INTRODUCTION À L'ANALYSE COMPLÉMENTAIRE

MENDZINA ESSOMBA FRANÇOIS ET ESSOMBA ESSOMBA DIEUDONNÉ GAËL

Abstract. Cet article présente et décrit essentiellement les instruments mathématiques destinés à l'analyse complémentaire dont la notion est donnée au premier chapitre.

Contents

1. Notion de Complémentarité 3
1.1. Définition 3
1.2. Notation 3
1.3. Complémentarité des fonctions 4
1.4. Relation complémentaire basique 4
1.5. Relations Complémentaires Générales 4
1.6. Tableau récapitulatif des fonctions élémentaires 5
1.7. Le Spectre de la fonction C 5
2. Complémentarité des fonctions de dimensions supérieures 9
2.1. Complémentarité des fonctions de type $f(x;y)$ 9
2.2. Généralisation pour une fonction à n dimensions 10
2.3. Généralité entre les dérivées partielles et les complémentaires sur la structure de notation 11
3. Complémentarités vectorielles 13
3.1. complémentaire ordinaire de vecteur 13
3.2. Continuité, différentiabilité et complémentarité 14
3.3. Formules de complémentarisation 15
3.4. Complémentaires partiel des vecteurs 15
3.5. Complémentaire des vecteurs 16
3.6. Déplacements complémentaire et fonctions volumiques élémentaires dans un espace à n dimensions en coordonnées orthogonales 16
4. L'opérateur complémentaire Ndzina 17
4.1. L'expression géométrique réduit de l'opérateur complémentaire en coordonnées curvilignes orthogonales 17
4.2. Relation des opérateurs géométriques 18
4.3. Le gradient complémentaire ou cradient 19
4.4. Le divergent complémentaire ou civergent 19
4.5. Le rotationnel complémentaire 19

Date: 22 décembre 2010.
1991 *Mathematics Subject Classification.* primary
26XX
34XX
35XX
47XX .

4.6. Le laplacien complémentaire 20
4.7. Quelques Relations liées à l'Opérateur Complémentaire 20
4.8. Relations explicites des grandeurs complémentaires 22
5. Notion de translateurs et de translation © 25
5.1. Notion de translation complémentaire 25
5.2. Translation primitive des fonctions F(X) 26
5.3. Translation primitive double et translation surfacique double 27
5.4. Translation primitive triple et translation volumique triple 27
6. Intégration complémentaire 29
6.1. Notion d'intégrale complémentaire 29
6.2. Intégrales complémentaires double et triple 31
6.3. Intégrales vectorielles complémentaires 32
7. Equations Complémentaires 35
7.1. Formules complémentaires linéaires 35
7.2. Résolutions de certaines équations complémentaires 36
8. Equations Différencio-complémentaires 39
8.1. Equations élémentaires 39
8.2. Equations élémentaires avec second membre 41
8.3. Quelques équations secondaires 43
8.4. Equations supérieures 44
9. Complémentarité et produit vectoriel 45
9.1. Notion de complémentarité vectoriel 45
9.2. Vecteurs moments complémentaires 47

1. Notion de Complémentarité

1.1. **Définition.**

Considérons l'équation linéaire suivante $f(x) = ax + b$, où a et b sont des réelles constances. Pour deux valeurs x_1 et x_2 de cette équation, il existe deux valeurs réelles telles que : $f(x_1) = ax_1 + b$ et $f(x_1) = ax_2 + b$
Proposons nous à présent à retrouvez les réels a et b en fonctions des données ci-dessus.
Cela nous amène au système suivant :

$$\begin{cases} ax_1 + b = f(x_1) \\ ax_2 + b = f(x_2) \end{cases}$$

La résolution de ce système nous donne :

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad et \quad b = \frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_2 - x_1}$$

Les deux résultats obtenus sont intéressants :
Le premier est la pente d'une droite et est associé au calcul différentiel lequel repose sur la notion de dérivabilité de Newton et Leibniz.

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad associe\ la\ fonction \quad f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Aussi simplement, nous aurons le même raisonnement pour le résultat de b. Nous associerons donc au résultat de b la notion de complémentarité dont l'ensemble des propriétés seront développées dans la suite.

$$b = \frac{x_2 f(x_1) – x_1 f(x_2)}{x_2 - x_1} \quad associons\ la\ fonction \quad \text{`}f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{xf(x_0) – x_0 f(x)}{x - x_0}$$

Où $\text{`}f(x)$ désigne la fonction complémentaire.

1.2. **Notation.**

1.2.1. *Notation linéaire.*

La fonction qui viens juste d'être définie est considérée comme la fonction complémentaire et la différence avec les autres types de fonction est qu'elle porte un prime du côté gauche. Ce qui donnera :
$\text{`}f(x)$ fonction complémentaire
$\text{``}f(x)$ fonction complémentaire seconde
$\text{```}f(x)$ fonction complémentaire troisième
$\vdots$
$^{(n)}f(x)$ fonction complémentaire nième

1.2.2. *Autre notation.*

Remarquant que $x_2 f(x_1) – x_1 f(x_2)$ est le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{OM_1}(x_1; f(x_1))$ et $\overrightarrow{OM_2}(x_2; f(x_2))$ Cela nous amène à noter cette fonction de manière suivante :
$\text{`}f(x) = \dfrac{dtf(x)}{dx}$ fonction complémentaire
$\text{``}f(x) = \dfrac{dt^2 f(x)}{dx^2}$ fonction complémentaire seconde

$\text{‴}f(x) = \dfrac{dt^3 f(x)}{dx^3}$ fonction complémentaire troisième

$\vdots$

$^{(n)}f(x) = \dfrac{dt^n f(x)}{dx^n}$ fonction complémentaire nième

Egalement, nous noterons par l'expression Δt les thermes de nature:

$$\frac{\Delta t\, F}{\Delta u} = \frac{u_2 F_1 - u_1 F_2}{u_2 - u_1} \; en\ outre : \; \frac{dtf(u)}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta t\, f(u)}{\Delta u}$$

1.3. **Complémentarité des fonctions.**

1.3.1. *Complémentaire en un point.*
Une fonction réelle sera dite complémentaire en un point x_0 si et seulement si :

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{xf(x_0) - x_0 f(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{xf(x_0) - x_0 f(x)}{x - x_0} = \ell$$

Avec ℓ constance réelle :

1.3.2. *Complémentaire en un intervalle.*
Une fonction est dite complémentaire sur un intervalle si elle est complémentaire en tout point de cet intervalle

1.4. **Relation complémentaire basique.**

En revenant sur la résolution du précédent système, nous avons trouvé :

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad et \quad b = \frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_2 - x_1}$$

En introduisant ces valeurs dans l'équation initiale $f(x) = ax + b$, nous obtenons :

$$f(x) = \frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_2 - x_1} + x \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Les réels x_1 et x_2 sont définis indépendamment de x, ce qui nous amène à considérer pour f(x) la nouvelle expression suivante :

$$f(x) = \frac{xf(x_0) - x_0 f(x)}{x - x_0} + x \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Cette dernière expression reste identique à la première. En introduisant les limites, nous obtenons :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{xf(x_0) - x_0 f(x)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} x \times \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \text{`}f(x_0) + x_0 f'(x_0)$$

D'où :

$$f(x_0) = \text{`}f(x_0) + x_0 f'(x_0)$$

Finalement, nous obtenons la formule générale suivante pour toute fonction f réelle :

$$f(x) = \text{`}f(x) + xf'(x)$$

Cette relation relie trois notions en analyse: la notion de *continuité*, de *dérivabilité* et la nouvelle qui est la *complémentarité*:

1.5. **Relations Complémentaires Générales.**

1.5.1. *Relation entre sommes de fonction.*
Soient f et g deux fonctions réelles : Nous avons d'après l'équation (4)

$$(f(x)+g(x)) = \text{`}(f(x)+g(x)) + x(f(x)+g(x))'$$

Ce qui nous permet d'écrire:

$$\begin{aligned}\text{`}(f(x)+g(x)) &= f(x)+g(x)\text{–}xf'(x)\text{–}xg'(x)\\ &= (f(x)-xf'(x))+(g(x)-xg'(x))\\ &= \text{`}f(x)+\text{`}g(x)\end{aligned}$$

Finalement :
Pour deux fonctions u et v

$$\text{`}(u+v) = \text{`}u+\text{`}v$$

ii) Relation entre produit de fonction En utilisant la relation (4) telle que nous l'avons vu à l'exemple qui précède, nous obtiendrons pour deux fonctions u et v

$$\text{`}(uv) = \text{`}uv+\text{`}vu-uv$$

iii) Relation entre rapport de fonction
Pour deux fonctions u et v, procédant de la même manière:

$$\text{`}(\frac{u}{v}) = \frac{\text{`}uv-\text{`}vu+uv}{v^2}$$

iv) Relation d'une fonction puissance

$$\text{`}(u^m) = u^m(1-m)+m\text{`}uu^{m-1}$$

v) Relation

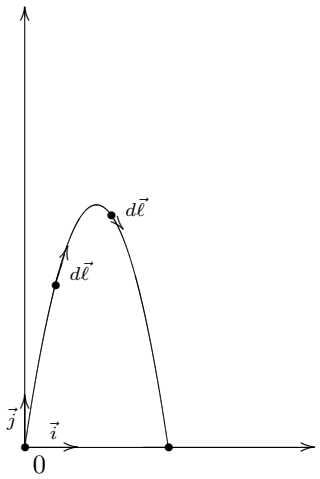
$$\text{`}(x^n) = (1-n)x^n$$

1.6. **Tableau récapitulatif des fonctions élémentaires.**
Le tableau suivant est un récapitulatif des fonctions dérivées et complémentaires élémentaires :

fonctions	fonctions dérivées	fonctions complémentaires
C	0	C
Cx	C	0
x^n	nx^{n-1}	$(1-n)x^n$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cos x + x\sin x$
$\sin x$	$\cos x$	$\sin x - x\cos x$
e^x	e^x	$e^x - xe^x$
e^{-x}	$-e^{-x}$	$e^{-x} + xe^{-x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\ln x - 1$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{\sqrt{x}}{2}$

1.7. **Le Spectre de la fonction C.** Avant de passer à l'étude du spectre de la fonction complémentaire, il nous est semblé impératif de décrire préalablement le vecteur complémentaire élémentaire dans un plan orienté $(0,\vec{i},\vec{j})$

1.7.1. *vecteur complémentaire.* Pour ce qui est du vecteur dérivée, nous savons qu'il est tangent à la courbe décrite, comme le mentionne cette figure:



En procédant à présent au calcul du vecteur complémentaire en fonction de x,où $\vec{\ell} = x\vec{i} + y\vec{j}$ nous aurons:

$$dt\vec{\ell} = \vec{\ell}dx - xd\vec{\ell} = (x\vec{i} + y\vec{j})dx - x(dx\vec{i} + dy\vec{j})$$

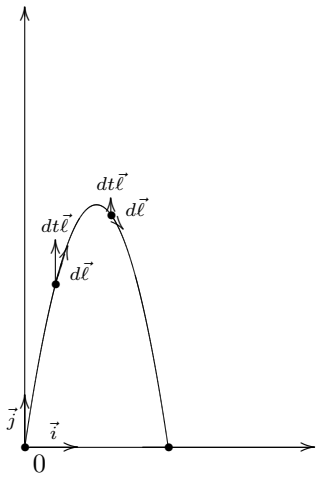
$$= \vec{i}(xdx - xdx) + \vec{j}(ydx - xdy)$$

$$= \vec{j}(ydx - xdy) = \vec{j}dty$$

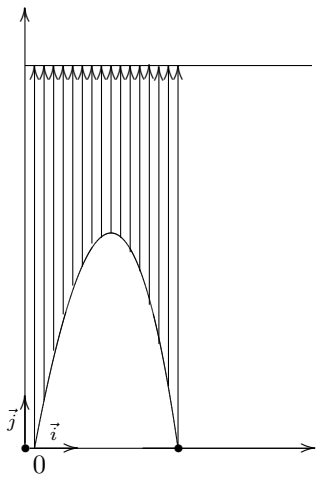
finalement:

$$dt\vec{\ell} = \vec{j}dty$$

Il apparait donc ici clairement que le vecteur complémentaire élémentaire dans un plan est orienté perpendiculairement à l'axe du scalaire de description considéré tel que nous l'avons sur la figure ci-dessous:

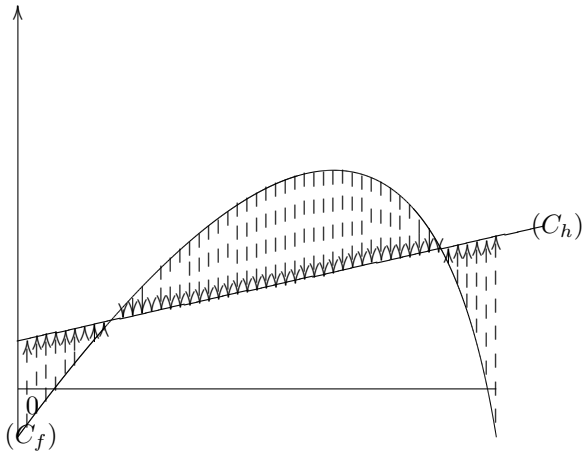


1.7.2. *Description du spectre complémentaire.* Le vecteur complémentaire élémentaire tel que nous l'avons défini dans un plan orthonormal est toujours orthogonal à l'axe $(0;\vec{i})$. Par conséquent, si la circulation du vecteur dérivé décrit une courbe, alors la circulation du vecteur complémentaire élémentaire décrira une surface que nous appellerons l'aire complémentaire.
Et cet aire pour une fonction f dans un intervalle $I[a;b]$ est donné par l'intégrale $\Lambda = \int_a^b \text{`}f(x)dx$



