_i t'$$

K**系观测者**与K'**系观测者**对同一运动质点进行观测时，由于K'系沿K系的x轴正方向作匀速平移相对运动且光速为有限值，故K**系观测者**要在K'**系观测者**见到该运动质点的时刻t'之后的时刻t才可以见到该运动质点。所以，有：

$$t = t' + \frac{s(t')}{c}$$

将$s(t') = \sum_{2}^{i} (u_{i-1} - u_i)t'_{i-1} + u_i t'$代入此式，得：

$$t = t' + \frac{s(t')}{c} = \left[1 + \frac{s(t')}{ct'}\right]t' = \left[1 + \frac{\sum_2^i (u_{i-1} - u_i)t'_{i-1} + u_i t'}{ct'}\right]t'$$

$$= \left(1 + \frac{u_i}{c} + \sum_{i=2}^{i} \frac{u_{i-1} - u_i}{c}\frac{t'_{i-1}}{t'}\right)t'$$

$$= \left\{1 + \sum_2^{i-1}\left(\frac{u_{i-1}}{c} - \frac{u_i}{c}\right)\frac{t'_{i-1}}{t'} + \left[\frac{u_{i-1}}{c}\frac{t'_{i-1}}{t'} + \frac{u_i}{c}\left(1 - \frac{t'_{i-1}}{t'}\right)\right]\right\}t'$$

$$= \left\{\left(1 + \frac{u_i}{c}\right) + \left[\sum_2^i\left(\frac{u_{i-1}}{c} - \frac{u_i}{c}\right)\frac{t'_{i-1}}{t'}\right]\right\}t'$$

这就是 Z 变换的时间变换式。根据这种表达形式的时间变换式相应地可得 Z 变换的空间变换式：

$$\begin{cases} x(t) = \left\{\left(1 + \frac{u_i}{c}\right) + \left[\sum_2^i\left(\frac{u_{i-1}}{c} - \frac{u_i}{c}\right)\frac{t'_{i-1}}{t'}\right]\right\}\left[x'(t') + \sum_2^i (u_{i-1} - u_i)t'_{i-1} + u_i t'\right] \\ y(t) = \left\{\left(1 + \frac{u_i}{c}\right) + \left[\sum_2^i\left(\frac{u_{i-1}}{c} - \frac{u_i}{c}\right)\frac{t'_{i-1}}{t'}\right]\right\}y'(t') \\ z(t) = \left\{\left(1 + \frac{u_i}{c}\right) + \left[\sum_2^i\left(\frac{u_{i-1}}{c} - \frac{u_i}{c}\right)\frac{t'_{i-1}}{t'}\right]\right\}z'(t') \end{cases}$$

第 i 时段（$i \ge 2$）内时刻 t'（$t'_{i-1} \le t' \le t'_i$）时的 Z 变换列于表 7 及表 8。

表 7 第 i 时段（$i \ge 2$）内时刻 t'（$t'_{i-1} \le t' \le t'_i$）时的 Z 变换

$t = \left(1 + \frac{u_i}{c}\right)t' + \sum_{i=2}^{i}\frac{u_{i-1} - u_i}{c}t'_{i-1} = \left\{\left(1 + \frac{u_i}{c}\right) + \left[\sum_2^i\left(\frac{u_{i-1}}{c} - \frac{u_i}{c}\right)\frac{t'_{i-1}}{t'}\right]\right\}t'$
$x(t) = \left\{\left(1 + \frac{u_i}{c}\right) + \left[\sum_2^i\left(\frac{u_{i-1}}{c} - \frac{u_i}{c}\right)\frac{t'_{i-1}}{t'}\right]\right\}\left[x'(t') + \sum_2^i (u_{i-1} - u_i)t'_{i-1} + u_i t'\right]$
$y(t) = \left\{\left(1 + \frac{u_i}{c}\right) + \left[\sum_2^i\left(\frac{u_{i-1}}{c} - \frac{u_i}{c}\right)\frac{t'_{i-1}}{t'}\right]\right\}y'(t')$
$z(t) = \left\{\left(1 + \frac{u_i}{c}\right) + \left[\sum_2^i\left(\frac{u_{i-1}}{c} - \frac{u_i}{c}\right)\frac{t'_{i-1}}{t'}\right]\right\}z'(t')$

表 8 第i时段（$i \ge 2$）内时刻t'（$t'_{i-1} \le t' \le t'_i$)时的 Z 变换之逆变换

$t' = \left(1 + \frac{u_i}{c}\right)^{-1}\left(t + \frac{u_2 - u_1}{c} t'_1 + \sum_3^i \frac{u_i - u_{i-1}}{c} t'_{i-1}\right)$ $= \left\{\left(1 + \frac{u_i}{c}\right) + \left[\sum_2^i \left(\frac{u_{i-1}}{c} - \frac{u_i}{c}\right)\frac{t'_{i-1}}{t'}\right]\right\}^{-1} t$
$x'(t') = \left\{\left(1 + \frac{u_i}{c}\right) + \left[\sum_2^i \left(\frac{u_{i-1}}{c} - \frac{u_i}{c}\right)\frac{t'_{i-1}}{t'}\right]\right\}^{-1} x(t) - \left[\sum_2^i (u_{i-1} - u_i)t'_{i-1} + u_i t'\right]$
$y'(t') = \left\{\left(1 + \frac{u_i}{c}\right) + \left[\sum_2^i \left(\frac{u_{i-1}}{c} - \frac{u_i}{c}\right)\frac{t'_{i-1}}{t'}\right]\right\}^{-1} y(t)$
$z'(t') = \left\{\left(1 + \frac{u_i}{c}\right) + \left[\sum_2^i \left(\frac{u_{i-1}}{c} - \frac{u_i}{c}\right)\frac{t'_{i-1}}{t'}\right]\right\}^{-1} z(t)$

在$u_1 = u_2 = u_3 = \ldots\ldots = u = const.$的场合下，Z 变换的‘正’变换式为：

$$\begin{cases} x(t) = \left(1+\frac{u}{c}\right)\left[x'(t') + ut'\right] \\ y(t) = \left(1+\frac{u}{c}\right) y'(t') \\ z(t) = \left(1+\frac{u}{c}\right) z'(t') \\ t = \left(1+\frac{u}{c}\right) t' \end{cases}$$

‘逆’变换式为：

$$\begin{cases} x'(t') = \left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1} x(t) - ut' \\ y'(t') = \left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1} y(t) \\ z'(t') = \left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1} z(t) \\ t' = \left(1+\frac{u}{c}\right)^{-1} t \end{cases}$$

（七）特殊 Z 变换在 x 轴、 y 轴、 z 轴方向的时空轨迹（示例）

下面是**特殊 Z 变换**的‘正’变换式及‘逆’变换式的示例。

‘正’变换：

设 $x'(t')=1+\sin t'$， $y'(t')=at'^2$， $z'(t')=bt'$，代入‘正’变换式，得：

$$
\begin{cases}
t=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)t' \\
x(t)=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)\left[x'(t')+ut'\right]=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)(1+\sin t'+ut') \\
\quad =\left(1+\dfrac{u}{c}\right)(1+\sin\dfrac{t}{1+\dfrac{u}{c}}+u\dfrac{t}{1+\dfrac{u}{c}})=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)\left(1+\sin\dfrac{t}{1+\dfrac{u}{c}}\right)+ut \\
y(t)=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)at'^2=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)at^2\left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-2}=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1}at^2 \\
z(t)=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)bt'=bt
\end{cases}
$$

