THE RAMANUJAN-GÖLLNITZ-GORDON CONTINUED FRACTION

EDGAR VALDEBENITO

ABSTRACT:
In this research , the autor has detailed about:”Numerical evaluation of the Ramanujan-Göllnitz-Gordon continued fraction”.

2017

1. Introducción

La fracción continua de Ramanujan-Göllnitz-Gordon se define por:

$$H(q) = \cfrac{\sqrt{q}}{1 + q + \cfrac{q^2}{1 + q^3 + \cfrac{q^4}{1 + q^5 + \cdots}}} \quad ,|q| < 1$$

donde

$$q = e^{-\pi\sqrt{n}}$$

Para $n = 0$, se tiene:

$$H(1) = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}} = \sqrt{2} - 1$$

Para $n = 3$, se tiene:

$$H\left(e^{-\pi\sqrt{3}}\right) = abcd$$

donde

$$a = \sqrt{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + 3}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1}{2}}$$

$$b = \sqrt{\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3} + 3}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3} + 1}{2}}$$

$$c = \sqrt{\frac{-\sqrt{2} + \sqrt{3} + 3}{2}} - \sqrt{\frac{-\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1}{2}}$$

$$d = \sqrt{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - 3}{2}}$$

Para $n = 7$, se tiene:

$$H\left(e^{-\pi\sqrt{7}}\right) = ABCD$$

donde

$$A = \sqrt{4 + \sqrt{2}} - \sqrt{3 + \sqrt{2}}$$

$$B = \sqrt{4 - \sqrt{2}} - \sqrt{3 - \sqrt{2}}$$

$$C = \sqrt{\sqrt{2} + 1} - \sqrt[4]{2}$$

$$D = \sqrt[4]{2} - \sqrt{\sqrt{2} - 1}$$

En esta nota mostramos la evaluación numérica de $H(e^{-\pi\sqrt{3}})$ y $H(e^{-\pi\sqrt{7}})$ mediante el método de las aproximaciones sucesivas (método del punto fijo).es decir se resuelven las ecuaciones polinomiales asociadas a $H(e^{-\pi\sqrt{3}})$ y $H(e^{-\pi\sqrt{7}})$.

$$H\left(e^{-\pi\sqrt{3}}\right) = 0.06554346281523822856454372487 9 \ldots$$

$$H\left(e^{-\pi\sqrt{7}}\right) = 0.015667260618463958074699598255 \ldots$$

2. Ecuaciones asociadas a $H(e^{-\pi\sqrt{3}})$ y $H(e^{-\pi\sqrt{7}})$.

Sea $z = H(e^{-\pi\sqrt{3}})$, se tiene:

$$1 - 16z + 4z^2 + 112z^3 + 6z^4 - 112z^5 + 4z^6 + 16z^7 + z^8 = 0$$

Sea $z = H(e^{-\pi\sqrt{7}})$, se tiene:

$$1 - 64z + 4z^2 + 448z^3 + 6z^4 - 448z^5 + 4z^6 + 64z^7 + z^8 = 0$$

3. Recurrencias para $z = H(e^{-\pi\sqrt{3}})$

Sean $F1(z), F2(z), F3(z), F4(z)$, definidas como sigue:

$$F1(z) = \frac{1 + 4z^2 + 112z^3 + 6z^4 - 112z^5 + 4z^6 + 16z^7 + z^8}{16}$$

$$F2(z) = \frac{1}{16 - 4z - 112z^2 - 6z^3 + 112z^4 - 4z^5 - 16z^6 - z^7}$$

$$F3(z) = \frac{1 + 4z^2 + 6z^4 + 4z^6 + z^8}{16 - 112z^2 + 112z^4 - 16z^6}$$

$$F4(z) = \frac{1 - 4z^2 - 224z^3 - 18z^4 + 448z^5 - 20z^6 - 96z^7 - 7z^8}{8(2 - z - 42z^2 - 3z^3 + 70z^4 - 3z^5 - 14z^6 - z^7)}$$

Se tiene:

$$z_{n+1} = F1(z_n)\,, z_1 = 0 \;\Rightarrow\; z_n \to H(e^{-\pi\sqrt{3}})$$

$$z_{n+1} = F2(z_n)\,, z_1 = 0 \;\Rightarrow\; z_n \to H(e^{-\pi\sqrt{3}})$$

$$z_{n+1} = F3(z_n)\,, z_1 = 0 \;\Rightarrow\; z_n \to H(e^{-\pi\sqrt{3}})$$

$$z_{n+1} = F4(z_n)\,, z_1 = 0 \;\Rightarrow\; z_n \to H(e^{-\pi\sqrt{3}})$$

4. Recurrencias para $z = H(e^{-\pi\sqrt{7}})$

Sean $F5(z), F6(z), F7(z), F8(z)$, definidas como sigue:

$$F5(z) = \frac{1 + 4z^2 + 448z^3 + 6z^4 - 448z^5 + 4z^6 + 64z^7 + z^8}{64}$$

$$F6(z) = \frac{1}{64 - 4z - 448z^2 - 6z^3 + 448z^4 - 4z^5 - 64z^6 - z^7}$$

$$F7(z) = \frac{1 + 4z^2 + 6z^4 + 4z^6 + z^8}{64 - 448z^2 + 448z^4 - 64z^6}$$

$$F8(z) = \frac{1 - 4z^2 - 896z^3 - 18z^4 + 1792z^5 - 20z^6 - 384z^7 - 7z^8}{8(8 - z - 168z^2 - 3z^3 + 280z^4 - 3z^5 - 56z^6 - z^7)}$$

Se tiene:

$$z_{n+1} = F5(z_n)\,, z_1 = 0 \;\Rightarrow\; z_n \to H(e^{-\pi\sqrt{7}})$$

$$z_{n+1} = F6(z_n)\,, z_1 = 0 \;\Rightarrow\; z_n \to H(e^{-\pi\sqrt{7}})$$

$$z_{n+1} = F7(z_n)\,, z_1 = 0 \;\Rightarrow\; z_n \to H(e^{-\pi\sqrt{7}})$$

$$z_{n+1} = F8(z_n)\,, z_1 = 0 \;\Rightarrow\; z_n \to H(e^{-\pi\sqrt{7}})$$

5. Algunos resultados para $H(e^{-\pi\sqrt{3}})$

$$z_{n+1} = F1(z_n)\,, z_1 = 0 \;\Rightarrow\; \left|z_{10} - H(e^{-\pi\sqrt{3}})\right| \leq 1.51 \cdot 10^{-10}$$

$$z_{n+1} = F2(z_n)\,, z_1 = 0 \;\Rightarrow\; \left|z_{10} - H(e^{-\pi\sqrt{3}})\right| \leq 5.02 \cdot 10^{-12}$$

$$z_{n+1} = F3(z_n)\,, z_1 = 0 \;\Rightarrow\; \left|z_{10} - H(e^{-\pi\sqrt{3}})\right| \leq 2.08 \cdot 10^{-11}$$

$$z_{n+1} = F4(z_n)\,, z_1 = 0 \;\Rightarrow\; \left|z_5 - H(e^{-\pi\sqrt{3}})\right| \leq 4.58 \cdot 10^{-19}$$

6. Algunos resultados para $H(e^{-\pi\sqrt{7}})$

$$z_{n+1} = F5(z_n)\,, z_1 = 0 \;\Rightarrow\; \left|z_{10} - H(e^{-\pi\sqrt{7}})\right| \leq 2.77 \cdot 10^{-22}$$

$$z_{n+1} = F6(z_n)\,, z_1 = 0 \;\Rightarrow\; \left|z_{10} - H(e^{-\pi\sqrt{7}})\right| \leq 6.23 \cdot 10^{-24}$$

$$z_{n+1} = F7(z_n)\,, z_1 = 0 \;\Rightarrow\; \left|z_{10} - H(e^{-\pi\sqrt{7}})\right| \leq 3.07 \cdot 10^{-23}$$

$$z_{n+1} = F8(z_n)\,, z_1 = 0 \;\Rightarrow\; \left|z_5 - H(e^{-\pi\sqrt{7}})\right| \leq 1.50 \cdot 10^{-38}$$

7. Sobre los errores para $H(e^{-\pi\sqrt{3}})$

Sea $e_n = H\left(e^{-\pi\sqrt{3}}\right) - z_n$ el error correspondiente a la aproximación z_n , se tiene:

$$z_{n+1} = F1(z_n)\,, z_1 = 0 \;\Rightarrow\; e_{n+1} \sim 0.12276\, e_n$$

$$z_{n+1} = F2(z_n)\,, z_1 = 0 \;\Rightarrow\; e_{n+1} \sim 0.08005\, e_n$$

$$z_{n+1} = F3(z_n)\,, z_1 = 0 \;\Rightarrow\; e_{n+1} \sim 0.09569\, e_n$$

$$z_{n+1} = F4(z_n)\,, z_1 = 0 \;\Rightarrow\; e_{n+1} \sim 3.00445 \cdot 10^{-9}\, e_n$$