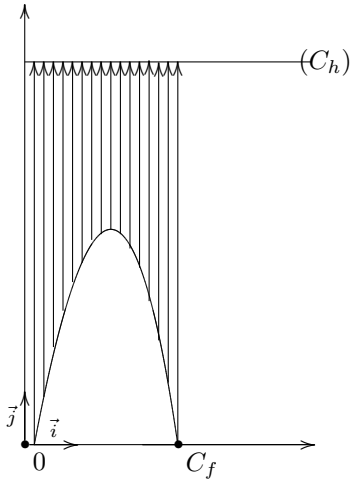
1.7.3. *Fonction du spectre.* Pour exprimer le spectre complémentaire nous représentons l'ensemble des vecteurs complémentaires à partir de la courbe (C_f). Toutefois, nous allons décrire une fonction (C_h) qui décrira l'aire comprise entre la courbe (C_f) et l'ensemble des bouts de vecteurs:
Cette fonction est définie par la fonction

$$h(x) = \text{`}f(x) + f(x) = 2f(x) - xf'(x)$$



En prenant par exemple un intervalle de la fonction $f(x) = -x^2 + b$ on trouve

$h(x) = 2b$; ce qui peut correspondre à :



2. Complémentarité des fonctions de dimensions supérieures

Complémentarité des fonctions à plusieurs dimensions Après avoir évoqué le complémentaire des fonctions à une dimension, celui des fonctions surfaciques et volumiques, nous allons à présent nous intéresser au complémentaire des fonctions à plusieurs dimensions

2.1. Complémentarité des fonctions de type $f(x;y)$.

Dans le cas cartésien, il a été vu que la dérivée d'une fonction de ce type était:

$$df(x;y) = \frac{\partial f(x;y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x;y)}{\partial y}dy$$

Avant ainsi de passer au complémentaire, nous devons d'abord passer à la lecture symbolique

2.1.1. *Notation de complémentarité partiel.*

Nous noterons le complémentaire partiel par le terme suivant : ∂t
Soit une fonction scallaire f dépendant de deux variables scalaires x et y tel que $f = f(x;y)$
Les complémentaires partiels de f respectivement par rapport à x et y sont définis par:

$$\frac{\partial t f(x;y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)f(x;y) - xf(x+\Delta x;y)}{\Delta x}$$
$$\frac{\partial t f(x;y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{(y+\Delta y)f(x;y) - yf(x;y+\Delta y)}{\Delta x}$$

Ce qui signifie également qu'on calcule le complémentaire de la fonction $f(x;y)$ en considérant y constant pour la première relation et pour la deuxième en considérant x constant

2.1.2. *Formule générale des complémentaires.*

Pour une fonction scalaire f de n variables scalaires tels que $f = f(u_1;u_2;\cdots;u_n)$

$$\begin{aligned} f(u_1;u_2;\cdots;u_n) &= \frac{\partial t f(u_1;u_2;\cdots;u_n)}{\partial u_1} + u_1\frac{\partial f(u_1;u_2;\cdots;u_n)}{\partial u_1} \\ &= \frac{\partial t f(u_1;u_2;\cdots;u_n)}{\partial u_2} + u_2\frac{\partial f(u_1;u_2;\cdots;u_n)}{\partial u_2} \\ &= \cdots = \frac{\partial t f(u_1;u_2;\cdots;u_n)}{\partial u_n} + u_n\frac{\partial f(u_1;u_2;\cdots;u_n)}{\partial u_n} \end{aligned}$$

Il en est de même pour des scalaires, variables indépendantes:

$$f(u_1;u_2;\cdots;u_n) = \frac{\partial t f(u_1;u_2;\cdots;u_n)}{\partial k} + k\frac{\partial f(u_1;u_2;\cdots;u_n)}{\partial k}$$

2.1.3. *Formule générale des opérateurs.*

Des formules qui précèdent, nous pouvons établir la formules des opérateurs suivante:

$$\centerdot = \frac{\partial t}{\partial u} + u\frac{\partial}{\partial u}$$

Le point opérateur ($\centerdot$) est un point tel que pour toute fonction Φ ou tout vecteur $\vec{A}$:

$$\Phi\centerdot \neq \centerdot\Phi \quad ; \quad \vec{A}\centerdot \neq \centerdot\vec{A}$$

2.1.4. *Détermination du complémentaire* $dtf(x;y)$. Sachant que

$$df(x;y) = \frac{\partial f(x;y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x;y)}{\partial y}dy$$

En changeant les dérivées partielles par leurs valeurs conformément à la formule générale suivante

$$\frac{\partial f(u_1;u_2;\cdots;u_n)}{\partial u_i} = \frac{1}{u_i}(f(u_1;u_2;\cdots;u_n) - \frac{\partial tf(u_1;u_2;\cdots;u_n)}{\partial u_i})$$

Nous obtenons d'abord:

$$df(x;y) = f(x;y)(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}) - \frac{\partial tf(x;y)}{\partial x}\frac{dx}{x} - \frac{\partial tf(x;y)}{\partial y}\frac{dy}{y}$$

En multipliant ce dernier résultat par xy:
Nous obtenons:

$$\begin{aligned} xydf(x;y) &= f(x;y)(ydx + xdy) - (y\frac{\partial tf(x;y)}{\partial x}dx + x\frac{\partial tf(x;y)}{\partial y}dy) \\ &= f(x;y)d(xy) - dtf(x;y) \end{aligned}$$

D'où:

$$f(x;y) = \frac{dtf(x;y)}{d(xy)} + xy\frac{df(x;y)}{d(xy)}$$

Finalement la formule du complémentaire cherché sera:

$$dtf(x;y) = y\frac{\partial tf(x;y)}{\partial x}dx + x\frac{\partial tf(x;y)}{\partial y}dy$$

Et sa valeur réduite sera:

$$dtf(x;y) = \frac{\partial tf(x;y)}{\partial x}\frac{dx}{x} + \frac{\partial tf(x;y)}{\partial y}\frac{dy}{y}$$

2.2. **Généralisation pour une fonction à n dimensions.**
Pour une fonction f à n dimensions, nous savons que la dérivée est:

$$df(u_1;\cdots;u_n) = \sum \frac{\partial f(u_1;\cdots;u_n)}{\partial u_i}du_i$$

En utilisant la formule de base, nous obtenons:

$$\begin{aligned} df(u_1;\cdots;u_n) = \sum \frac{\partial f(u_1;\cdots;u_n)}{\partial u_i}du_i &= \sum (f(u_1;\cdots;u_n) - \frac{\partial tf(u_1;\cdots;u_n)}{\partial u_i})\frac{du_i}{u_i} \\ &= \sum f(u_1;\cdots;u_n)\frac{du_i}{u_i} - \sum \frac{\partial tf(u_1;\cdots;u_n)}{\partial u_i}\frac{du_i}{u_i} \\ &= f(u_1;\cdots;u_n)\sum \frac{du_i}{u_i} - \sum \frac{\partial tf(u_1;\cdots;u_n)}{\partial u_i}\frac{du_i}{u_i} \end{aligned}$$

Nous multiplions l'ensemble par $\prod u$

$$\begin{aligned} \prod udf(u_1;\cdots;u_n) &= f(u_1;\cdots;u_n)\sum \frac{\prod u}{u_i}du_i - \sum \frac{\partial tf(u_1;\cdots;u_n)}{\partial u_i}\frac{\prod u}{u_i}du_i \\ &= f(u_1;\cdots;u_n)d(\prod u) - dtf(u_1;\cdots;u_n) \end{aligned}$$

Finalement:

$$f(u_1;\cdots;u_n) = \frac{dtf(u_1;\cdots;u_n)}{d(\prod u)} + \prod u\frac{df(u_1;u_2;\cdots;u_n)}{d(\prod u)}$$

Le complémentaire sera donc:

$$dtf(u_1;u_2;\cdots;u_n)=\sum\frac{\partial tf(u_1;u_2;\cdots;u_n)}{\partial u_i}\frac{\prod u}{u_i}du_i$$

Et sa valeur réduite sera:

$$dtf(u_1;u_2;\cdots;u_n)=\sum\frac{\partial tf(u_1;u_2;\cdots;u_n)}{\partial u_i}\frac{du_i}{u_i}$$

2.3. **Généralité entre les dérivées partielles et les complémentaires sur la structure de notation.**
Notation :
Nous avons vu que la dérivée partielle était exprimée par ∂ et le complémentaire partiel par ∂t
Ainsi : $\frac{\partial f}{\partial u}$ est la dérivée de la fonction f par rapport à u, et $\frac{\partial t}{\partial u}(\frac{\partial f}{\partial u})$ sera le complémentaire de cette dérivée par rapport toujours à u.
De même : $\frac{\partial tf}{\partial u}$ est le complémentaire de la fonction f par rapport à u, et $\frac{\partial}{\partial u}(\frac{\partial tf}{\partial u})$ sera la dérivée de ce complémentaire par rapport toujours à u.
Pour ce qui sera des notations, On enlèvera les parenthèses et associera les éléments de même nature lorsqu'ils sont consécutifs en augmentant d'indice

$$\frac{\partial}{\partial u}(\frac{\partial f}{\partial u})=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$$
$$\frac{\partial t}{\partial u}(\frac{\partial tf}{\partial u})=\frac{\partial t^2 f}{\partial u^2}$$
$$\frac{\partial}{\partial u}(\frac{\partial}{\partial u}(\frac{\partial f}{\partial u}))=\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial^3 f}{\partial u^3}$$
$$\frac{\partial t}{\partial u}(\frac{\partial t}{\partial u}(\frac{\partial tf}{\partial u}))=\frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial tf}{\partial u}=\frac{\partial t^3 f}{\partial u^3}$$
$$\frac{\partial t}{\partial u}(\frac{\partial t}{\partial u}(\cdots\frac{\partial tf}{\partial u}\cdots))=\frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial t}{\partial u}\cdots\frac{\partial tf}{\partial u}=\frac{\partial t^n f}{\partial u^n}$$

Pour plus d'une variable :

$$\frac{\partial}{\partial u}(\frac{\partial f}{\partial v})=\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}$$
$$\frac{\partial t}{\partial u}(\frac{\partial tf}{\partial v})=\frac{\partial t^2 f}{\partial u\partial v}$$
$$\frac{\partial}{\partial u}(\frac{\partial}{\partial v}(\frac{\partial f}{\partial u}))=\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial^3 f}{\partial u\partial v\partial u}$$
$$\frac{\partial t}{\partial u}(\frac{\partial t}{\partial v}(\frac{\partial tf}{\partial u}))=\frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial t}{\partial v}\frac{\partial tf}{\partial u}=\frac{\partial t^3 f}{\partial u\partial v\partial u}$$
$$\frac{\partial t}{\partial u}(\frac{\partial t}{\partial v}(\cdots\frac{\partial tf}{\partial u}\cdots))=\frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial t}{\partial v}\cdots\frac{\partial tf}{\partial u}=\frac{\partial t^n f}{\partial u\partial v\cdots\partial u}$$

S'il y a interférence consécutivement entre deux opérateurs, on conserve l'expression linéaire:

$$\frac{\partial}{\partial u}(\frac{\partial tf}{\partial u}) = \frac{\partial \partial tf}{\partial u^2}$$
$$\frac{\partial t}{\partial u}(\frac{\partial f}{\partial u}) = \frac{\partial t \partial f}{\partial u^2}$$
$$\frac{\partial}{\partial u}(\frac{\partial t}{\partial u}(\frac{\partial f}{\partial u})) = \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial \partial t \partial f}{\partial u^3}$$
$$\frac{\partial t}{\partial u}(\frac{\partial}{\partial u}(\frac{\partial tf}{\partial u})) = \frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial tf}{\partial u} = \frac{\partial t \partial \partial tf}{\partial u^3}$$
$$\frac{\partial t}{\partial u}(\frac{\partial}{\partial u}(\cdots \frac{\partial tf}{\partial u} \cdots)) = \frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u}\cdots\frac{\partial tf}{\partial u} = \frac{\partial t \partial \cdots \partial tf}{\partial u^n}$$

Pour plus d'une variable :

$$\frac{\partial}{\partial u}(\frac{\partial tf}{\partial v}) = \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial tf}{\partial v}$$
$$\frac{\partial t}{\partial v}(\frac{\partial f}{\partial u}) = \frac{\partial t}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial u}$$
$$\frac{\partial}{\partial u}(\frac{\partial t}{\partial v}(\frac{\partial f}{\partial u})) = \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial t}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial \partial t \partial f}{\partial u \partial v \partial u}$$
$$\frac{\partial t}{\partial u}(\frac{\partial}{\partial u}(\frac{\partial tf}{\partial v})) = \frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial tf}{\partial v} = \frac{\partial t \partial \partial tf}{\partial u^2 \partial v}$$

Pour des variables différentes : Si deux valeurs opérationnelles de même nature se succèdent directement même s'il n'en est pas de même pour l'ensemble, en les associant, on augmente leur indice d'un terme

$$\frac{\partial t}{\partial v}(\frac{\partial}{\partial v}(\frac{\partial f}{\partial u})) = \frac{\partial t \partial^2 f}{\partial v^2 \partial u}$$
$$\frac{\partial}{\partial u}(\frac{\partial t}{\partial u}(\frac{\partial tf}{\partial v})) = \frac{\partial \partial t^2 f}{\partial u^2 \partial v}$$
$$\frac{\partial}{\partial v}(\frac{\partial}{\partial v}(\frac{\partial tf}{\partial u})) = \frac{\partial^2 \partial tf}{\partial v^2 \partial u}$$
$$\frac{\partial t}{\partial v}(\frac{\partial t}{\partial v}(\frac{\partial f}{\partial u})) = \frac{\partial t^2 \partial f}{\partial v^2 \partial u}$$

Pour des opérations supérieures :

$$\frac{\partial t}{\partial u}(\frac{\partial t}{\partial u}(\frac{\partial}{\partial u}(\frac{\partial f}{\partial u}))) = \frac{\partial t^2 \partial^2}{\partial u^4}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial v^2}(\frac{\partial}{\partial v}(\frac{\partial t}{\partial u}(\frac{\partial t^3 f}{\partial u^3}))) = \frac{\partial^3 \partial t^4 f}{\partial v^3 \partial u^4}$$
$$\frac{\partial}{\partial u}(\frac{\partial t}{\partial u}(\frac{\partial}{\partial v}(\frac{\partial}{\partial u}(\frac{\partial t}{\partial u})))) = \frac{\partial \partial t \partial^2 \partial tf}{\partial u^2 \partial v \partial u^2}$$