‘逆’变换：

将 $x(t)=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)(1+\sin t'+ut')$， $y(t)=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)at'^2$， $z(t)=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)bt'$，代入‘逆’变换式，

得：

$$
\begin{cases}
t'=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1}t \\
x'(t')=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1}x(t)-ut'=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1}\left(1+\dfrac{u}{c}\right)(1+\sin t'+ut')-ut'=1+\sin t' \\
y'(t')=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1}y(t)=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1}\left(1+\dfrac{u}{c}\right)at'^2=at'^2 \\
z'(t')=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1}z(t)=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1}\left(1+\dfrac{u}{c}\right)bt'=bt'
\end{cases}
$$

计算结果（K' **系时空轨迹**与相应的 K **系时空轨迹**）示于**图 32、图 33、图 34**。

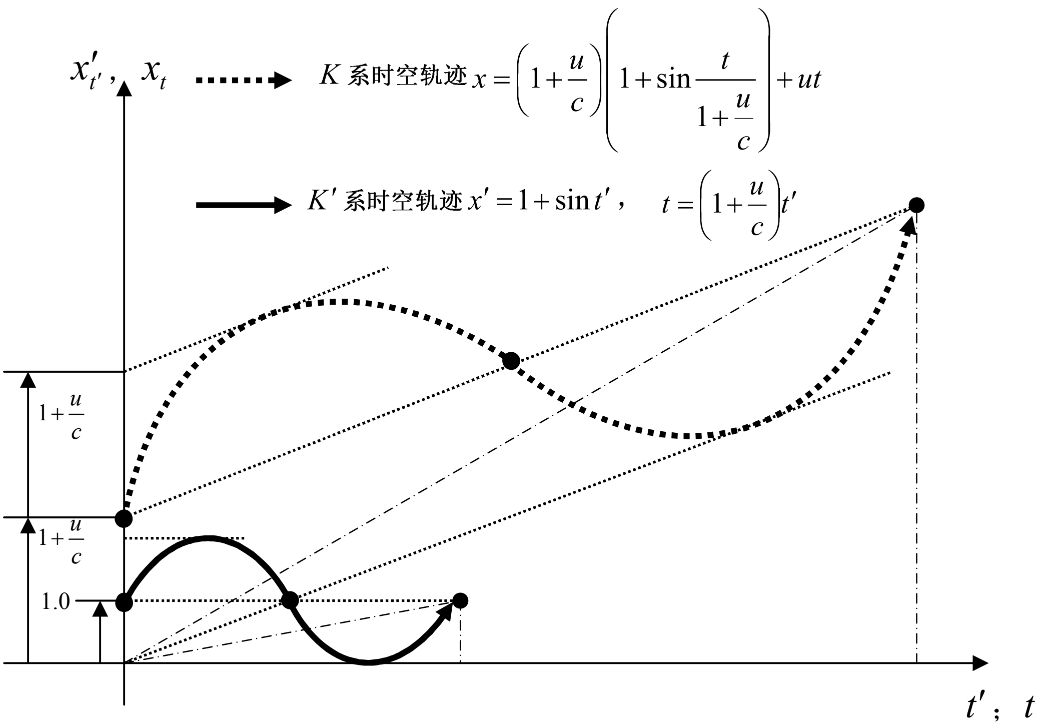


图 32 Z 变换下的 K 系时空轨迹与 K' 系时空轨迹

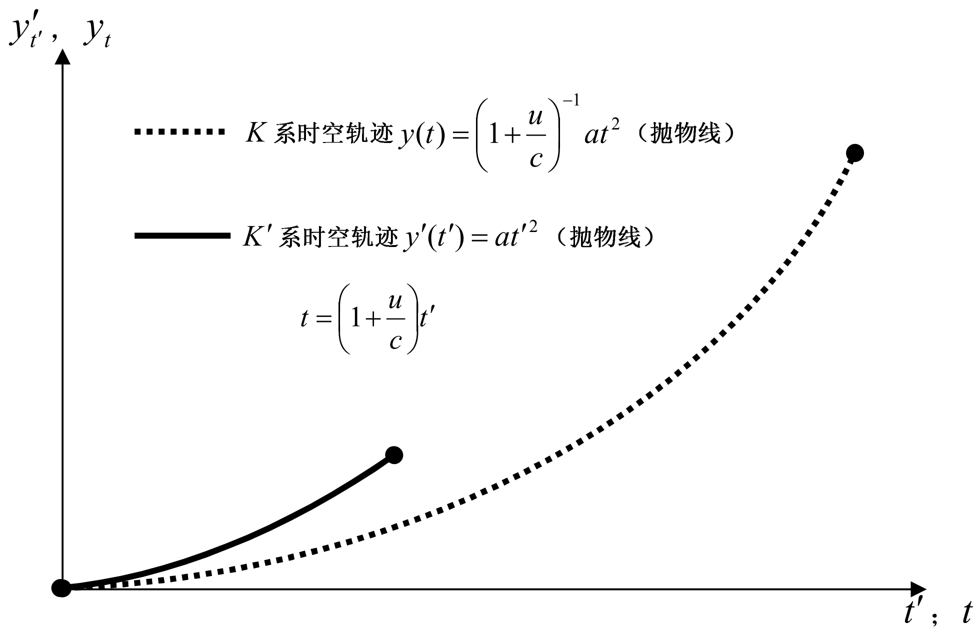


图 33 Z 变换下的 K 系时空轨迹与 K' 系时空轨迹

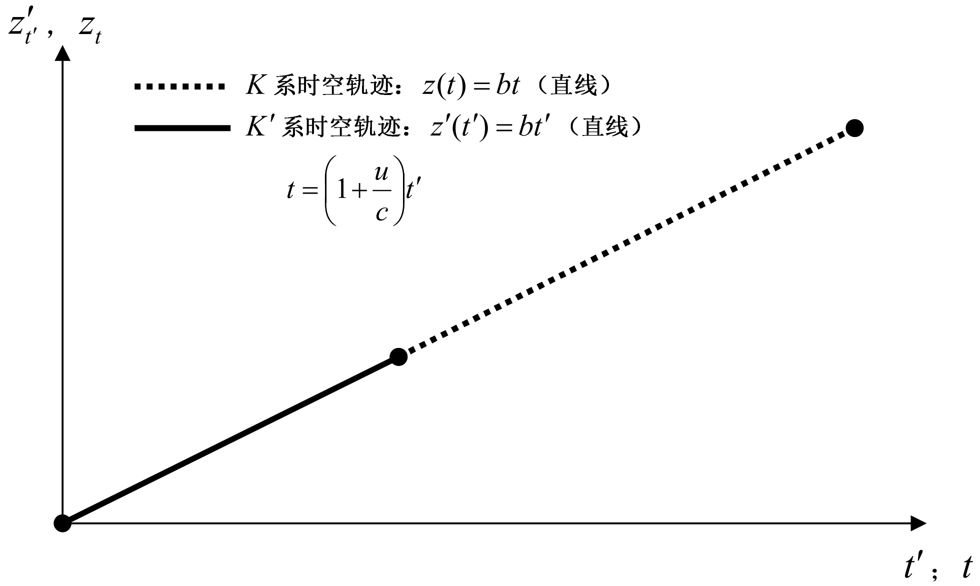


图 34 Z 变换下的K系时空轨迹与K'系时空轨迹

下面是 Z 变换的另一示例。

‘正’变换：

设 $x'(t')=kt'^2$， $y'(t')=at'^2$， $z'(t')=bt'$，代入‘正’变换式，得：

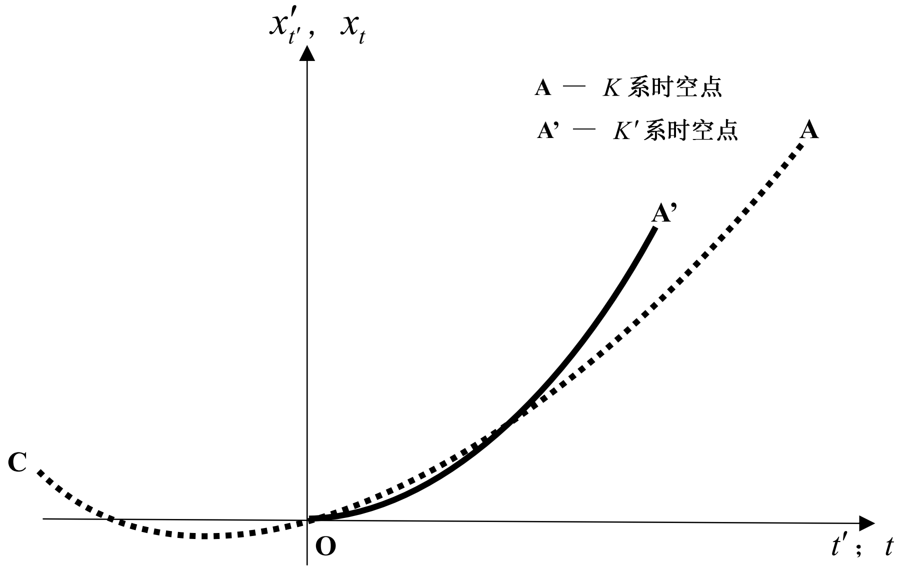
$$\begin{cases} t=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)t' \\ x(t)=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)\left[x'(t')+ut'\right]=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)(kt'^2+ut') \\ \quad =\left(1+\dfrac{u}{c}\right)\left[k\left(\dfrac{t}{1+\frac{u}{c}}\right)^2+u\dfrac{t}{1+\frac{u}{c}}\right]=\dfrac{c}{c+u}kt^2+ut \\ y(t)=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)at'^2=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)at^2\left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-2}=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1}at^2 \\ z(t)=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)bt'=bt \end{cases}$$

‘逆’变换：

将 $x(t)=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)(kt'^2+ut')$， $y(t)=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)at'^2$， $z(t)=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)bt'$，代入‘逆’变换式，得：

$$\begin{cases} t' = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1} t \\ x'(t') = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1} x(t) - ut' = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1}\left(1+\dfrac{u}{c}\right)(kt'^2 + ut') - ut' = kt'^2 \\ y'(t') = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1} y(t) = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1}\left(1+\dfrac{u}{c}\right) at'^2 = at'^2 \\ z'(t') = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1} z(t) = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)^{-1}\left(1+\dfrac{u}{c}\right) bt' = bt' \end{cases}$$

在 x 轴方向上的 K' 系时空轨迹 $x' = kt'^2$ 与相应的 K 系时空轨迹 $x = \dfrac{c}{c+u}kt^2 + ut$ 示于图 35。