Observación. La recurrencia $z_{n+1} = F4(z_n)\,, z_1 = 0$, corresponde al método de Newton , por lo tanto el error se puede expresar como:

$$e_{n+1} \sim -1.8426\, e_n^2$$

8. Sobre los errores para $H(e^{-\pi\sqrt{7}})$

Sea $e_n = H\left(e^{-\pi\sqrt{7}}\right) - z_n$ el error correspondiente a la aproximación z_n , se tiene:

$$z_{n+1} = F5(z_n)\,, z_1 = 0 \;\Rightarrow\; e_{n+1} \sim 0.00712\, e_n$$

$$z_{n+1} = F6(z_n)\,, z_1 = 0 \;\Rightarrow\; e_{n+1} \sim 0.00443\, e_n$$

$$z_{n+1} = F7(z_n)\,, z_1 = 0 \;\Rightarrow\; e_{n+1} \sim 0.00540\, e_n$$

$$z_{n+1} = F8(z_n)\,, z_1 = 0 \;\Rightarrow\; e_{n+1} \sim 4.87570 \cdot 10^{-10}\, e_n$$

Observación. La recurrencia $z_{n+1} = F8(z_n)\,, z_1 = 0$, corresponde al método de Newton , por lo tanto el error se puede expresar como:

$$e_{n+1} \sim -0.3942\, e_n^2$$

9. Recurrencia lineal para $H(e^{-\pi\sqrt{3}})$

Sea $w_n\,, n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$, la sucesión definida por:

$$w_{n+8} = 16w_{n+7} - 4w_{n+6} - 112w_{n+5} - 6w_{n+4} + 112w_{n+3} - 4w_{n+2} - 16w_{n+1} - w_n$$

donde

$$w_n = \{1,16,252,3856,58890,898608,13710572,209184048,\ldots\}$$

Se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{w_n}{w_{n+1}} = H\left(e^{-\pi\sqrt{3}}\right)$$

Ejemplo:

$$\left| H\left(e^{-\pi\sqrt{3}}\right) - \frac{w_{10}}{w_{11}} \right| \le 2.85 \cdot 10^{-9}$$

10. Recurrencia lineal para $H\left(e^{-\pi\sqrt{7}}\right)$

Sea $w_n\,, n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$, la sucesión definida por:

$$w_{n+8} = 64w_{n+7} - 4w_{n+6} - 448w_{n+5} - 6w_{n+4} + 448w_{n+3} - 4w_{n+2} - 64w_{n+1} - w_n$$

donde

$$w_n = \{1,64,4092,261184,16670730,1064048832,67915436012,4334863488192\ldots\}$$

Se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\frac{w_n}{w_{n+1}} = H\left(e^{-\pi\sqrt{7}}\right)$$

Ejemplo:

$$\left|H\left(e^{-\pi\sqrt{7}}\right) - \frac{w_{10}}{w_{11}}\right| \le 1.30\cdot 10^{-16}$$

11. Otras evaluaciones de $H(q)$

$$H(e^{-\pi}) = \sqrt{4+2\sqrt{2}} - \sqrt{3+2\sqrt{2}}$$

La ecuación polinomial asociada a $z = H(e^{-\pi})$ es:

$$z^8 - 28z^6 + 70z^4 - 28z^2 + 1 = 0$$

$$H\left(e^{-\pi/2}\right) = \sqrt{\sqrt{2}+1} - \sqrt{\sqrt{2}}$$

La ecuación polinomial asociada a $z = H\left(e^{-\pi/2}\right)$ es:

$$z^8 - 4z^6 - 26z^4 - 4z^2 + 1 = 0$$

12. Anexo: El método del punto fijo

El método iterativo (método del punto fijo) resuelve la ecuación:

$$x = F(x)$$

Por la recurrencia:

$$x_{n+1} = F(x_n)$$

Y converge a una raíz si:

$$|F'(x)| < 1$$

En un intervalo I centrado en $x = r$, donde r es la raíz exacta.el valor inicial x_1 debe ser tal que:

$$x_1 \in I$$

El error $e_n = r - x_n$, tiene la propiedad:

$$e_{n+1} \sim F'(r)e_n$$

De modo que cada iteración reduce el error en un factor cercano a $F'(r)$. si $F'(r)$ es cercano a 1 la convergencia es lenta.

Referencias

(1) B.C. Berndt,H.H. Chan and L.-C. Zhang, Radicals and units in Ramanujan`s work,Acta Arith. 87 (1998) , 145.

(2) B.C. Berndt, Ramanujan`s Notebooks, Part IV, Springer, New York , 1994.

(3) B.C. Berndt, Ramanujan`s Notebooks, Part V , Springer, New York , 1998.

(4) H.H. Chan and S.-S. Huang, On the Ramanujan-Gollnitz-Gordon continued fraction ,Ramanujan J. 1 (1997), 7590.

(5) S. Ramanujan, Collected Papers, Chelsea, New York, 1962.