3. Complémentarités vectorielles

3.1. **complémentaire ordinaire de vecteur.** Soit un vecteur $\vec{R}(u)$ dépendant d'une seule variable scalaire u .
Nous avons:

$$\frac{\Delta t\vec{R}(u)}{\Delta u} = \frac{(u+\Delta u)\vec{R}(u) - u\vec{R}(u+\Delta u)}{\Delta u}$$

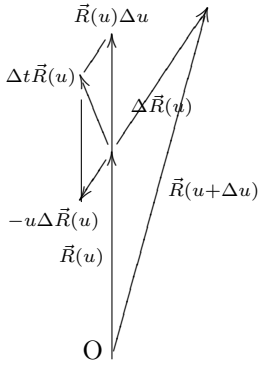
Ce vecteur après transformation de cette dernière expression:

$$\frac{\Delta t\vec{R}(u)}{\Delta u} = \frac{\Delta u\vec{R}(u) + u(\vec{R}(u) - \vec{R}(u+\Delta u))}{\Delta u} = \frac{\Delta u\vec{R}(u) - u\Delta\vec{R}(u)}{\Delta u}$$

Où Δu représente l'accroissement de u
Le complémentaire ordinaire d'un vecteur $\vec{R}(u)$ par rapport au scalaire u est donné par:

$$\frac{dt\vec{R}(u)}{du} = \lim_{\Delta u\to 0} \frac{\Delta u\vec{R}(u) - u\Delta\vec{R}(u)}{\Delta u}$$

Si cette complémentarité existe: Et son sens dépend de u et de la variation de u et $\vec{R}$ tel que présenté sur cette figure:



3.1.1. *Déplacement complémentaire élémentaire dans un plan orthogonal.*
Avant de procéder à l'étude vectorielle complémentaire, il est important de rappeler que le calcul c des fonctions ou des vecteurs est très dépendant de l'élément pris en référence:
Considérons un vecteur $\overrightarrow{OM}$ et un élément k quelconque:
En décrivant $\overrightarrow{OM}$ en fonction de k , nous aurons:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{dt\overrightarrow{OM}}{dk} + k\frac{d\overrightarrow{OM}}{dk}$$

Nous tirons de cette dernière equation $\overrightarrow{OM}$ dont la valeur est:

$$dt\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}dk - kd\overrightarrow{OM}$$

Si nous considérons que nous sommes dans un plan orthogonal (OIJ):

$$dt\overrightarrow{OM} = (x\vec{i} + y\vec{j})dk - k(\vec{i}dx + \vec{j}dy) = (xdk - kdx)\vec{i} + (ydk - kdy)\vec{j}$$
$$= \vec{i}dtx(k) + \vec{j}dty(k)$$

Dans ce dernier résultat dtx et dty sont liés à l'élément k
si nous considérons que nous sommes dans un plan orthogonal orienté pour un vecteur $\overrightarrow{OM}$ défini pour x et y, nous aurons établi que:

$$dt\overrightarrow{OM} = dty(x)\vec{j}$$

Le déplacement élémentaire c est orienté parallèlement à l'axe (OJ)

$$dt\vec{\ell} = \vec{j}dty$$

Il est également à mentionner que y ne doive pas être un monôme, auquel cas le déplacement serait nul:
Le vecteur complémentaire balayera comme il a déjà été établi une surface donc la valeur numérique entre deux points x_1 et x_2 sera:

$$S_C = \left| \int_{x_1}^{x_2} \text{`} f(x)dx \right|$$

Où $\text{`} f(x)$ est la fonction complémentaire de la fonction $f(x)$

3.1.2. *Courbe dans un espace à 3 dimensions.* Considérons un vecteur $\vec{A}$ de position $r(u)$ joignant l'origine 0 d'un système de coordonnées à un point quelconque $(x; y; z)$, nous aurons:

$$\vec{r}(u) = x(u)\vec{i} + y(u)\vec{j} + z(u)\vec{j}$$

Lors de la variation de u , l'extrémité de r décrit une courbe d'équation paramétrique:

$$x = x(u) \quad y = y(u) \quad z = z(u)$$

Suivant ce qui vient d'être vu,

$$\frac{dt\vec{r}(u)}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta u\vec{r}(u) - u\Delta\vec{r}(u)}{\Delta u}$$

est un vecteur de direction variable.
Si le vecteur

$$\frac{dt\vec{r}}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta t\,\vec{r}}{\Delta u}$$

existe, on obtient un vecteur donné par;

$$\frac{dt\vec{r}}{du} = \frac{dt\vec{x}}{du}\vec{i} + \frac{dt\vec{r}}{du}\vec{j} + \frac{dt\vec{r}}{du}\vec{k}$$

3.2. **Continuité, différentiabilité et complémentarité.** Nous savons qu'une fonction scalaire $\Phi(x)$ est dite continue en u si

$$\lim_{\Delta u \to 0} \Phi(u + \Delta u) = \Phi(u)$$

Ce qui de manière équivalente correspond à $\Phi(u)$ continue en u si pour tout nombre positif ϵ nous pouvons trouver un nombre positif δ tel que

$$|\Delta u| < \delta \; implique \; |\Phi(u + \Delta u) - \Phi(u)| < \epsilon$$

Ce qui entraîne également:

$$|\Delta u| < \delta \; implique \; |(u + \Delta u)\Phi(u) - u\Phi(u + \Delta u)| < \epsilon|u|$$

3.3. **Formules de complémentarisation.** Soient $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ des fonctions vectorielles de la variable scalaire u complémentarisable et Φ une fonction scalaire de la variable u complémentarisable. On a:

$$\frac{dt}{du}(\vec{A}+\vec{B}) = \frac{dt\vec{A}}{du} + \frac{dt\vec{B}}{du}$$
$$\frac{dt}{du}(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}\,\frac{dt\vec{B}}{du} + \vec{B}\,\frac{dt\vec{A}}{du} - \vec{A}\vec{B}$$
$$\frac{dt}{du}(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \vec{A}\wedge\frac{dt\vec{B}}{du} + \vec{B}\wedge\frac{dt\vec{A}}{du} - \vec{A}\wedge\vec{B}$$
$$\frac{dt}{du}(\Phi\times\vec{B}) = \Phi\,\frac{dt\vec{B}}{du} + \vec{B}\,\frac{dt\Phi}{du} - \Phi\vec{B}$$

3.4. **Complémentaires partiel des vecteurs.** Soit un vecteur $\vec{A}$ dépendant de plus d'une variable scalaire; en prenant par exemple trois exemple x, y et z. Ce qui nous amène à écrire $\vec{A} = \vec{A}(x;y;z)$
Le complémentaire partiel de $\vec{A}$ par rapport à x est défini par:

$$\frac{\partial t\vec{A}}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)\vec{A}(x;y;z) - x\vec{A}(x+\Delta x;y;z)}{\Delta x}$$

Si cette limite existe:
De même:

$$\frac{\partial t\vec{A}}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{(y+\Delta y)\vec{A}(x;y;z) - y\vec{A}(x;y+\Delta y;z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial t\vec{A}}{\partial z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)\vec{A}(x;y;z) - z\vec{A}(x;y;z+\Delta z)}{\Delta z}$$

Sont les complémentaires partiels de $\vec{A}$ par rapport à y et z respectivement si cette limite existe.
Les règles concernant les complémentaires partiels de vecteurs sont analogues à celle utilisées dans le calcul élémentaire pour les fonctions scalaires. Ainsi, si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont des fonctions de trois variables x, y et z nous aurons par exemple:

$$\frac{\partial t}{\partial u}(\vec{A}+\vec{B}) = \frac{\partial t\vec{A}}{\partial u} + \frac{\partial t\vec{B}}{\partial u}$$
$$\frac{\partial t}{\partial u}(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}\,\frac{\partial t\vec{B}}{\partial u} + \vec{B}\,\frac{\partial t\vec{A}}{\partial u} - \vec{A}\vec{B}$$
$$\frac{\partial t}{\partial u}(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \vec{A}\wedge\frac{\partial t\vec{B}}{\partial u} + \vec{B}\wedge\frac{\partial t\vec{A}}{\partial u} - \vec{A}\wedge\vec{B}$$
$$\frac{\partial t}{du}(\Phi\times\vec{B}) = \Phi\,\frac{\partial t\vec{B}}{\partial u} + \vec{B}\,\frac{\partial t\Phi}{\partial u} - \Phi\vec{B}$$

3.5. **Complémentaire des vecteurs.** Finalement la complémentarité des vecteurs suivent les mêmes règles que celles déjà vues, nous aurons entre autres:

$$\vec{A} = \sum_1^n A_i \vec{e_i} \; alors : \; dt\vec{A} = \sum_1^n dtA_i\vec{e_i}$$

$$dt(\vec{A}\vec{B} = \vec{A}dt\vec{B} + \vec{B}dt\vec{A} - \vec{A}\vec{B}$$

$$\vec{A}(u_1; \cdots ; u_n) \; alors \; dt\vec{A} = \sum_1^n \frac{\partial t\vec{A}}{\partial u_i} du_i$$

3.6. **Déplacements complémentaire et fonctions volumiques élémentaires dans un espace à n dimensions en coordonnées orthogonales.**
Nous avons défini de manière générale les vecteurs © en coordonnées orthogonales dans un espace à (n) dimensions pour un vecteur quelconque $\vec{A}$.

$$dt\vec{A} = \sum_1^n dtA_i\vec{e_i}$$

Dont le modèle est presque proche de celui de la dérivée.
De même pour un système quelconque d'éléments caractéristiques :
Base : $B\left(\vec{e_1}; \vec{e_2}; \vec{e_3}; \cdots ; \vec{e_n}\right)$
Cordonnées : $\vec{u}\left(u_1; u_2; u_3; \cdots ; u_n\right)$
Eléments du système: $h\left(h_1; h_2; \cdots ; h_n\right)$
Le vecteur déplacement élémentaire dans ce système est :

$$d\vec{\ell} = \sum_{i=1}^n h_i du_i \vec{e_i}$$

Et pour fonction volumique associée :

$$dU = \prod_{i=1}^n h_i du_i$$

Nous référant sur ce modèle, sachant que le vecteur déplacement © élémentaire est donné par :

$$dt\vec{\ell} = \sum_{i=1}^n h_i dtu_i \vec{e_i}$$

Nous allons définir le volume complémentaire associé par

$$dtU = \prod_{i=1}^n h_i dtu_i$$

En considérant que les dtu_i existent:

4. L'opérateur complémentaire Ndzina

Dans le calcul complémentaire, le chapitre sur l'opérateur complémentaire ndjina Etoundi du nom d'un de nos oncles à qui nous avons beaucoup l'affection est sans nul doute le plus important. C'est pourquoi, nous lui avons accordé une place importante dans le développement : L'opérateur © sera le complémentaire du fameux opérateur géométrique nabla dont le symbole est : $\vec{\nabla}$ et cet opérateur dans sa nature réduite sera définie par l'élément symbolique suivant : $\vec{\Pi}$

4.1. **L'expression géométrique réduit de l'opérateur complémentaire en coordonnées curvilignes orthogonales.**

Nous connaissons très bien, l'expression analytique de l'opérateur nabla qui est :

$$\nabla = \sum_1^n \frac{\vec{e_i}}{h_i}\frac{\partial}{\partial u_i}$$

C'est à partir de cet opérateur qu'on tire des grandeurs géométriques telles que le gradient, le rotationnel, le divergent et le laplacien. De même pour chacune de ces grandeurs, nous allons définir une valeur complémentaire :

4.1.1. *Détermination de l'opérateur.*

Nous avons établi qu'il existe une relation entre la continuité, la dérivabilité et la complémentarité $f(x) = \text{`}f(x) + xf'(x)$; de même que pour les opérateurs $\blacksquare = \dfrac{\partial t}{\partial u} + u\dfrac{\partial}{\partial u}$, nous allons supposer qu'il en est de même pour les opérateurs géométriques. C'est pourquoi, nous allons travailler avec l'opérateur connu nabla:

a) Usage du gradient:

En effet, pour une fonction scalaire $f(u_1; u_2; \cdots; u_n)$, le gradient est donné par la formule :

$$\vec{grad} f(u_1; u_2; \cdots; u_n) = \vec{\nabla} f(u_1; u_2; \cdots; u_n) = \sum_1^n \frac{\vec{e_i}}{h_i}\frac{\partial f(u_1; u_2; \cdots; u_n)}{\partial u_i}$$

Connaissant les relations ultérieures, Nous obtenons :

$$\frac{\partial f(u_1; u_2; \cdots; u_n)}{\partial u_i} = \frac{1}{u_i}(f(u_1; u_2; \cdots; u_n) - \frac{\partial t f(u_1; u_2; \cdots; u_n)}{\partial u_i})$$

En remplaçant cette dernière expression dans l'expression du gradient, nous obtiendrons :

$$\vec{\nabla} f(u_1; u_2; \cdots; u_n) = \sum_1^n \frac{\vec{e_i}}{h_i}\frac{\partial f(u_1; u_2; \cdots; u_n)}{\partial u_i})$$

$$= \sum_1^n \frac{\vec{e_i}}{h_i}[\frac{1}{u_i}(f(u_1; u_2; \cdots; u_n) - \frac{\partial t f(u_1; u_2; \cdots; u_n)}{\partial u_i})]$$

$$= f(u_1; u_2; \cdots; u_n)\sum_1^n \frac{\vec{e_i}}{h_i u_i} - \sum_1^n \frac{\vec{e_i}}{h_i u_i}\frac{\partial t f(u_1; u_2; \cdots; u_n)}{\partial u_i}$$