K 系时空轨迹：$x = \dfrac{c}{c+u}kt^2 + ut$（曲线 **COA** — 带斜轴的抛物线）

K' 系时空轨迹：$x' = kt'^2$（曲线 **OA'** — 抛物线）

图 35 x 轴方向上的 K 系时空轨迹与 K' 系时空轨迹

Z 变换在 x 轴、y 轴及 z 轴方向上的 K 系时空轨迹示于图 36、图 37、图 38。

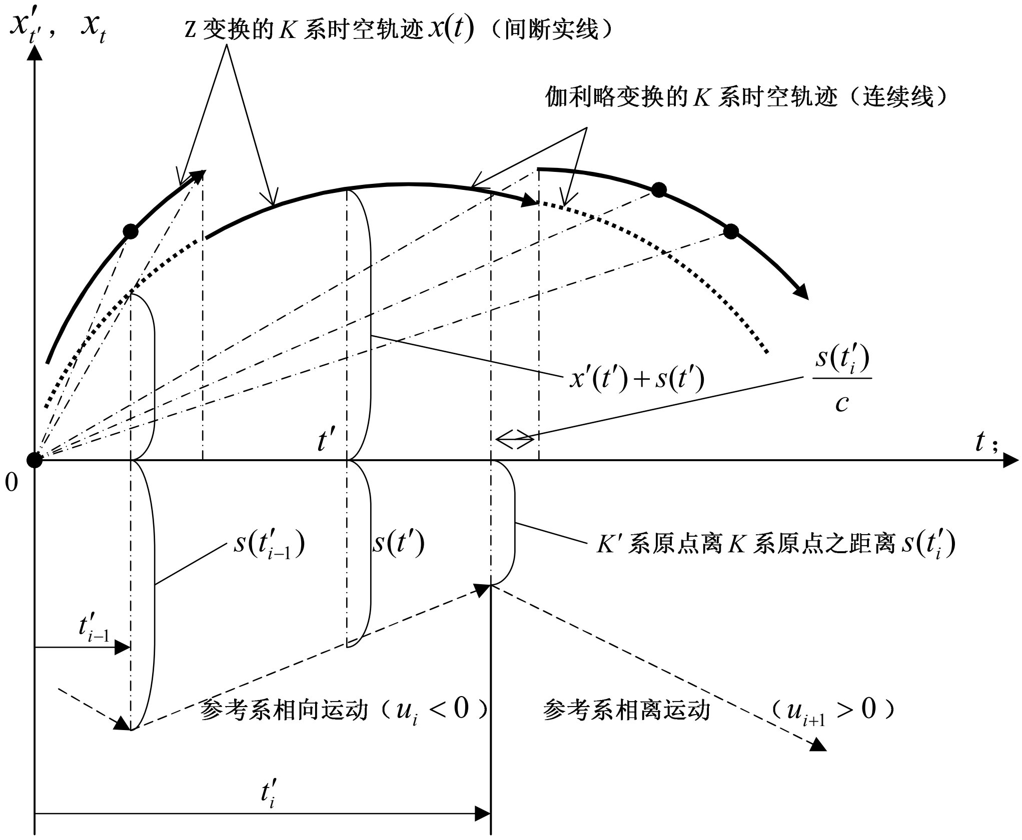


图 36 Z 变换在 x 轴方向上的 K 系时空轨迹

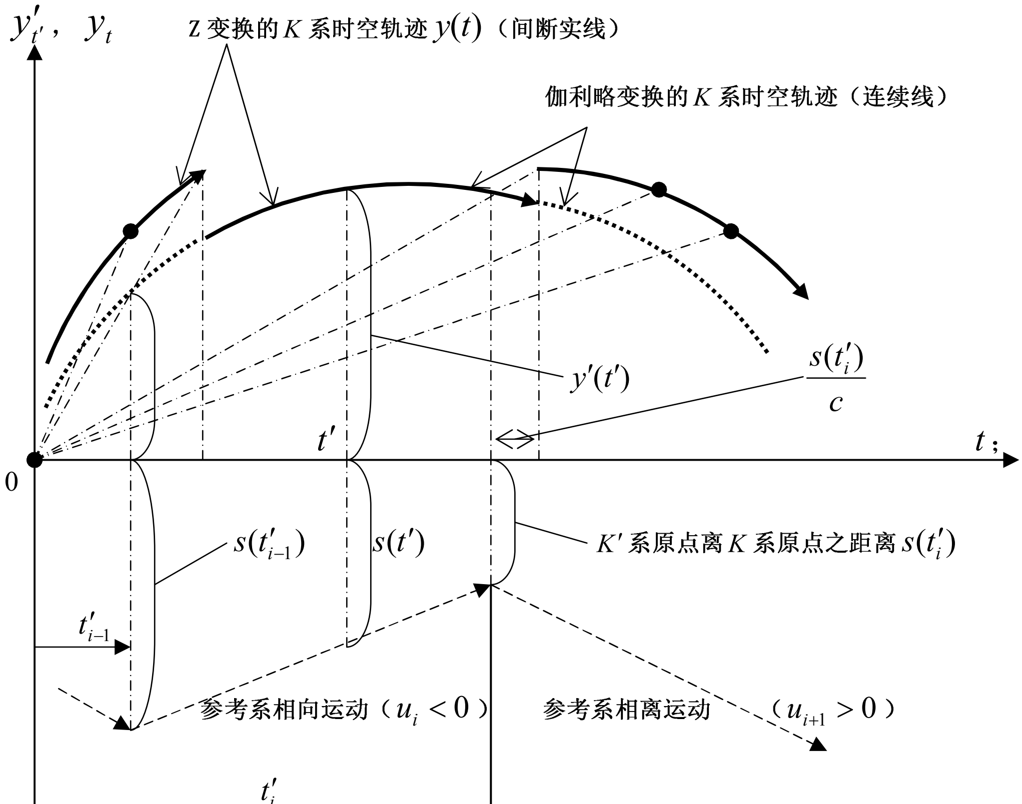


图 37 Z 变换在 y 轴方向上的 K 系时空轨迹

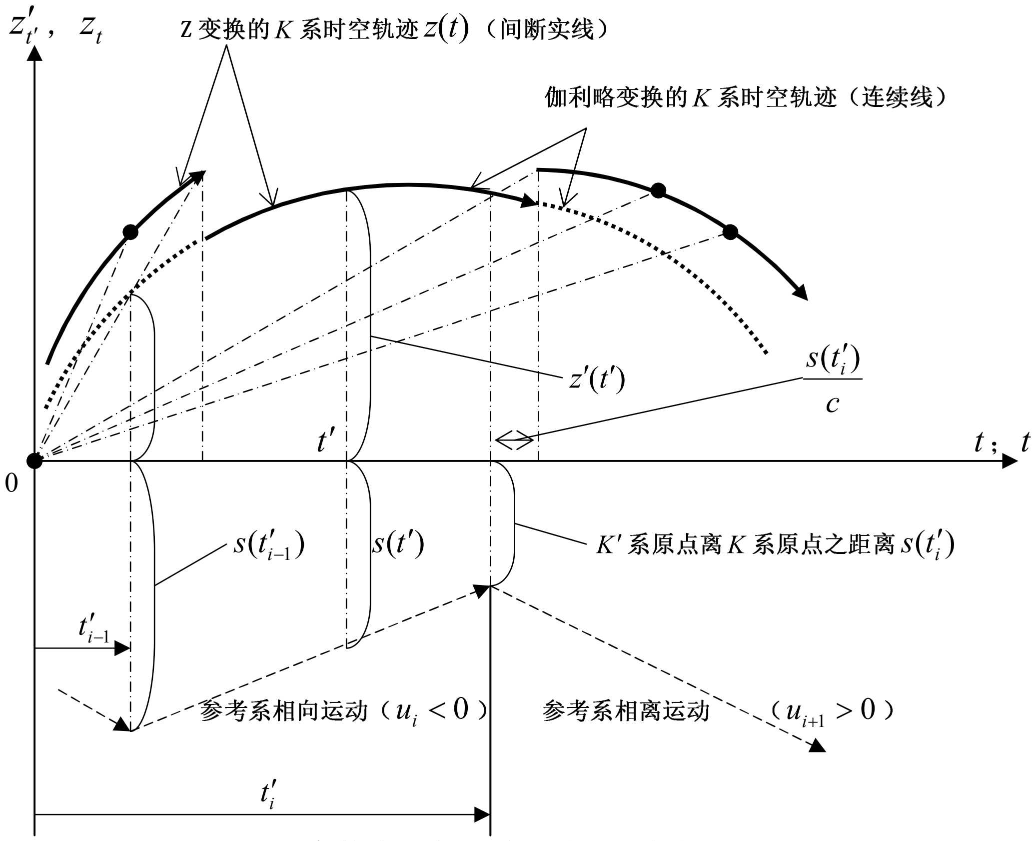


图 38 Z 变换在 z 轴方向上的 K 系时空轨迹

二.“哈勃定律”(Hubble’s Law)的理论表达式