A partir de cette dernière expression, nous retenons l'expression suivante :

$$\sum_1^n \frac{\vec{e_i}}{h_i u_i}\frac{\partial t f(u_1; u_2; \cdots; u_n)}{\partial u_i}$$

b) usage du divergent:
Nous savons que pour un vecteur quelconque $\vec{A}(u_1;u_2;\cdots;u_n)$, le divergent est défini comme suit :

$$div\vec{A}(u_1;u_2;\cdots;u_n)=\sum_1^n\frac{\vec{e_i}}{h_i}\frac{\partial}{\partial u_i}*\vec{A}(u_1;u_2;\cdots;u_n)=\sum_1^n\frac{\vec{e_i}}{h_i}\frac{\partial\vec{A}(u_1;u_2;\cdots;u_n)}{\partial u_i}$$

Or nous connaissons la relation suivante :

$$\vec{A}(u_1;u_2;\cdots;u_n)=\frac{\partial t\vec{A}(u_1;u_2;\cdots;u_n)}{\partial u_i}+u_i\frac{\partial\vec{A}(u_1;u_2;\cdots;u_n)}{\partial u_i}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial\vec{A}(u_1;u_2;\cdots;u_n)}{\partial u_i}=\frac{1}{u_i}(\vec{A}(u_1;u_2;\cdots;u_n)-\frac{\partial t\vec{A}(u_1;u_2;\cdots;u_n)}{\partial u_i})$$

En remplaçant cette dernière expression dans le divergent, nous aurons :

$$\nabla\vec{A}(u_1;u_2;\cdots;u_n)=\sum_1^i\frac{\vec{e_i}}{h_i}\frac{\partial\vec{A}(u_1;u_2;\cdots;u_n)}{\partial u_i}$$

$$=\sum_1^n\frac{\vec{e_i}}{h_i}[\frac{1}{u_i}(\vec{A}(u_1;u_2;\cdots;u_n)-\frac{\partial t\vec{A}(u_1;u_2;\cdots;u_n)}{\partial u_i})]$$

$$=\vec{A}(u_1;u_2;\cdots;u_n)\sum_1^n\frac{\vec{e_i}}{h_iu_i}-\sum_1^n\frac{\vec{e_i}}{h_iu_i}\frac{\partial t\vec{A}(u_1;u_2;\cdots;u_n)}{\partial u_i}$$

Du résultat suivant, nous retenons cette expression :

$$\sum_1^n\frac{\vec{e_i}}{h_iu_i}\frac{\partial t\vec{A}(u_1;u_2;\cdots;u_n)}{\partial u_i}$$

Des deux expressions retenues, nous pouvons établir l'expression de l'opérateur ©, et cette expression sera définie par la formule suivante :

$$\vec{\Pi}=\sum_1^n\frac{\vec{e_i}}{h_iu_i}\frac{\partial t}{\partial u_i}$$

4.2. **Relation des opérateurs géométriques.** En revenant aux deux dernières expressions vues, nous aurons :

$$\vec{\nabla}=f(u_1;u_2;\cdots;u_n)\sum_1^n\frac{\vec{e_i}}{h_iu_i}-\sum_1^n\frac{\vec{e_i}}{h_iu_i}\frac{\partial tf(u_1;u_2;\cdots;u_n)}{\partial u_i}$$

$$=f(u_1;u_2;\cdots;u_n)\sum_1^n\frac{\vec{e_i}}{h_iu_i}-\vec{\Pi}f(u_1;u_2;\cdots;u_n)$$

Ce qui donne :

$$\vec{\nabla}f(u_1;u_2;\cdots;u_n)+\vec{\Pi}f(u_1;u_2;\cdots;u_n)=\sum_1^n\frac{\vec{e_i}}{h_iu_i}f(u_1;u_2;\cdots;u_n)$$

Et pour l'autre, nous aurons :

$$\vec{\nabla}\vec{A}(u_1;u_2;\cdots;u_n)=\vec{A}(u_1;u_2;\cdots;u_n)\sum_1^n\frac{\vec{e_i}}{h_iu_i}-\sum_1^n\frac{\vec{e_i}}{h_iu_i}\frac{\partial t\vec{A}(u_1;u_2;\cdots;u_n)}{\partial u_i}$$

$$=\vec{A}(u_1;u_2;\cdots;u_n)\sum_1^n\frac{\vec{e_i}}{h_iu_i}-\vec{\Pi}\vec{A}(u_1;u_2;\cdots;u_n)$$

Ce qui donne :

$$\vec{\nabla}\vec{A}(u_1;u_2;\cdots;u_n)+\vec{\Pi}\vec{A}(u_1;u_2;\cdots;u_n)=\sum_1^n\frac{\vec{e_i}}{h_iu_i}\vec{A}(u_1;u_2;\cdots;u_n)$$

Ce qui nous amène à établir la relation générale suivante :

$$\vec{\nabla}+\vec{\Pi}=\sum_1^n\frac{\vec{e_i}}{h_iu_i}$$

$\frac{\vec{e_i}}{h_iu_i}$ est le vecteur opérationnel à qui nous pouvons encore donner la valeur de $\vec{\mu}$
Ce qui fera de manière globale :

$$\vec{\nabla}\vec{A}(u_1;u_2;\cdots;u_n)+\vec{\Pi}\vec{A}(u_1;u_2;\cdots;u_n)=\vec{\mu}\vec{A}(u_1;u_2;\cdots;u_n)$$

$$\vec{\nabla}f(u_1;u_2;\cdots;u_n)+\vec{\Pi}f(u_1;u_2;\cdots;u_n)=\vec{\mu}f(u_1;u_2;\cdots;u_n)$$

D'où la relation fondamentale suivante :

$$\vec{\nabla}+\vec{\Pi}=\vec{\mu}$$

A partir de cette dernière formule, nous allons définir d'autres grandeurs vectorielles complémentaires :

4.3. **Le gradient complémentaire ou cradient.**
Le complémentaire du gradient sera appelé cradient et son écriture réduite tirée de l'exploitation du gradient sera :

$$\vec{crad}f(u_1;u_2;\cdots;u_n)=\vec{\Pi}\times f(u_1;u_2;\cdots;u_n)=\sum_1^n\frac{\vec{e_i}}{h_iu_i}\frac{\partial tf(u_1;u_2;\cdots;u_n)}{\partial u_i}$$

4.4. **Le divergent complémentaire ou civergent.**
Le complémentaire du divergent sera appelé civergent et son écriture réduite tirée de l'exploitation du divergent sera :

$$civ\vec{A}(u_1;u_2;\cdots;u_n)=\vec{\Pi}\times\vec{A}(u_1;u_2;\cdots;u_n)=\sum_1^n\frac{\vec{e_i}}{h_iu_i}\frac{\partial t\vec{A}(u_1;u_2;\cdots;u_n)}{\partial u_i}$$

4.5. **Le rotationnel complémentaire.**
Le rotationnel complémentaire sera appelé crotationnel:
Et d'après la formule des opérateurs vectoriels que nous venons d'établir, pour un vecteur quelconque $\vec{A}(u_1;u_2;\cdots;u_n)$:
Le rotationnel © sera défini comme suivant :

$$crot\vec{A}(u_1;u_2;\cdots;u_n)=\vec{\Pi}\wedge\vec{A}(u_1;u_2;\cdots;u_n)=\vec{\mu}\wedge\vec{A}(u_1;u_2;\cdots;u_n)-\vec{\nabla}\wedge\vec{A}(u_1;u_2;\cdots;u_n)$$

4.6. **Le laplacien complémentaire.**
Le laplacien © sera défini par le symbol suivant Λ;
Et d'après la formule établie, nous aurons:

$$\Lambda = \Pi^2 = \sum_1^n \frac{\vec{e_i}}{h_i u_i}\frac{\partial t}{\partial u_i}(\sum_1^n \frac{\vec{e_i}}{h_i u_i}\frac{\partial t}{\partial u_i})$$

4.7. **Quelques Relations liées à l'Opérateur Complémentaire.**

4.7.1. *Relations du Cradien.*
i) Relation de somme
Soit f une fonction tel que :

$$f = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$$

Nous avons :

$$\vec{crad}f = \sum \frac{\vec{e_i}}{h_i u_i}\frac{\partial t}{\partial u_i}(f_1+f_2+\cdots+f_n) = \sum \frac{\vec{e_i}}{h_i u_i}\frac{\partial t f_1}{\partial u_i}+\sum \frac{\vec{e_i}}{h_i u_i}\frac{\partial t f_2}{\partial u_i}+\cdots+\sum \frac{\vec{e_i}}{h_i u_i}\frac{\partial t f_n}{\partial u_i}$$
$$= \vec{crad}f_1 + \vec{crad}f_2 + \cdots + \vec{crad}f_n$$

Ce qui fera :

$$\vec{crad}f = \vec{crad}f_1 + \vec{crad}f_2 + \cdots + \vec{crad}f_n$$

ii) Relation de produit
Soient deux fonctions réelles f et g :
Nous avons :

$$\vec{crad}(f \times g) = \sum \frac{\vec{e_i}}{h_i u_i}\frac{\partial t}{\partial u_i}(f \times g) = \sum \frac{\vec{e_i}}{h_i u_i}[f\frac{\partial t g}{\partial u_i} + g\frac{\partial t f}{\partial u_i} - fg]$$
$$= f\sum \frac{\vec{e_i}}{h_i u_i}\frac{\partial t g}{\partial u_i} + g\sum \frac{\vec{e_i}}{h_i u_i}\frac{\partial t f}{\partial u_i} - fg\sum \frac{\vec{e_i}}{h_i u_i}$$
$$= f\vec{crad}g + g\vec{crad}f - fg\vec{\mu}$$

Ce qui fait :

$$\vec{crad}(f \times g) = f\vec{crad}g + g\vec{crad}f - fg\vec{\mu}$$

iii) Formules du complémentaire
D'après ce qui a été déjà établi au chapitre précédent dans un espace vectoriel à plusieurs dimensions, nous avons :

$$dtf(u_1; u_2; \cdots; u_n) = \frac{1}{u_i}\sum \frac{\vec{e_i}}{u_i}\frac{\partial t f(u_1; u_2; \cdots; u_n)}{\partial u_i}du_i$$

Pour une fonction intégrant de divers systèmes :

$$dtf(u_1; u_2; \cdots; u_n) = \frac{1}{u_i}\sum \frac{\vec{e_i}}{h_i u_i}\frac{\partial t f(u_1; u_2; \cdots; u_n)}{\partial u_i}du_i$$

A présent reconsidérons le vecteur cradient que nous avons eu à définir :

$$\vec{crad}f(u_1; u_2; \cdots; u_n) = \sum_1^n \frac{\vec{e_i}}{h_i u_i}\frac{\partial t f(u_1; u_2; \cdots; u_n)}{\partial u_i}$$

En le multipliant avec le vecteurs $d\vec{u} = \vec{e_1}du_1 + \vec{e_2}du_2 + \cdots + \vec{e_n}du_n$ Le produit $\vec{crad}f(u_1; u_2; \cdots; u_n) \times d\vec{u}(u_1; u_2; \cdots; u_n)$ On en conclu que :

$$dtf(u_1; u_2; \cdots; u_n) = \vec{crad}f(u_1; u_2; \cdots; u_n) \times d\vec{\ell}(u_1; u_2; \cdots; u_n)$$

4.7.2. *Relations du Civergent.*
i) Relation de somme
Soient $\vec{A}$ un vecteur dans un espace de dimension n et un ensemble E de vecteurs $\vec{A_i}$ définie dans le même espace tel que : $\vec{A} = \vec{A_1} + \vec{A_2} + \cdots + \vec{A_n}$ On aura donc :

$$civ\vec{A} = \sum \frac{\vec{e_i}}{h_i u_i} \frac{\partial t}{\partial u_i}(\vec{A_1}+\vec{A_2}+\cdots+\vec{A_n}) = \sum \frac{\vec{e_i}}{h_i u_i} \frac{\partial t\vec{A_1}}{\partial u_i} + \sum \frac{\vec{e_i}}{h_i u_i} \frac{\partial t\vec{A_2}}{\partial u_i} + \cdots \sum \frac{\vec{e_i}}{h_i u_i} \frac{\partial t\vec{A_n}}{\partial u_i}$$

$$= civ\vec{A_1} + civ\vec{A_2} + \cdots + civ\vec{A_n}$$

Finalement, nous avons :

$$civ\vec{A} = civ\vec{A_1} + civ\vec{A_2} + \cdots + civ\vec{A_n}$$

ii) Relation de produit Soient une fonction Φ et un vecteur $\vec{A}$, nous avons :

$$civ(\Phi\vec{A}) = \sum \frac{\vec{e_i}}{h_i u_i} \frac{\partial t(\Phi\vec{A})}{\partial u_i} = \sum \frac{\vec{e_i}}{h_i u_i}(\Phi \frac{\partial t\vec{A}}{\partial u_i} + \vec{A}\frac{\partial t\Phi}{\partial u_i} - \Phi\vec{A})$$

$$= \Phi \sum \frac{\vec{e_i}}{h_i u_i} \frac{\partial t\vec{A}}{\partial u_i} + \vec{A}\sum \frac{\vec{e_i}}{h_i u_i} \frac{\partial t\Phi}{\partial u_i} - \Phi\vec{A}\sum \frac{\vec{e_i}}{h_i u_i}$$

$$= \Phi civ\vec{A} + \vec{A}cr\vec{a}d\Phi - \Phi\vec{\mu}\vec{A}$$

Finalement :

$$civ(\Phi\vec{A}) = \Phi civ\vec{A} + \vec{A}cr\vec{a}d\Phi - \Phi\vec{\mu}\vec{A}$$