1929 年，美国天文物理学家**哈勃**（**E．P．Hubble**）发现河外星系视向退行速度与距离成正比，即距离越远，视向退行速度越大。**“哈勃定律”**的陈述是：来自遥远星系光线的红移与他们的距离成正比。这条定律是**哈勃**在约十年的观测之后，于 1929 年首先提出的。**“哈勃定律”**中速度和距离都是间接观测得到的物理量。“速度 — 距离”关系和“速度 — 视星”关系，是建立在观测“红移 — 视星”等关系及一些理论假设前提上的。**“哈勃定律”**原来由对正常星系观测而得，现今已应用到类星体或其他特殊星系上。**“哈勃定律”**通常被用来推算遥远星系的距离。可是，**“哈勃定律”**至今从未得到理论上的解释。笔者十分简捷地首次给出了**“哈勃定律”**的理论表达式。

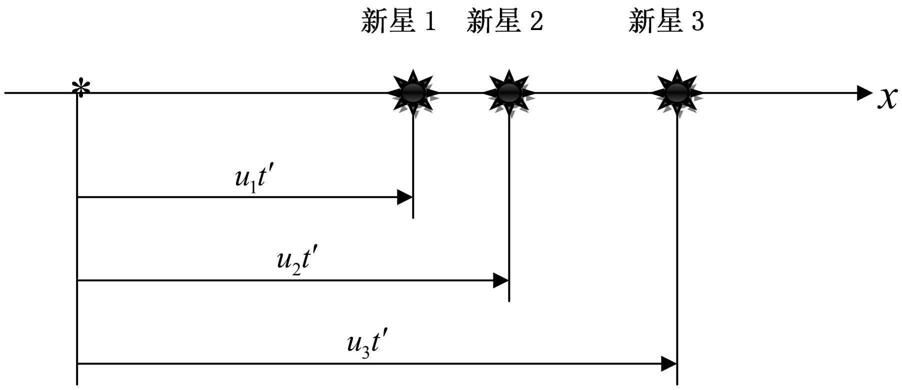
“哈勃定律”：

“在任何一个星系上，都能观测到其他星系在作远离该星系的退行运动，而且距离越远的星系退行速度越大。”

“对宇宙中的任何两个星系来说，它们都在彼此互相远离，而且星系间的距离越远，相互远离的速度也越大。”

“遥远天体的红移（即退行运动）的大小与天体的距离成正比。”

设：在某时刻t'，三颗新星相对于地面观测者$*$分别以匀速u_1、u_2、u_3远离而去，示于图 39。



（$*$ 为地面观测者；u_1、u_2、u_3为新星退行速度；$u_1 < u_2 < u_3$）

图 39 在时刻t'三颗新星分别以匀速u_1、u_2、u_3离观测者$*$而远去

在时刻t'，三新星离地面观测者$*$的视向距离分别为u_1t'、u_2t'、u_3t'（见图 39）。由于光的传播速度为有限值（c），故地面观测者$*$在时刻t'尚看不到新星。直到时刻$t_1 = \left(1+\frac{u_1}{c}\right)t'$、时刻$t_2 = \left(1+\frac{u_2}{c}\right)t'$及时刻$t_3 = \left(1+\frac{u_3}{c}\right)t'$，地面观测者$*$才先后见到新星，三新星离地面观测者$*$的视向距离分别为$x_1$、$x_2$及$x_3$，示于图 40。

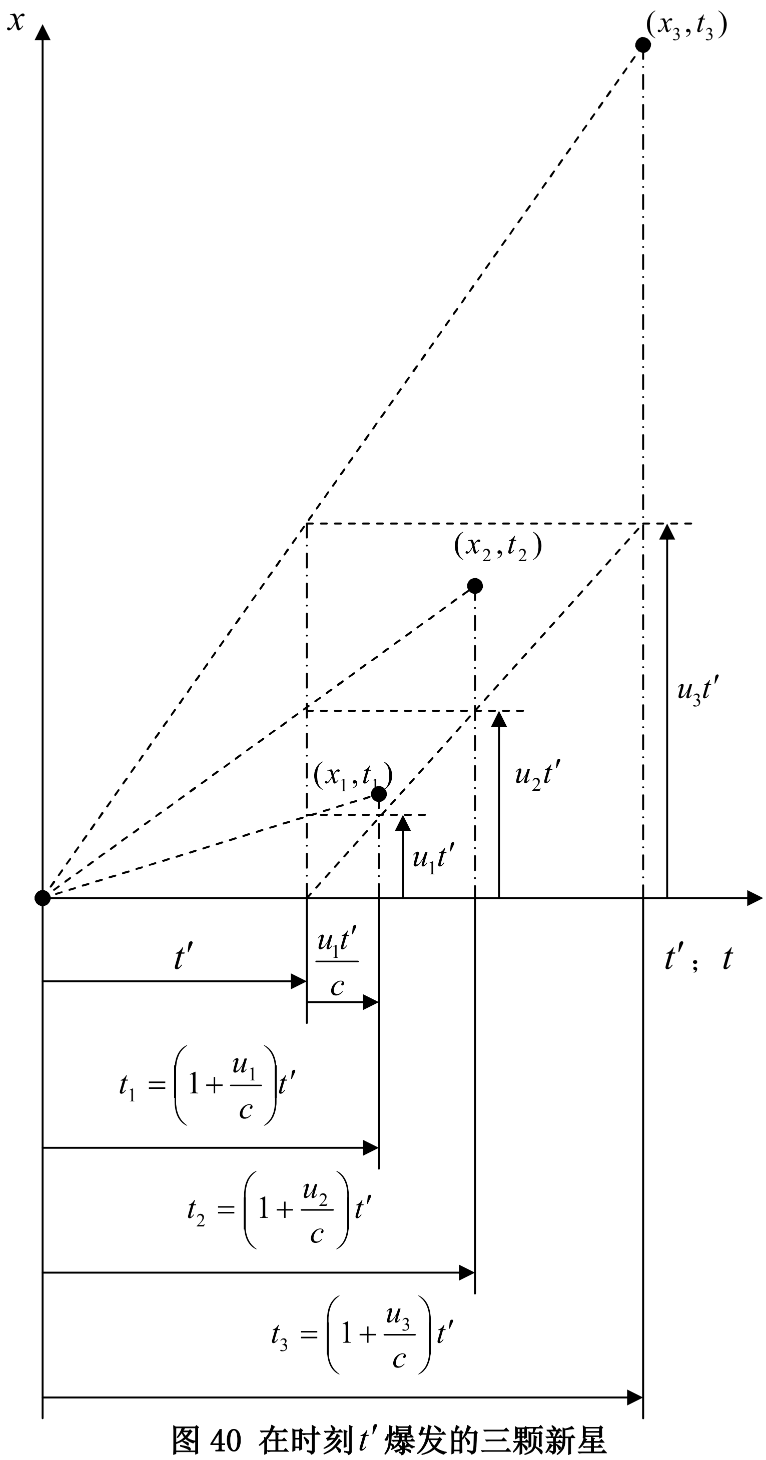
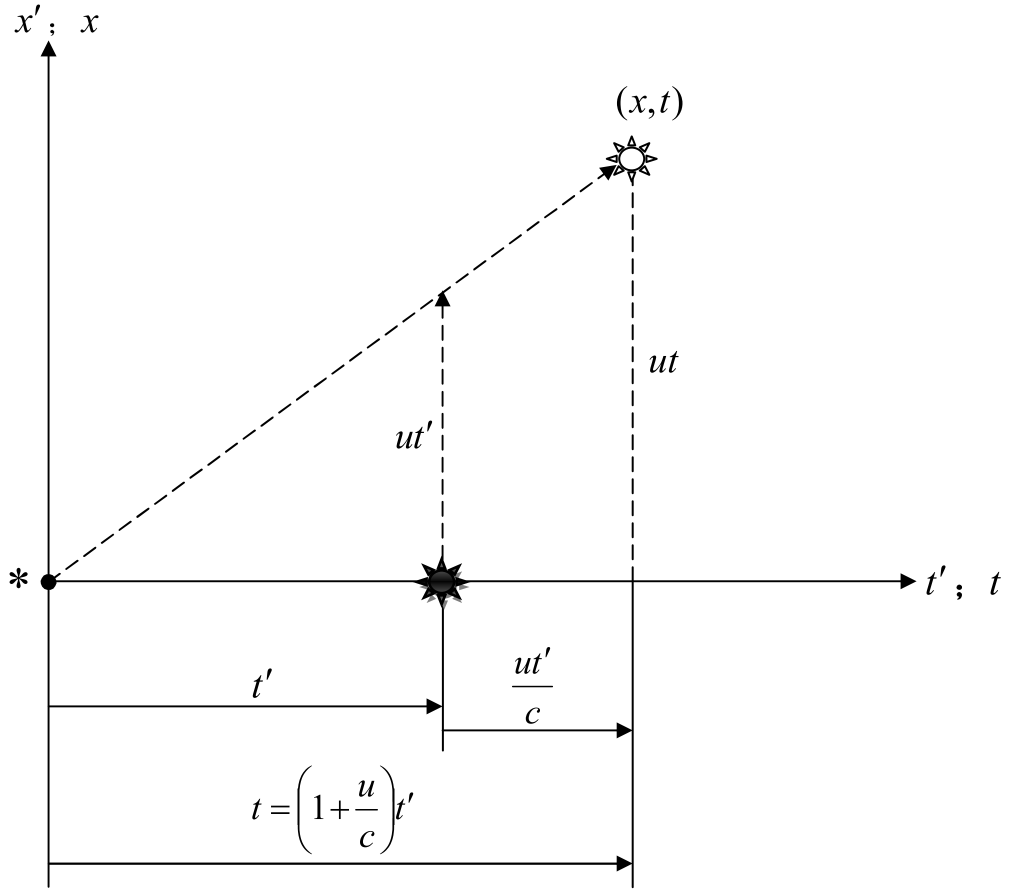