4.7.3. *Relations du Crotationnel.*
i) Relation de somme
Soit un ensemble de vecteur défini dans un espace vectoriel V, tel que:

$$\vec{A} = \vec{A_1} + \vec{A_2} + \cdots + \vec{A_n}$$

Nous avons:

$$crot\vec{A} = \vec{\Pi} \wedge (\vec{A_1} + \vec{A_2} + \cdots + \vec{A_n})$$
$$= \vec{\Pi} \wedge \vec{A_1} + \vec{\Pi} \wedge \vec{A_2} + \cdots + \vec{\Pi} \wedge \vec{A_n}$$
$$= crot\vec{A_1} + crot\vec{A_2} + \cdots + crot\vec{A_n}$$

Finalement:

$$crot\vec{A} = crot\vec{A_1} + crot\vec{A_2} + \cdots + crot\vec{A_n}$$

ii) Relation de produit
Soit un vecteur $\vec{A}$ et une fonction réelle f
Nous avons:

$$crot(f\vec{A}) = \vec{\Pi} \wedge (f\vec{A}) = f\vec{\Pi} \wedge \vec{A} = f crot\vec{A}$$

finalement:

$$crot(f\vec{A}) = f crot\vec{A}$$

Toutefois:

$$crot(cr\vec{a}df) = 0$$

4.7.4. *Relations du laplacien complémentaire.*
i) Première relation Soit l'expression du Laplacien suivante :

$$\Delta = \vec{\nabla}^2$$

En tirant nabla de la formule plus haut, nous obtiendrons :

$$\Delta = (\vec{\mu} - \vec{\Pi})^2 = \vec{\mu}^2 - \vec{\mu}\vec{\Pi} - \vec{\Pi}\vec{\mu} + \vec{\Pi}^2$$

Or $\vec{\mu} - \vec{\Pi} = \vec{\nabla}$ D'où la relation suivante :

$$\Delta - \Lambda = \vec{\mu}\vec{\nabla} - \vec{\Pi}\vec{\mu}$$

De même : En ne modifiant qu'une seule valeur, nous aurons :

$$\Delta = \vec{\nabla}^2 = \vec{\nabla}(\vec{\mu} - \vec{\Pi}) = \vec{\nabla}\vec{\mu} - \vec{\nabla}\vec{\Pi}$$

ii) Deuxième relation
Soit l'expression du Claplacien suivante :

$$\Lambda = \vec{\Pi}^2$$

En tirant nabla de la formule plus haut, nous obtiendrons

$$\Lambda = (\vec{\mu} - \vec{\nabla})^2 = \vec{\mu}^2 - \vec{\mu}\vec{\nabla} - \vec{\nabla}\vec{\mu} + \vec{\nabla}^2$$

Or $\vec{\mu} - \vec{\Pi} = \vec{\nabla}$ D'où :

$$\Lambda - \Delta = \vec{\mu}\vec{\Pi} - \vec{\nabla}\vec{\mu}$$

De même : En ne modifiant qu'une seule valeur, nous aurons :

$$\Lambda = \vec{\Pi}^2 = \vec{\Pi}(\vec{\mu} - \vec{\nabla}) = \vec{\Pi}\vec{\mu} - \vec{\Pi}\vec{\nabla}$$

4.8. **Relations explicites des grandeurs complémentaires.**
De manière générale, les valeurs géométriques dérivant de l'opérateur nabla s'expriment de manière simplifiée dans un espace à trois dimensions, c'est pourquoi nous avons trouvé nécessaire d'exprimer explicitement également les valeurs géométriques complémentaires:

4.8.1. *Expression simplifiée du cradient.*
Pour le gradient, on a la valeur simplifiée suivante

$$\vec{\nabla} = \sum \frac{\vec{e_i}}{h_i}\frac{\partial}{\partial u_i}$$

Le cradient lui sera :

$$\vec{\Pi} = \sum \frac{\vec{e_i}}{h_i u_i}\frac{\partial t}{\partial u_i}$$

4.8.2. *Expression simplifiée du civergent.*
Le divergent a pour expression simplifiée

$$\vec{\nabla}\vec{A} = \frac{1}{\prod h}\sum \frac{\partial}{\partial u_i}(h_j h_k A_i)$$

A partir de cette dernière formule nous allons tiré l'expression du civergent simplifié
Nous avons :

$$\vec{\Pi}\vec{A} = \vec{\mu}\vec{A} - \vec{\nabla}\vec{A} = \sum \frac{A_i}{h_i u_i} - \frac{1}{h_i h_j h_k}\sum \frac{\partial}{\partial u_i}(h_j h_k A_i)$$

$$= \sum \frac{1}{h_i h_j h_k}(\frac{h_j h_k A_i}{u_i} - \frac{\partial}{\partial u_i}(h_j h_k A_i))$$

$$= \sum \frac{1}{h_i h_j h_k}(\frac{1}{u_i}\frac{\partial}{\partial u_i}(h_j h_k A_i))$$

$$= \frac{1}{h_i h_j h_k}\sum(\frac{1}{u_i}\frac{\partial}{\partial u_i}(h_j h_k A_i)$$

Finalement nous obtenons la formule simplifiée suivante

$$\vec{\Pi}\vec{A} = \frac{1}{h_i h_j h_k}\sum(\frac{1}{u_i}\frac{\partial}{\partial u_i}(h_j h_k A_i)$$

4.8.3. *Expression simplifiée du crotationnel.*
Pour déterminer l'expression simplifiée du crotationnel, il est important de s'arrêter à la formule du rotationnel suivante:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \frac{1}{\prod h_i}\begin{vmatrix} h_1\vec{e_1} & h_2\vec{e_2} & h_3\vec{e_3} \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

La décomposition de cette formule donne:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \frac{1}{\prod h_i}\begin{vmatrix} h_1\vec{e_1} & h_2\vec{e_2} & h_3\vec{e_3} \\ \frac{.}{u_1} - \frac{1}{u_1}\frac{\partial t}{\partial u_1} & \frac{.}{u_2} - \frac{1}{u_2}\frac{\partial t}{\partial u_2} & \frac{.}{u_3} - \frac{1}{u_3}\frac{\partial t}{\partial u_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\prod h_i}\begin{vmatrix} h_1\vec{e_1} & h_2\vec{e_2} & h_3\vec{e_3} \\ \frac{\dot{}}{u_1} & \frac{\dot{}}{u_2} & \frac{\dot{}}{u_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} - \frac{1}{\prod h_i}\begin{vmatrix} h_1\vec{e_1} & h_2\vec{e_2} & h_3\vec{e_3} \\ \frac{1}{u_1}\frac{\partial t}{\partial u_1} & \frac{1}{u_2}\frac{\partial t}{\partial u_2} & \frac{1}{u_3}\frac{\partial t}{\partial u_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{\mu} \wedge \vec{A} - \vec{\Pi} \wedge \vec{A}$$

Finalement, nous en déduisons que:

$$\vec{\Pi} \wedge \vec{A} = \frac{1}{\prod h_i}\begin{vmatrix} h_1\vec{e_1} & h_2\vec{e_2} & h_3\vec{e_3} \\ \frac{1}{u_1}\frac{\partial t}{\partial u_1} & \frac{1}{u_2}\frac{\partial t}{\partial u_2} & \frac{1}{u_3}\frac{\partial t}{\partial u_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

4.8.4. *Expression simplifiée du laplacien complémentaire.*
On a : $\Lambda = \vec{\Pi}^2 = \vec{\Pi}\vec{\Pi}$
Ndzina étant un vecteur, nous aboutirons à :

$$\vec{\Pi}\vec{\Pi} = \frac{1}{h_i h_j h_k}\sum(\frac{1}{u_i}\frac{\partial}{\partial u_i}(h_j h_k \Pi_i)$$

Or

$$\vec{\Pi} = \sum \frac{\vec{e_i}}{h_i u_i}\frac{\partial t}{\partial u_i} \Rightarrow \Pi_i = \frac{1}{h_i u_i}\frac{\partial t}{\partial u_i}$$

En revenant remplacer,

$$\vec{\Pi}\vec{\Pi} = \frac{1}{h_i h_j h_k}\sum(\frac{1}{u_i}\frac{\partial}{\partial u_i}(h_j h_k \frac{1}{h_i u_i}\frac{\partial t}{\partial u_i}) = \frac{1}{\prod h}\sum \frac{1}{u_i}\frac{\partial t}{\partial u_i}(\frac{h_i h_j h_k}{h_i^2 u_i}\frac{\partial t}{\partial u_i})$$

Finalement :

$$\Lambda = \frac{1}{\prod h}\sum \frac{1}{u_i}\frac{\partial t}{\partial u_i}(\frac{\prod h}{h_i^2 u_i}\frac{\partial t}{\partial u_i})$$

4.8.5. *Expressions simplifiées d'autres grandeurs géométriques.*

$$\vec{\nabla}\vec{\Pi} = \frac{1}{\prod h}\sum \frac{\partial}{\partial u_i}(\frac{\prod h}{h_i^2 u_i}\frac{\partial t}{\partial u_i})$$

$$\vec{\Pi}\vec{\nabla} = \frac{1}{\prod h}\sum \frac{1}{u_i}\frac{\partial t}{\partial u_i}(\frac{\prod h}{h_i^2}\frac{\partial}{\partial u_i})$$

$$\vec{\nabla}\vec{\mu} = \frac{1}{\prod h}\sum \frac{\partial}{\partial u_i}(\frac{\prod h}{h_i^2 u_i})$$

$$\vec{\Pi}\vec{\mu} = \frac{1}{\prod h}\sum \frac{1}{u_i}\frac{\partial}{\partial u_i}(\frac{\prod h}{h_i^2 u_i})$$

Dans ce nouveau chapitre, nous faisons apparaître de nouveaux connecteurs qui vont nous aider à la détermination des fonctions mères à partir des fonctions complémentaires C'est un chapitre symétrique à celui des primitives dans le cadre dans la dérivabilité.

5. Notion de translateurs et de translation ©

5.1. **Notion de translation complémentaire.**

Nous pouvons déclarer avec raison que le terme dérivée s'applique bien à la fonction $f'(x)$, car cette dernière dérive bien de la fonction initiale $f(x)$
$f'(x)$ dérive de $f(x)$
De même, le terme primitive est en accord avec la transformation $\int f(x)dx$, car la fonction qu'elle décrit peut être vue comme l'ancêtre de la fonction $f(x)$
$\int f(x)dx$ primitive de $f(x)$
Nous remarquons également en terme de dimension que la fonction dérivée de $f(x)$ a un degré de moins que la fonction mère.
En effet, si nous prenons la fonction suivante :

$$f(x) = x^n$$

En la dérivant, nous obtenons :

$$f^{`}(x) = nx^{n-1}$$

Si nous comparons les puissances des deux monômes, nous obtenons :

$$x^n \sup x^{n-1} \, et \, \frac{x^n}{x^{n-1}} = x$$

De même la fonction primitive a un degré de plus que la fonction mère $f(x)$
En effet, revenons à notre fonction $f(x) = x^n$
En calculant sa primitive, nous aurons :

$$\int f(x)dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Si nous comparons les deux fonctions en fonctions de leur degré de puissance ;
Nous aurons :

$$x^n \leq x^{n+1} \, et \, \frac{x^{n+1}}{x^n} = x$$

Nous pourrons donc ainsi des deux observations, considérer les intervalles suivants en fonction de la puissance

$$x^{n+1} \leq x^n \leq x^{n+1} \, et \, , f'(x) \leq f(x) \leq \int f(x)dx$$

A l'opposé de la dérivée, nous nous sommes rendu compte que la fonction complémentaire conserve le même degré de puissance que la fonction $f(x)$ considérée
En effet :

$$`f(x) = f(x) - xf'(x)$$

En considérant que la fonction $f$est de dimension n, nous constatons que la fonction complémentaire est également de dimension n sachant que
$`f(x) = f(x) - xf'(x)$ : Il y a donc entre $f(x)$ et $`f(x)$une conservation de degré de puissance:

C'est pourquoi, nous avons pensé qu'il y a entre ces deux fonctions juste une sorte de translation de conservation de degré,

$$f(x) \to\backprime f(x)$$

De ce qui précède, nous allons donc définir le passage d'une fonction © $\backprime f(x)$ à une fonction mère $f(x)$ par le terme translation primitive : Ainsi :

$$translation\backprime f(x) = f(x)$$

5.1.1. *Notion de Translateur.* Nous allons définir les translateurs © comme les symboles algébriques qui nous permettrons d'effectuer de telles opérations:

$$translation\backprime f(x) = f(x)$$

$$translation\backprime f(x;y) = f(x;y)$$

$$translation\backprime f(x)\backprime f(y) = f(x)f(y)$$

Ces translateurs, seront ultérieurement comme tous les connecteurs que nous introduit dans le calcul © remplacés par des symboles purement africain. Mais le moment, nous allons les représenter par les symboles suivants :

$$(\,;\,((\,;\,(((\,;\cdots\cdots;\,((\cdots($$

Avec :
$($ connecteur primaire
$((\,$ connecteur double ou secondaire
$(((\,$ connecteur triple ou tertiaire
Et dans les calculs, nous aurons :
a) $(\backprime f(x)dx = f(x)$ ou $(dtf(x)dx = f(x)$
b) $((\backprime f(x;y)dxdy = f(x;y)$ ou $((dtf(x;y)dxdy = f(x;y)$
c) $(((\backprime f(x;y;z)dxdydz = f(x;y;z)$ ou $(((dtf(x;y;z)dxdydz = f(x;y)$
d) $(((\cdots(\backprime f(x_1;x_2;x_3;\cdots;x_n)dx_1dx_2dx_3\cdots dx_n = f(x_1;x_2;x_3;\cdots;x_n)$
ou $(((\cdots(dtf(x_1;x_2;x_3;\cdots;x_n)dx_1dx_2dx_3\cdots dx_n = f(x_1;x_2;x_3;\cdots;x_n)$