图 40 在时刻t'爆发的三颗新星

设：在某时刻t'，一颗新星相对于地面观测者＊以匀速u远离而去，示于图 41。在时刻t'，新星离地面观测者＊的视向距离为ut'。由于光的传播速度为有限值（c），故地面观测者＊在此时刻t'尚看不到新星。直到时刻$t = t' + \frac{ut'}{c} = \left(1 + \frac{u}{c}\right)t'$，地面观测者＊才能够见到新星，这时新星离地面观测者＊的视向距离为$x = ut$，参看图 41。



（* 为地面观测者；u 为新星退行速度；c 为光速）

图 41 在时刻 t' 一颗新星以匀速 u 离观测者 * 而远去

参看图 41：地面观测者 * 在时刻 t 才见到新星，这时新星离地面观测者 * 的视向距离为 $x = ut$。图 41 中的关系式 $t = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)t'$ 就是**周方变换**（Z 变换）的时间变换式。将时间变换式 $t = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)t'$ 代入 $x = ut$，得 $x = ut = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)ut'$。这个公式 $x = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)ut'$ 恰好就是**周方变换**（Z 变换）的空间变换式 $x = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)(x'+ut')$ 在 $x' = 0$（即将新星设在新星坐标系的原点）条件下的公式：$x = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)ut'$。将此式写成 $x = \left(1+\dfrac{u}{c}\right)ut' = \dfrac{t'}{c}u^2 + t'u$，继而写成：

$$x = ct'\frac{u^2}{c^2} + ct'\frac{u}{c} = ct'\left[\left(\frac{u}{c}\right)^2 + \left(\frac{u}{c}\right)\right]$$

$$\overline{x}_H = \overline{u}^2 + \overline{u}$$

式中 $\overline{x}_H = \dfrac{x}{ct'}$ 称为**“哈勃距离”**；$\overline{u} = \dfrac{u}{c}$，$c$ 为光速。

这就是**“哈勃定律”**的理论表达式：

$$\boxed{\begin{gathered}\overline{x}_H = \overline{u}^2 + \overline{u} \\ (\overline{u} > 0)\end{gathered}}$$

“哈勃定律”理论表达式曲线示于图 42。

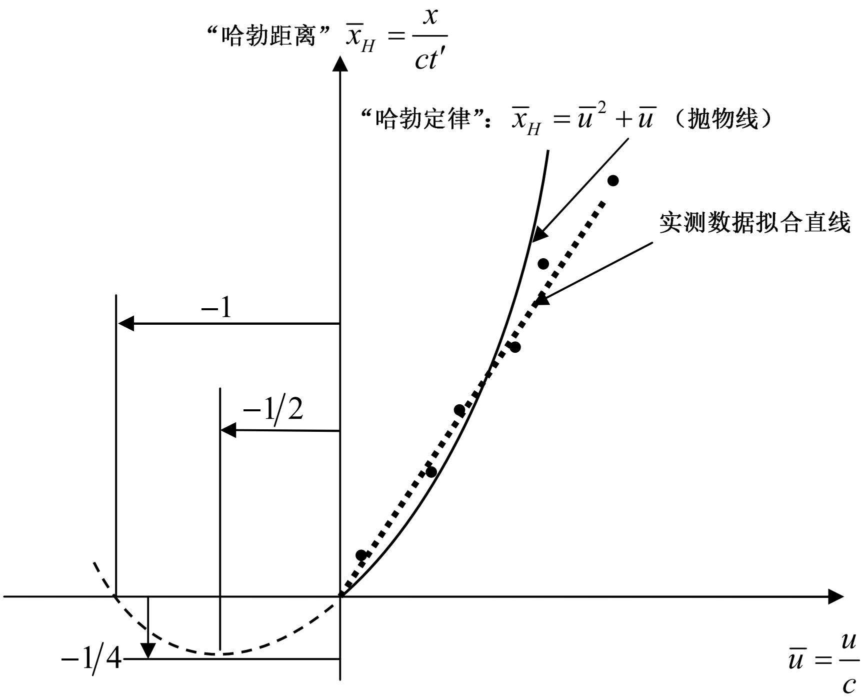


图 42 “哈勃定律”

或者将与 $\overline{x}_H = \overline{u}^2 + \overline{u}$ 等价的 $x = \left(1 + \dfrac{u}{c}\right)ut' = \dfrac{t'}{c}u^2 + t'u$ 即：

$$\boxed{\begin{gathered}x = \frac{t'}{c}u^2 + t'u \\ (u > 0)\end{gathered}}$$

示于图 43。

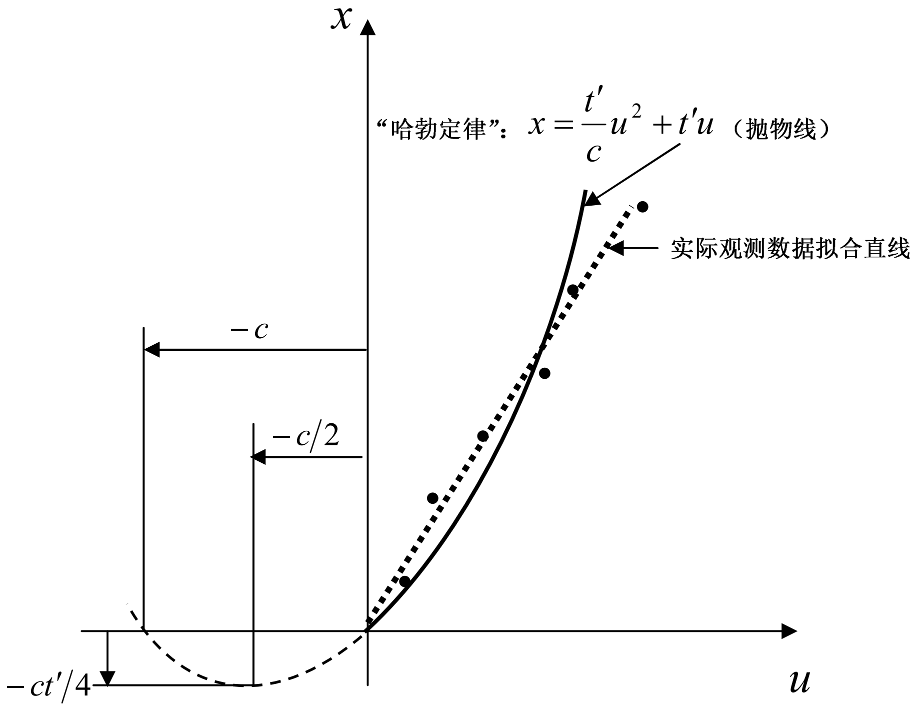


图 43 “哈勃定律”

另外，我们也可以通过**特殊 Z 变换**的矢量图直接导出**哈勃定律**的理论表达式。**特殊 Z 变换**的矢量图列于表 9。

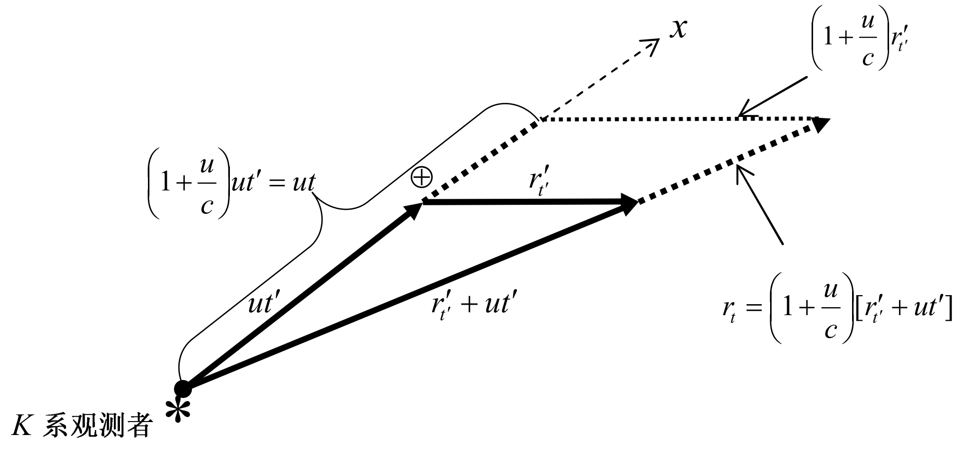
表 9 特殊 Z 变换的矢量图

$$r_t = \left(1+\frac{u}{c}\right)[r'_{t'} + ut'] = \left(1+\frac{u}{c}\right)ut' + \left(1+\frac{u}{c}\right)r'_{t'} = ut + \left(1+\frac{u}{c}\right)r'_{t'}$$

$$t = t' + \frac{u \bullet t'}{c} = \left(1+\frac{u}{c}\right)t'$$

$$r_t = [x_t, y_t, z_t]^T,\ r'_{t'} = [x'_{t'}, y'_{t'}, z'_{t'}]^T,\ u = [u,0,0]^T$$

(c 为真空中光速)



在表 9 中，令 $r'_{t'}=0$，就得到一维的特殊 Z 变换，列于表 10。

表 10 $r'_{t'}=0$ 时的一维特殊 Z 变换的矢量图

$$x=\left(1+\frac{u}{c}\right)ut'=ut$$

$$t=\left(1+\frac{u}{c}\right)t'$$

$$r_t=[x,0,0]^T,\quad r'_{t'}=[0,0,0]^T,\quad u=[u,0,0]^T$$

(c 为真空中光速)

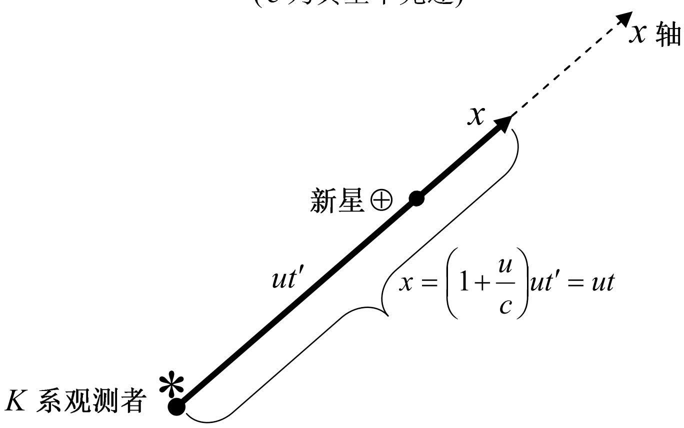


表 10 中公式 $x=\left(1+\frac{u}{c}\right)ut'=ut$ 的 $x=\left(1+\frac{u}{c}\right)ut'$ 部分就是哈勃定律的理论表达式：

$$x=\left(1+\frac{u}{c}\right)ut'=\frac{t'}{c}u^2+t'u$$

由此式可以求得爆发新星⊕的‘（宇宙）时刻’t'：

$$t'=\frac{x}{\left(1+\frac{u}{c}\right)u}$$

或者是：将哈勃定律的理论表达式 $f(x,u,t')=\dfrac{x}{\left(1+\frac{u}{c}\right)u}-t'=0$ 绘制成诺模图(nomograph)，

便可在此诺模图上根据观测到的 x 及 u 确定爆发新星⊕的时刻 t'，从而计算出观测到新星⊕的时刻 t：

$$t=\left(1+\frac{u}{c}\right)t'=\frac{x}{u}$$

****

附 录

时空变换满足“相对性原理”之充分必要条件

（一）“相对性原理”的意义及内涵

建立科学理论，其目的都是为了认识客观事物的自然规律。这种理论必须使不同的观测者在各自的坐标系内都能观测到相同的物理规律，这样的物理理论才有实际价值。

爱因斯坦在论文《**论动体的电动力学**》中将“**相对性原理**”（the principle of relativity）用文字表述为：

“The laws governing the changes of the state of any physical system do not depend on which one of two coordinate systems in uniform translational motion relative to each other these changes of the state are referred to”（Einstein，1987 年版）；译成：**“物理体系的状态据以变化的定律，同描述这些状态变化时所参照的坐标系究竟是用两个在互相匀速移动着的坐标系中的哪一个并无关系。”**（爱因斯坦，2006 年版）

“表述客观物理定律的数学方程在互作匀速直线平移相对运动的各坐标系内具有相同的形式”，即通常所称的“**相对性原理**”，对于我们探索与认识客观事物的自然规律具有特别重要的意义。这里应当指出，“**相对性原理**”所要求的是物理定律的数学方程在各坐标系内保持相同的“**形式**”，而并不要求数学方程所描述的客观事物在各坐标系内表现为相同的“**规模**”，因此“**相对性原理**”实际上应当准确地称为“**相似性原理**”（the principle of similarity）。各种各样的物理模拟实验，如飞机及导弹的风洞空气动力实验、水利系统的室内模拟实验等等，就是依据“**相似性原理**”进行设计的。

为了推导出时空变换的数学表达式，就必须在数学推导过程中实际运用“**相对性原理**”（“**相似性原理**”），为此我们必须运用数学语言来表述“**相对性原理**”（“**相似性原理**”），找到变换方程组满足“**相对性原理**”（“**相似性原理**”）的充分必要条件，并将此条件引入数学推导之中，以确定变换方程组中的各项系数。