5.2. **Translation primitive des fonctions F(X).**
L'étude de la translation des fonctions, est une étude qui permet d'établir de manière simple et évidente les relations qui permettent de calculer facilement la translation primitive d'une fonction f considérée
Pour introduire, nous allons commencer par l'étude de la fonction $f(x)$
a) Première relation Pour un début, ce qui nous est venu à l'esprit était la relation que nous avons déjà eu à établir:

$$\backprime(uv) =\backprime uv + u\backprime v - uv$$

En introduisant le translateur, nous aurons:

$$(\backprime(uv) = (\backprime uv + (u\backprime v - uv$$

$$(uv) = (\backprime uv + (u\backprime v - (uv$$

Ce qui nous amène finalement à la relation suivante :

$$(uv) = \text{`}uv + \text{`}u\text{`}v - \text{`}uv$$

Ceci est la toute première relation relative au calcul des translations primitives des fonctions de type $f(x)$ Cependant, cette formule peut présenter certaines complications, lorsque les fonctions sont complexes, c'est pourquoi nous avons trouvé une formule plus explicite :

En remarquant que: $\dfrac{dtf(x)}{dx} = \dfrac{d(\dfrac{f(x)}{x})}{d(\dfrac{1}{x})}$

On en déduit moyennant quelques transformations que:

$$f(x) = \text{`}f(x)dx = -x\int \frac{\text{`}f(x)}{x^2}dx$$

5.3. **Translation primitive double et translation surfacique double.** Concernant les translations primitives doubles, elles seront décrites pour une fonction scalaire f dépendante de deux variables scalaires x et y tels que $f = f(x; y)$

$$\text{``}f(x; y)\, dxdy$$

De même nous pouvons avoir ces autres exemples:

$$\text{``}f(x)f(y)\, dxdy \qquad \text{``}f(x)f(y)f(z)\, dxdy \qquad \text{``}f(x; y; z; k)\, dxdy$$

Pour des fonctions complémentaires définies, nous aurons:

$$\text{``}\frac{\partial tf(x)}{\partial x}\frac{\partial tf(y)}{\partial y}\, dxdy = (f(x)+Cx)(f(y)+By) = f(x)f(y)+Byf(x)+Cxf(y)+CBxy$$

Où C et B sont des constances réelles:
Finalement pour une fonction surfacique continue et complémentaire dans un intervalle considéré $S(x; y)$, on aura:

$$\text{``}S(x; y)\, dxdy = xy\iint \frac{S(x; y)}{(xy)^2}\, dxdy$$

5.4. **Translation primitive triple et translation volumique triple.** Concernant les translations primitives triple, elles seront décrites pour une fonction scalaire f dépendante de trois variables scalaires x, y et z tels que $f = f(x; y; z)$

$$\text{```}f(x; y; z)\, dxdydz$$

Ce qui correspondra à:

$$\text{```}f(x; y; z)\, dxdydz = -xyz\iiint \frac{f(x; y; z)}{(xyz)^2}dxdydz$$

Pour des fonctions complémentaires définies,
nous aurons:

$$\left(\left(\left(\frac{\partial t f(x)}{\partial x}\frac{\partial t f(y)}{\partial y}\frac{\partial t f(z)}{\partial z}\,dxdydz = (f(x)+Cx)(f(y)+By)(f(z)+Cz)\right.\right.\right.$$

Où C, B et D sont des constances réelles:
Finalement pour une fonction volumique continue et complémentaire dans un intervalle considéré $V(x;y;z)$, on aura:

$$\left(\left(\left(V(x;y;z)dxdydz = -xyz\iiint \frac{V(x;y;z)}{(xyz)^2}\,dxdydz\right.\right.\right.$$

6. Intégration complémentaire

Après les translations complémentaires, nous allons tout naturellement passer aux intégrations par complémentarité. Nous allons cherché à quoi pouvait ressembler une telle intégration :

6.1. **Notion d'intégrale complémentaire.**

Nous considérons l'intégrale complémentaire comme l'opération mathématique dont le résultat pour une fonction $dtf(M)$ donne pour deux position M_1 et M_2

$$Integrale_c\, dtf(x) = M_2 f(M_1) - M_1 f(M_2)$$

6.1.1. *Notation.*
i) Première Notation
Dans le chapitre qui précède, nous avons établi :

$$\Big(dtf(M) = f(M) + kM$$

C'est pour cette raison que nous avons choisi de garder ce symbole pour décrire l'intégrale complémentaire :
Ainsi :

$$\Big(_{M_1}^{M_2} dtf(M) = M_2 f(M_1) - M_1 f(M_2)$$

ii) Seconde Notation

Pour la deuxième notation, nous avons choisi le symbole suivant : $\Big(\quad \Big)$

Ainsi dans le cadre des calcul, nous aurons :

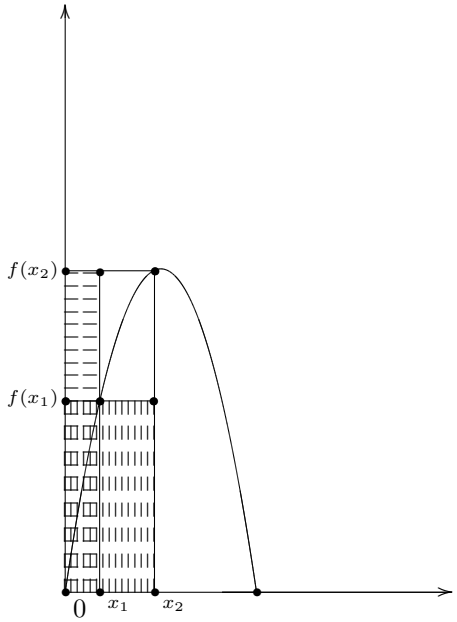
$$\Big(_{M_1}^{M_2} dtf(M) = \Big(f(M) + kM\Big)_{M_1}^{M_2}$$

Le calcul de cette intégrale est bien conforme à l'équation et en déduisons que l'intégrale complémentaire d'un monôme est nul

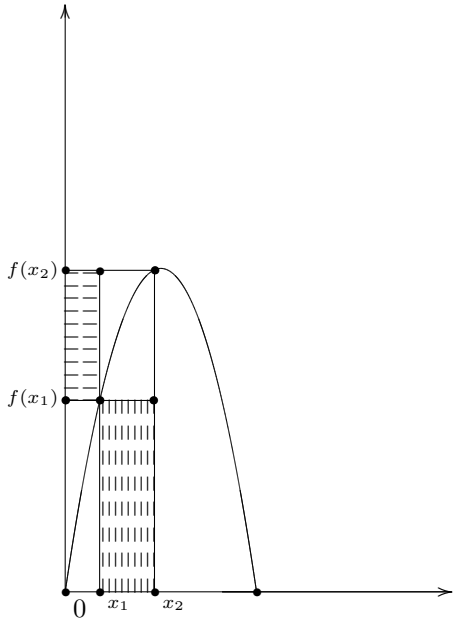
$$\Big(f(M) + kM\Big)_{M_1}^{M_2} = (M_2 f(M_1) + kM_2M_1) - (M_1 f(M_2) + kM_1M_2)$$

$$= M_2 f(M_1) - M_1 f(M_2)$$

6.1.2. *Représentation graphique.*
Soient une fonction f représentée dans un intervalle I considéré et deux aires $A_1 = x_1 f(x_2)$ et $A_2 = x_2 f(x_1)$ tel que nous le voyons sur la figure ci-dessous:

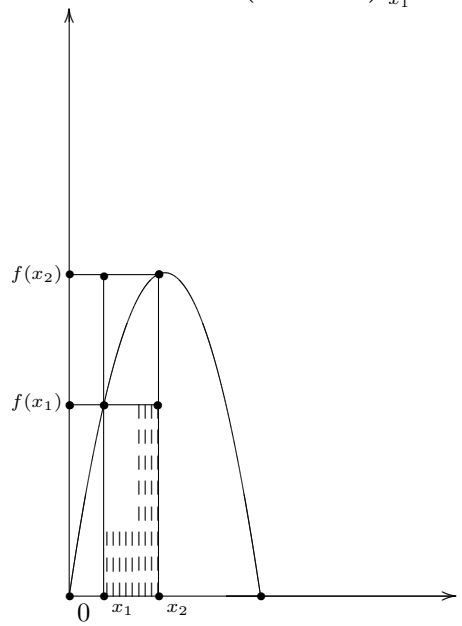


En éliminant la partie superposée, nous obtiendrons : $A = (x_2 - x_1)f(x_1) + x_1(f(x_2 - f(x_1)$



En ôtant $x_1(f(x_2) - f(x_1))$ de $(x_2 - x_1)f(x_1)$, nous obtiendrons l'aire hachurée $(x_2 - x_1)f(x_1) - x_1(f(x_2) - f(x_1))$ qui correspond encore à: $x_2f(x_1) - x_1f(x_2)$
Cette valeur représente l'aire complémentaire de la fonction f entre x_2 et x_1 ,

$$A_C = \left(\int_{x_1}^{x_2} dt f(x) = \right(f(x) + kx\left)\right|_{x_1}^{x_2} = x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)$$



6.1.3. *Quelques propriétés des Intégrales complémentaires.*
i) Propriété 1
Soit f une fonction réelle f définie dans un ensemble I :
s'il existe une fonction h tel que : $\left(\int f(x)dx = h(x)\right.$ avec $h(0) = 0$,

$$alors\, \forall x \in I,\ \left(\int_0^x f(x)dx = 0\right.$$

ii) Propriété 2 L'intégrale complémentaire n'est pas une opération linéaire pour des fonctions non linéaires :

$$\left(\int_a^b f(x)dx + \left(\int_b^c f(x)dx \neq \left(\int_a^c f(x)dx\right.\right.\right.$$

iii)Propriété 3
Soit f une fonction composée de plusieurs autres fonctions tel que : $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$ Ainsi donc :

$$\left(\int_a^b f(x)dx = \left(\int_a^b f_1(x)dx + \left(\int_a^b f_2(x)dx + \cdots + \left(\int_a^b f_n(x)dx\right.\right.\right.\right.$$

iv)Propriété 4

$$\left(\int_a^b kdx = \int_a^b kdx = k(b-a)\right. \ ; k \ ; constant$$

6.2. **Intégrales complémentaires double et triple.**

6.2.1. *Intégrale complémentaire surfacique ou double.*
Le principe de complémentarité de ces fonctions est le même que celui des fonctions précédentes.

$$\left(\int_{x_1}^{x_2}\left(\int_{y_1}^{y_2} f(x;y)\,dxdy\right.\right.$$

Et pour une fonction complémentaire particulière:

$$\left(\int_{x_1}^{x_2}\left(\int_{y_1}^{y_2}\frac{\partial tS(x)}{\partial x}\frac{\partial tS(y)}{\partial y}\,dxdy = \Big(S(x)+Cx\Big)_{x_1}^{x_2}\Big(S(y)+By\Big)_{y_1}^{y_2}\right.\right.$$

Ce qui donne un résultat équivalent à:

$$(x_2S(x_1)-x_1S(x_2))(y_2S(y_1)-y_1S(y_2))$$

6.2.2. *Intégrale complémentaire volumique ou triple.*
Le principe de complémentarité de ces fonctions est le même que celui des fonctions précédentes
Nous aurons ainsi comme intégrale complémentaire volumique des intégrales qui sont de nature suivante:

$$\left(\int_{x_1}^{x_2}\left(\int_{y_1}^{y_2}\left(\int_{z_1}^{z_2} f(x;y;z)\,dxdydz\right.\right.\right.$$

Et pour une fonction volumique complémentaire:

$$\left(\int_{x_1}^{x_2}\left(\int_{y_1}^{y_2}\left(\int_{z_1}^{z_2}\frac{\partial tV(x)}{\partial x}\frac{\partial tV(y)}{\partial y}\frac{\partial tV(z)}{\partial z}\,dxdydz = \Big(V(x)+Cx\Big)_{x_1}^{x_2}\Big(V(y)+By\Big)_{y_1}^{y_2}\Big(V(z)+Cz\Big)_{z_1}^{z_2}\right.\right.\right.$$

Ce qui donne un résultat équivalent à:

$$(x_2V(x_1)-x_1V(x_2))(y_2V(y_1)-y_1V(y_2))(z_2V(z_1)-z_1V(z_2))$$

L'intégrale complémentaire triple peut aussi se mettre sous une forme unique en considérant que du est la variation d'un élément du volume considéré $du = dxdydz$ tel que:

$$\left(\int_{x_1}^{x_2}\left(\int_{y_1}^{y_2}\left(\int_{z_1}^{z_2}\frac{\partial tV(x)}{\partial x}\frac{\partial tV(y)}{\partial y}\frac{\partial tV(z)}{\partial z}\,dxdydz = \left(\int_{u_1}^{u_2}(\frac{\partial tV}{\partial u})du\right.\right.\right.\right.$$

6.3. **Intégrales vectorielles complémentaires.**

6.3.1. *Intégrale © simple de vecteur.*
Soit $\vec{A}(u) = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$ un vecteur dépendant d'une seule variable scalaire u; où $A_1(u)$, $A_2(u)$ et $A_3(u)$ sont supposés continus dans un intervalle déterminé.
alors:

$$\left(\vec{A}(u) = \vec{i}\left(A_1du + \vec{j}\left(A_2du + \vec{k}\left(A_3du\right.\right.\right.\right.$$

Cette opération peut encore être considérée comme une translation vectorielle intégrale indéfinie de $\vec{A}(u)$.

S'il existe un vecteur $\vec{B}(u)$ tel que $\vec{A}(u) = \dfrac{dt(\vec{B}(u))}{du}$,
Alors:

$$\left(\vec{A}(u)du = \left(\frac{dt(\vec{B}(u))}{du}du = \vec{B}(u) + \vec{C}u\right.\right.$$

Où $\vec{C}$ est un vecteur constant indépendant de u; l'intégrale © définie entre les bornes $u_1 = a$ et $u_2 = b$ pourra donc dans ce cas s'écrire:

$$\left(\int_a^b \vec{A}(u)du = \left(\int_a^b \frac{dt(\vec{B}(u))}{du}du = \left(\vec{B}(u) + \vec{C}u\right)_a^b = b\vec{B}(a) - a\vec{B}(b)\right.\right.$$

6.3.2. *Intégrale © curviligne.*
Soit un vecteur $\vec{r}(u) = x(u)\vec{i} + y(u)\vec{j} + z(u)\vec{k}$, où $\vec{r}(u)$ est le vecteur de position de $(x; y; z)$ définissant une courbe (C) joignant les points P_1 et P_2 où respectivement $u = u_1$ et $u = u_2$
Soit $\vec{A}(u) = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$ une fonction vectorielle définie et continue sur (C).
L'intégrale © suivante est un exemple d'intégrale © curviligne:

$$\left(\int_{P_1}^{P_2} \vec{A}d\vec{r} = \left(\int_{\mathsf{C}} \vec{A}d\vec{r} = \left(\int_{\mathsf{C}} A_1dx + A_2dy + A_3dz\right.\right.\right.$$

Pour conclure par la présentation des intégrales © curvilignes nous allons établir ce théorème:
Si $\vec{A} = \vec{\Pi}\Phi$ en tout point d'un domaine D de l'espace délimité par $a_1 \leqslant x \leqslant a_2$, $b_1 \leqslant y \leqslant b_2$ et $c_1 \leqslant z \leqslant c_2$ où Φ est une fonction scalaire de position $\Phi = \Phi(x; y; z)$ continue et complémentarisable:

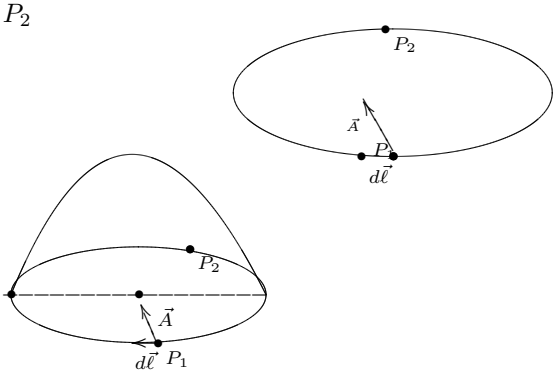
$$\left(\int_{P_1}^{P_2} \vec{A}d\vec{r} \textit{ est indépendant du chemin suivi pour joindre } P_1 \textit{ à } P_2\right.$$

$$\left(\int_{\bigcirc} \vec{A}d\vec{r} = 0 \textit{ le long de toute courbe fermée } \mathsf{C} \textit{ de } D\right.$$

Partant de là, nous considérons $\vec{A}$ comme champs de cradient et Φ comme potentiel complémentaire. Ce qui conduit à:

$$\vec{\Pi} \wedge \vec{A} = 0\ , \qquad \vec{A} = \vec{\Pi}\Phi \textit{ et } \vec{A}d\vec{r} = dt\Phi$$

Démonstration du théorème:
La circulation complémentaire le long d'un circuit fermé, allant de la position P_1 à P_2



Cette circulation est :

$$\begin{aligned}\oint_{\bigcirc}\vec{A}d\vec{\ell} &= \int_{P_1}^{P_2}\vec{A}d\vec{\ell} + \int_{P_2}^{P_1}\vec{A}d\vec{\ell}\\ &= \int_{P_1}^{P_2} \vec{crad}(\Phi(P))d\vec{\ell} + \int_{P_2}^{P_1} \vec{crad}(\Phi(P))d\vec{\ell} = \Big(\Phi(P)\Big)_{P_1}^{P_2} + \Big(\Phi(P)\Big)_{P_2}^{P_1}\\ &= P_2\Phi(P_1) - P_1\Phi(P_2) + P_1\Phi(P_2) - P_2\Phi(P_1)\\ &= 0\end{aligned}$$

Cette dernière démonstration entraîne:

$$\oint_{\bigcirc}\vec{A}d\vec{\ell} = \int_{P_1}^{P_2}\vec{A}d\vec{\ell} + \int_{P_2}^{P_1}\vec{A}d\vec{\ell} = \int_{P_1}^{P_2}\vec{A}d\vec{\ell} - \int_{P_1}^{P_2}\vec{A}d\vec{\ell} = 0$$

Ce qui conduit à:

$$\int_{P_1}^{P_2}\vec{A}d\vec{\ell} = \int_{P_1}^{P_2}\vec{A}d\vec{\ell}$$

Ce qui nous amène à conclure que $\oint_{\bigcirc}\vec{A}d\vec{\ell}$ ne dépend pas du chemin suivi:

7. Equations Complémentaires

Les équations complémentaires, si je me réfère aux équations différentielles sont des équations de type

$$a\,\backprime f(x)+b\,\backprime f(x)+cf(x)=0 \quad a\,\backprime\backprime\backprime f(x)+b\,\backprime\backprime f(x)+c\,\backprime f(x)+d=0$$

$$a_0\,{}^{(n)}f(x)+a_1\,{}^{(n-1)}f(x)+a_2\,{}^{(n-2)}f(x)+\cdots+a_nf(x)=0$$

Avant de passer à la résolution de quelques de ces équations, nous allons établir les complémentaires de la première à la sixième d'une fonction f quelconque en fonction des dérivées:
Pour ce faire, nous rappelons cette formule:

$$\begin{aligned}\frac{dt}{dx}(ab)=a\frac{dtb}{dx}+b\frac{dta}{dx}-ab&=a(\frac{dtb}{dx}-b)+b\frac{dta}{dx}\\&=-ax\frac{db}{dx}+b\frac{dta}{dx}\\&=-bx\frac{da}{dx}+a\frac{dtb}{dx}\end{aligned}$$

7.1. **Formules complémentaires linéaires.** :
i) complémentaire première:

$$\frac{dtf(x)}{dx}=f(x)-x\frac{df(x)}{dx}$$

ii) complémentaire secondaire:

$$\begin{aligned}\frac{dt^2f(x)}{dx^2}=\frac{dtf(x)}{dx}-\frac{dt}{dx}(x\frac{df(x)}{dx})=\frac{dtf(x)}{dx}+x^2\frac{d^2f(x)}{dx^2}\\=f(x)-x\frac{df(x)}{dx}+x^2\frac{d^2f(x)}{dx^2}\end{aligned}$$

Finalement:

$$\frac{dt^2f(x)}{dx^2}=f(x)-x\frac{df(x)}{dx}+x^2\frac{d^2f(x)}{dx^2}$$

iii) Complémentaire troisième :

$$\frac{dt^3f(x)}{dx^3}=\frac{dt}{dx}(f(x)-x\frac{df(x)}{dx}+x^2\frac{d^2f(x)}{dx^2})$$

$$=\frac{dtf(x)}{dx}-\frac{dt}{dx}(x\frac{df(x)}{dx})+\frac{dt}{dx}(x^2\frac{d^2f(x)}{dx^2})=\frac{dtf(x)}{dx}-\frac{dt}{dx}(x\frac{df(x)}{dx})+(-x^2\times x\frac{d^3f(x)}{dx^3}+\frac{dt(x^2)}{dx}\frac{d^2f(x)}{dx^2})$$

Finalement:

$$\frac{dt^3f(x)}{dx^3}=f(x)-x\frac{df(x)}{dx}+x^3\frac{d^3f(x)}{dx^3}$$

iv) Complémentaire quatrième :
En utilisant la formule de rappels et la répétition, nous obtenons:

$$\frac{dt^4f(x)}{dx^4}=f(x)-x\frac{df(x)}{dx}+x^2\frac{d^2f(x)}{dx^2}+2x^3\frac{d^3f(x)}{dx^3}+x^4\frac{d^4f(x)}{dx^4}$$

v) Complémentaire Cinquième :

$$\frac{dt^5f(x)}{dx^5}=f(x)-x\frac{df(x)}{dx}-5x^3\frac{d^3f(x)}{dx^3}-5x^4\frac{d^4f(x)}{dx^4}-x^5\frac{d^5f(x)}{dx^5}$$

vi) Complémentaire Sixième :

$$\frac{dt^6 f(x)}{dx^6} = f(x) - x\frac{df(x)}{dx} + x^2\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + 10x^3\frac{d^3 f(x)}{dx^3} + 20x^4\frac{d^4 f(x)}{dx^4} + 9x^5\frac{d^5 f(x)}{dx^5} + x^6\frac{d^6 f(x)}{dx^6}$$

7.2. **Résolutions de certaines équations complémentaires.** :

7.2.1. *Equations de type* $a\,\backprime f(x) + bf(x) = 0$.
Pour résoudre les équations de ce type, nous avons simplement remarqué que le complémentaires des fonctions x^n conserve le même degré de monôme. Cela nous a amené à conclure que la solution de telles équations est de types $f(x) = Ax^\mu$
Et de là, on détermine la valeur de μ en fonction de a et b:

$$a\,\backprime f(x) + bf(x) = 0 \Rightarrow a(1-\mu)Ax^\mu + bAx^\mu = 0$$

$$\Rightarrow a(1-\mu) + b = 0$$

On trouve :

$$\mu = \frac{a+b}{a}$$

Finalement, nous retiendrons que l'équation

$$a\,\backprime f(x) + bf(x) = 0$$

a pour solution

$$f(x) = Ax^{\frac{a+b}{a}}$$

7.2.2. *Equations de type* $a\,\backprime\backprime f(x) + b\,\backprime f(x) + cf(x) = 0$.
La résolution de ce type d'équation obéit également au même procédé que celui que nous avons utilisé à la première équation: ce qui nous donne des solutions donc la forme générale est également $f(x) = Ax^\mu$
En détaillant ces solutions, nous aurons:

$$a\,\backprime\backprime(Ax^\mu) + b\,\backprime(Ax^\mu) + c(Ax^\mu) = 0$$

$$\Rightarrow a(1-\mu)^2 + b(1-\mu) + c = 0$$

La résolution donne:

$$\mu_1 = \frac{b + 2a - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad et \quad \mu_2 = \frac{b + 2a + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

L'équation complémentaire dépendra donc du déterminant de la dernière équation tel qu'il suit:
Pour $\Delta = 0$ l'équation complémentaire a pour solution

$$f(x) = x^\mu(\beta \ln x + \lambda)$$

Pour $\Delta > 0$ l'équation complémentaire aura pour solution:

$$f(x) = Ax^{\mu_1} + Bx^{\mu_2}$$

Pour $\Delta < 0$ l'équation complémentaire aura pour solution:

$$f(x) = Ax^w \cos(\beta \ln x) + Bx^w \sin(\beta \ln x)$$

où:

$$\mu_1 = \frac{b + 2a - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = w - i\beta \quad et \quad \mu_2 = \frac{b + 2a + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = w + i\beta$$

7.2.3. *Symétrie exponentielle-logarithmique.*
Les équations différentielles $af''+bf'+cf=0$ et complémentaires $a\,\backprime\backprime f+b\,\backprime f+cf=0$ sont symétriques par rapport à exponentielle et logarithme,
Considérons l'équation différentielle suivante :

$$af''+bf'+cf=0$$

Cette équation en fonction du discriminant a pour solution :
$\Delta=0$, on a : $f(x)=e^{x\mu}(\beta x+\lambda)$
$\Delta>0$ on a : $f(x)=Ae^{\mu_1 x}+Be^{\mu_2 x}$
$\Delta<0$; on a: $Ae^{wx}\cos(\beta x)+Be^{wx}\cos(\beta x)$
• pour l'équation

$$a\,\backprime\backprime f+b\,\backprime f+cf=0$$

Nous avons montré que ces solutions sont de cette nature :
$\Delta=0$, on a : $f(x)=x^{\mu}(\beta\ln x+\lambda)$
$\Delta>0$ on a : $f(x)=Ax^{\mu_1}+Bx^{\mu_2}$
$\Delta<0$; on a: f(x) $=f(x)=Ax^{wx}\sin(\beta\ln x)+Bx^{wx}\cos(\beta\ln x)$
A présent, si nous rentrons aux solutions de l'équation $af''+bf'+cf$ en remplaçant le x par le $\ln x$, nous aurons :

$$\Delta=0\quad f(x)=e^{\mu x}(\beta x+\lambda)\Rightarrow f(\ln x)=e^{\mu\ln x}(\beta\ln x+\lambda)=x^{\mu}(\beta\ln x+\lambda)$$

D'où:

$$f(\ln x)=x^{\mu}(\beta\ln x+\lambda)$$

Pour les deux autres valeurs, nous trouvons:

$$\Delta>0\quad f(\ln x)=Ax^{\mu_1}+Bx^{\mu_2}$$

$$\Delta<0\quad f(\ln x)=f(x)=Ax^{wx}\sin(\beta\ln x)+Bx^{wx}\cos(\beta\ln x)$$

Finalement: nous trouvons les solution de l'équation $a\,\backprime\backprime f+b\,\backprime f+cf=0$ pour chaque valeur égale du discriminant
• A présent, si nous rentrons aux solutions de l'équation

$$a\,\backprime\backprime f+b\,\backprime f+cf=0$$

En remplaçant le x par le e^x, nous aurons :

$$\Delta=0\quad f(x)=x^{\mu}(\beta\ln x+\lambda)\Rightarrow f(\exp x)=(\exp\mu)^x(\beta\ln e^x+\lambda)=\exp\mu x(\beta x+\lambda)$$

D'où :

$$f(e^x)=e^{\mu x}(\beta x+\lambda)$$

Nous trouvons pour les autres:

$$\Delta>0\quad f(e^x)=Ae^{\mu_1 x}+Be^{\mu_2 x}$$

$$\Delta<0\quad f(e^x)=Ae^{wx}\cos(\beta x)+Be^{wx}\cos(\beta x)$$

Finalement, nous trouvons les solutions de l'équation $af''+bf'+cf=0$ pour chaque valeur égale du discriminant
Ceci montre bien que les fonctions exponentielle et logarithme sont symétriques par rapport à x
• Relation directe entre les deux équations : L'équation caractéristique de $af''+bf'+cf=0$ est:

$$ar^2+br+c=0$$

Et l'équation caractéristique de $a \, \backprime\backprime f + b \, \backprime f + cf = 0$ est:

$$a(1-\mu)^2 + b(1-\mu) + c = 0$$

Ce qui nous amène à la formule suivante:

$$\mu + r = 1$$

7.2.4. *Equations © de degré supérieur.*
Les équations supérieurs de forme générale :

$$a_0 f(x) + a_1 \, \backprime f(x) + a_2 \, \backprime\backprime f(x) + \cdots + a_n \, {}^{(n)} f(x)$$

ou encore

$$a_0 f(x) + a_1 \frac{dtf(x)}{dx} + a_1 \frac{dt^2 f(x)}{dx^2} + \cdots + a_n \frac{dt^n f(x)}{dx^n}$$

Ont pour solution générale

$$f(x) = \sum_{i}^{n} A_i x^{r_i}$$

Où les r_i sont des solutions de l'équation caractéristique

$$a_0 + a_1(1-r) + a_2(1-r)^2 + \cdots + a_n(1-r)^n = 0$$

Quant à l'équation $\dfrac{dt^n f(x)}{dx^n} = 0$, nous avons la solution suivante :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} k_i x (\ln x)^i$$

Les k_i sont des constances réelles:

8. Equations Différencio-complémentaires

Les equations différencio-complémentaires sont des équations qui regroupent en leurs seins les différentielles et les complémentaires tels que l'illustrent ces quelques exemples :

$$\frac{\partial f(u;v)}{\partial v}-\frac{\partial tf(u;v)}{\partial v}=0 \quad ,\frac{\partial}{\partial v}(\frac{\partial f(u;v)}{\partial u})-\frac{\partial t}{\partial u}(\frac{\partial f(u;v)}{\partial v})=0 \quad ,\frac{\partial^3}{\partial v^3}(\frac{\partial f(u;v)}{\partial u})+\frac{\partial^3 f(u;v)}{\partial v\partial u^2}=0$$

8.1. **Equations élémentaires.**

Les équations différencio-compl émentaires élémentaires seront des équations qui regrouperont directement une différentielle et un complémentaire.