关于“**相对性原理**”（the principle of relativity），爱因斯坦仅仅只做过文字表述，从未用数理工具进行严格推导，从未通过数学语言准确、完整表述“**相对性原理**”。

下面我们就来讨论变换方程组满足“**相对性原理**”（“**相似性原理**”）的充分必要条件。

现有时间变换式$t' = Ax + Ct$与空间变换式$x' = B(x - ut)$组成的变换方程组：

$$\begin{cases} x' = B(x - ut) \\ t' = Ax + Ct \end{cases}$$

式中u为坐标系相对速度。

这个联立方程组可以换写成如下形式：

$$\begin{cases} x' = Bx - But \\ t' = Ax + Ct \end{cases}$$

联立方程组的矩阵T为：

$$T = \begin{bmatrix} B & -Bu \\ A & C \end{bmatrix}$$

矩阵T为可逆矩阵，故必有$\det T = BC + ABu \neq 0$。这时，必存在方程组的逆矩阵T_{inv}：

$$T_{inv} = \frac{1}{\det T}\begin{bmatrix} C & Bu \\ -A & B \end{bmatrix}$$

容易验证，联立方程组的矩阵T与逆矩阵T_{inv}总能满足以下恒等式：

$$T_{inv}T = \frac{1}{\det T}\begin{bmatrix} C & Bu \\ -A & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B & -Bu \\ A & C \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

即：

$$T_{inv}T = \frac{1}{BC + ABu}\begin{bmatrix} C & Bu \\ -A & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B & -Bu \\ A & C \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

在上式中，将C替换为B，上面这个恒等式仍然成立，即：

$$\frac{1}{B^2 + ABu}\begin{bmatrix} B & Bu \\ -A & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B & -Bu \\ A & B \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

（二）变换方程组满足“相对性原理”之充分必要条件

现设：某变换方程组为

$$\begin{cases} x' = B(x - ut) \\ t' = Ax + Bt \end{cases}$$

方程组的变换矩阵为$S = \begin{bmatrix} B & -Bu \\ A & B \end{bmatrix}$，且$\det S = B^2 + ABu = k \neq 0$。

方程组的逆变换矩阵为$S_{inv}=\dfrac{1}{\det S}\begin{bmatrix} B & Bu \\ -A & B \end{bmatrix}$。

显然，这个变换方程组具有以下两项性质：

（a）变换方程组的变换矩阵S为**可逆矩阵**；

（b）两观测者观测到的同一**‘物理定律’**当两观测者互换“静系地位”时**保持不变**，故变换方程组的变换矩阵S与逆变换矩阵S_{inv}具有**相同的张量形式**。

由于$\det S$的值**不必为** 1，故**“相对性原理”**应恰当地改称为**“相似性原理”**。

我们说，具有（a）、（b）两项性质的变换方程组

$$\begin{cases} x' = B(x-ut) \\ t' = Ax+Bt \end{cases}$$

满足**“相对性原理”**（**“相似性原理”**）。

由此可得：时间变换式$t' = Ax+Ct$与空间变换式$x' = B(x-ut)$组成的变换方程组

$$\begin{cases} x' = B(x-ut) \\ t' = Ax+Ct \end{cases}$$

满足**“相对性原理”**（**“相似性原理”**）之充分必要条件可表为如下联立方程组：

$$\boxed{\begin{array}{l} B=C \\ BC+ABu=k\neq 0 \end{array}}$$

由于$k\ (k\neq 0)$可以是任何实数，所以必须利用**“相对性原理”**（**“相似性原理”**）以外的其它条件给出数值$k\ (k\neq 0)$及A（或B，或C），才能够确定变换方程组

$$\begin{cases} x' = B(x-ut) \\ t' = Ax+Ct \end{cases}$$

的各项系数。

对于具有如下特殊形式（时间变换式中不含‘x’项）的变换方程组：

$$\begin{cases} x' = B(x-ut) \\ t' = Ct \end{cases}$$

“相对性原理”（**“相似性原理”**）的充分必要条件则很简单，就只有：

$$B=C$$

在这种情况下，只需采用在物理上正确的合理的数学模型推导出时间变换式$t' = Ct$，就可惟一地确定变换方程组：

$$\begin{cases} x' = C(x-ut) \\ t' = Ct \end{cases}$$

可以看出，这是一个**“伽利略型”**的变换方程组。

容易证明：**“伽利略型”**的变换方程组

$$\begin{cases} x' = C(x-ut) \\ t' = Ct \end{cases}$$

$$（C > 0）$$

能够满足**“相对性原理”（“相似性原理”）**。

设**时空变换式**为：

$$\begin{cases} x' = C(x-ut), \\ y' = Cy, \\ z' = Cz, \\ t' = Ct \end{cases}$$

可以表为：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 & -Cu \\ 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

方程组的**变换矩阵**Φ为：

$$\Phi = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 & -Cu \\ 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

逆变换矩阵Φ^{-1}为：

$$\Phi^{-1} = \frac{1}{C^4} \begin{bmatrix} C^3 & 0 & 0 & C^3 u \\ 0 & C^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C^3 \end{bmatrix} = \frac{1}{C} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可见，**变换矩阵**Φ与**逆变换矩阵**Φ^{-1}具有完全相同的张量形式。而且，有：

$$\Phi \times \Phi^{-1} = C\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{C}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所以，时空变换式

$$\begin{cases} x' = C(x-ut)\,, \\ y' = Cy\,, \\ z' = Cz\,, \\ t' = Ct \end{cases}$$

满足“相对性原理”(“相似性原理”)。

验证毕。

参 考 文 献

[1]**《现代牛顿力学的运动观测理论—兼评狭义相对论之“洛伦兹变换”》**，

周 方/著　经济科学出版社 2014 年版

[2]**《现代牛顿力学的运动观测理论—兼评狭义相对论之“洛伦兹变换”》**，

(第二版)，周 方/著　经济科学出版社 2016 年版

[3] 周 方:**《新牛顿力学时空变换 —周方变换（广义的伽利略变换)》**

(The Transformation of Space-time for the Neo-Newtonian Mechanics)

http://www.vixra.org/pdf/1209.0089v1.pdf

[4] A . Einstein:**《On the Electrodynamics of Moving Bodies》**, The Collected Papers of Albert Einstein, Edit. John Stachel, Vol.2, pp. 140-171,The Princeton University Press, 1987.

[5]爱因斯坦：**《狭义与广义相对论浅说》**，杨润殷译，北京大学出版社 2006 年版

Zhoufang Transformation (Z- Transformation) : The Motion Observation Theory and Theoretical Interpretation for Hubble's Law

Zhoufang

(Chinese Academy of Social Sciences)

Abstract The only objectively existing in nature transformation of space and time for the case of observers' mutual uniform translatory motion and limited light velocity is first revealed in the article.The discovered transformation ,referred to as Zhoufang Transformation (Z-Transformation), is logically derived, using in derivation the concepts of both the principle of relativity and the postulate of constant light velocity. The Z-Transformation takes the typical form of Galilean Transformation. Moreover, a theoretical interpretation for Hubble's Law is given firstly by the author as well, utilizing the Z-Transformation revealed .