Exemples : $\frac{\partial}{\partial v}(\frac{\partial tf(u;v)}{\partial v})=0$ et $\frac{\partial t}{\partial v}(\frac{\partial f(u;v)}{\partial v})=0$

Dans la suite du chapitre nous nous contenterons simplement de résoudre les équations qu'on aura choisi:

8.1.1. *Resolution de ces équations.*

Avant de passer à la résolution de ce type d'équation, il faudra d'abord faire quelques rappels d'usage :

$$\frac{\partial t}{\partial u}(au)=0$$

si a est indépendant de u et

$$\frac{\partial t}{\partial u}(a)=a$$

1) Résolution des équations avec une variable :

i) Résolution de la première equation:

$$Equation\ \frac{\partial}{\partial v}(\frac{\partial tf(u;v)}{\partial v})=0$$

Pour résoudre cette équation, nous passons à la première étape qui consiste à trouver une constance pour laquelle la dérivée en fonction de v est nulle, cette constance peut donc également dépendre ou non de l'autre variable; ce qui nous donne $c(u)$:

$$\frac{\partial tf(u;v)}{\partial v}=c(u) \qquad avec\, c(u)\ ind\acute{e}pendant\ de\ v$$

Nous procédons donc par la suite à l'usage du translateur complémentaire:

$$\partial tf(u;v)=c(u)\partial v \Rightarrow \left(\partial tf(u;v)=\left(c(u)\partial v=c(u)+v\beta(u)\right.\right.$$

On trouve finalement :

$$f(u;v)=c(u)+v\beta(u)$$

ii) Résolution de la deuxième équation:

$$Equation\frac{\partial t}{\partial v}(\frac{\partial f(u;v)}{\partial v})=0$$

La première résolution qui concerne la partie complémentaire donne un monôme $c(u)v$ où $c(u)$ est une constance indépendante de v

$$\frac{\partial f(u;v)}{\partial v}=c(u)v \qquad avec\, c(u)\ ind\acute{e}pendant\ de\ v$$

Et de là nous utilisons la primitive :

$$\partial f(u;v) = c(u)v\partial v \Rightarrow \int \partial f(u;v) = c(u)\int v\partial v = c(u)\frac{v^2}{2} + k(u)$$

Finalement on trouve:

$$f(u;v) = c(u)\frac{v^2}{2} + k(u)$$

iii) Résolution de la troisième équation

$$Equation \frac{\partial t}{\partial u}(\frac{\partial tf(u;v)}{\partial u}) = 0$$

La première résolution donne un monôme $k(v)u$ où $k(v)$ est une constance indépendante de u

$$\frac{\partial tf(u;v)}{\partial u} = k(v)u \qquad avec\ k(v)\ indépendant\ de\ u$$

Et de là, nous utilisons le translateur ©

$$\Big(\partial tf(u;v) = k(v)\Big(u\partial u = -k(v)u\int \frac{u}{u^2}\partial u = -k(v)u(\log u + k_1(v))$$

$$= \beta(v)u\log u + c(v)u$$

Finalement on trouve:

$$f(u;v) = \beta(v)u\log u + c(v)u$$

2) Résolution des équations avec usage de deux variables :
i) Résolution de la première equation:

$$Equation\ \frac{\partial}{\partial u}(\frac{\partial tf(u;v)}{\partial v}) = 0$$

La première résolution donne une constance $k(v)$

$$\frac{\partial tf(u;v)}{\partial v} = k(v) \qquad avec\ k(v)\ indépendant\ de\ u$$

Ensuite nous utilisons le translateur ©

$$\Big(\partial tf(u;v) = \Big(k(v)\partial v = -v\int \frac{k(v)}{v^2}\partial v$$

Finalement la solution de l'équation dépendra de la fonction $k(v)$

$$f(u;v) = \Big(k(v)\partial v = -v\int \frac{k(v)}{v^2}\partial v$$

ii) Résolution de la deuxième equation:

$$Equation\ \frac{\partial t}{\partial u}(\frac{\partial f(u;v)}{\partial v}) = 0$$

La première résolution donne un monôme $k(v)u$

$$\frac{\partial f(u;v)}{\partial v} = uk(v) \qquad avec\ k(v)\ indépendant\ de\ u$$

Ensuite nous utilisons la primitive

$$\int \partial tf(u;v) = \int k(v)u\partial v = u\int k(v)\partial v$$

Finalement la solution de l'équation dépendra de la fonction $k(v)$

$$f(u;v) = u\int k(v)\partial v$$

iii) Résolution de la troisième equation:

$$Equation\ \frac{\partial t}{\partial u}(\frac{\partial tf(u;v)}{\partial v}) = 0$$

La première résolution donne un monôme $k(v)u$

$$\frac{\partial tf(u;v)}{\partial v} = uk(v) \qquad avec\ k(v)\ ind\acute{e}pendant\ de\ u$$

Ensuite nous utilisons le translateur ©

$$\Big(\partial tf(u;v) = \Big(k(v)u\partial v = u\Big(k(v)\partial v = -uv\int \frac{k(v)}{v^2}\partial v$$

Finalement la solution de l'équation dépendra de la fonction $k(v)$

$$f(u;v) = u\Big(k(v)\partial v = -uv\int \frac{k(v)}{v^2}\partial v$$

8.2. **Equations élémentaires avec second membre.**
Les équations différencio-complémentaires élémentaires avec second membre sont les équations précédentes à la différence que le zéro est remplacé par une constance ou une fonction quelconque, tel que nous le présentons par ces quelques exemples:
Exemples : $\frac{\partial}{\partial v}(\frac{\partial tf(u;v)}{\partial v}) = c$; $\frac{\partial t}{\partial v}(\frac{\partial f(u;v)}{\partial v}) = h(u)$; $\frac{\partial t}{\partial u}(\frac{\partial f(u;v)}{\partial v}) = k(u;v)$
1) Résolution des équations avec deuxième membre purement constant :
i) Résolution de la première equation:

$$Equation\ \frac{\partial t}{\partial u}(\frac{\partial tf(u;v)}{\partial u}) = c$$

La première étape nous conduit à :

$$\frac{\partial tf(u;v)}{\partial u} = c + uk(v) \qquad avec\ k(v)\ ind\acute{e}pendant\ de\ u$$

En utilisant le translateur © :

$$\Big(\partial tf(u;v) = \Big(c\partial u + k(v)\Big(u\partial u = c + k_1(v)u + k_2(v)u + k_3(v)u\log u$$

Ce qui fera finalement:

$$f(u;v) = c + u\beta_0(v) + u\beta_1(v)\log u$$

ii) Résolution de la deuxième equation:

$$Equation\ \frac{\partial}{\partial v}(\frac{\partial tf(u;v)}{\partial u}) = C$$

La première étape nous conduit à :

$$\frac{\partial tf(u;v)}{\partial u} = Cv + k(u) \qquad avec\ k(u)\ ind\acute{e}pendant\ de\ v$$

En utilisant le translateur © :

$$\left(\partial t f(u;v) = Cv\left(\partial u + \left(k(u)\partial u = Cv + k(v)vu + \left(\beta(u)\partial u\right.\right.\right.$$

Ce qui fera finalement:

$$f(u;v) = Cv + k(v)vu + \left(\beta(u)\partial u\right.$$

iii) Résolution de la troisième equation:

$$Equation\ \frac{\partial t}{\partial v}(\frac{\partial f(u;v)}{\partial v}) = C$$

La première étape nous conduit à :

$$\frac{\partial f(u;v)}{\partial v} = C + k(u)v \qquad avec\ k(u)\ indépendant\ de\ v$$

En utilisant l'intégrale :

$$\int \partial f(u;v) = C\int \partial v + k(u)\int v\partial v = A(u) + Cv + \beta(u)\frac{v^2}{2}$$

Ce qui fera finalement:

$$f(u;v) = A(u) + Cv + \beta(u)\frac{v^2}{2}$$

2) Résolution des équations avec deuxième membre variable :
i) Résolution de la première equation:

$$Equation\ \frac{\partial}{\partial u}(\frac{\partial t f(u;v)}{\partial v}) = c(v)$$

La première étape nous conduit à :

$$\frac{\partial t f(u;v)}{\partial v} = c(v)u + b(v)$$

En utilisant le translateur © :

$$\left(\partial t f(u;v) = u\left(c(v)\partial v + \left(b(v)\partial v\right.\right.\right.$$

Ce qui fera finalement:

$$f(u;v) = u\left(c(v)\partial v + \left(b(v)\partial v\right.\right.$$

ii) Résolution de la deuxième équation:

$$Equation\ \frac{\partial t}{\partial u}(\frac{\partial f(u;v)}{\partial v}) = c(v)$$

La première étape nous conduit à :

$$\frac{\partial f(u;v)}{\partial v} = c(v) + ub(v)$$

En utilisant l'intégrale :

$$\int \partial f(u;v) = \int c(v)\partial v + u\int b(v)\partial v$$

Ce qui fera finalement:

$$f(u;v) = \int c(v)\partial v + u\int b(v)\partial v$$

iii) Résolution de la deuxième équation:

$$Equation\ \frac{\partial t}{\partial u}(\frac{\partial f(u;v)}{\partial v}) = c(u;v)\partial u$$

La première étape nous conduit à :

$$\frac{\partial f(u;v)}{\partial v} = \Big(c(u;v)\partial u$$

Ce qui fera finalement:

$$f(u;v) = \int(\Big(c(u;v)\partial u)\partial v$$

8.3. **Quelques équations secondaires.**
Les équations différencio-complémentaires secondaires sont des équations de dimensions 2, comme c'est le cas pour ces quelques exemples:

$$\frac{\partial^2 f(u;v)}{\partial u^2} + u^2\frac{\partial t}{\partial u}(\frac{\partial f(u;v)}{\partial v}) = 0\ ;\ \frac{\partial t^2 f(u;v)}{\partial u^2} - \frac{\partial}{\partial u}(\frac{\partial t f(u;v)}{\partial v}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial u}(\frac{\partial t f(u;v)}{\partial v}) - \frac{\partial t}{\partial v}(\frac{\partial t f(u;v)}{\partial v}) = 0\ ;\ \frac{\partial}{\partial u}(\frac{\partial t f(u;v)}{\partial v}) - \frac{\partial t}{\partial v}(\frac{\partial f(u;v)}{\partial u}) = 0$$

Avant de passer à la résolution de ces équations, les rappels suivants sont indispensables :

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial t f}{\partial v} \Rightarrow f(v) = k(1+v)$$

1) Résolution des équations avec une variable :
i) Résolution de la première equation:

$$\frac{\partial}{\partial u}(\frac{\partial f(u;v)}{\partial u}) - \frac{\partial t}{\partial u}(\frac{\partial f(u;v)}{\partial u}) = 0$$

La première étape nous conduit à :

$$\frac{\partial f(u;v)}{\partial u} = k(v)(1+u)$$

En utilisant l'intégrale:

$$\int \partial f(u;v) = \int k(v)(1+u)\partial u = k(v)(u + \frac{u^2}{2} + \beta(v))$$

Ce qui fera finalement:

$$f(u;v) = k(v)(u + \frac{u^2}{2} + \beta(v))$$

ii) Résolution de la deuxième equation:

$$\frac{\partial}{\partial u}(\frac{\partial f(u;v)}{\partial v}) - \frac{\partial t}{\partial v}(\frac{\partial f(u;v)}{\partial u}) = 0$$

La première étape nous conduit à deux petites solutions :

$$\frac{\partial f(u;v)}{\partial u} = k(1+v) \quad et \quad \frac{\partial f(u;v)}{\partial v} = k(1+u)$$

La première solution conduit à:

$$f_1(u;v) = ku(1+v) + C(v)$$

La seconde solution à:

$$f_2(u;v) = kv(1+u) + C(u)$$

En considérant que $f_1(u;v) = f_2(u;v)$ cela conduit à : $ku + C(v) = kv + C(u)$
La recherche des éléments $C(u)$ et $C(v)$ nous donne: $C(u) = ku$ et $C(v) = kv$
Finalement:

$$f_1(u;v) = f_2(u;v) = f(u;v) = kuv + ku + kv$$

8.4. **Equations supérieures.** Pour les équations supérieures nous nous contentions comme c'est le cas dans ce travail de présenter ces équations telles que suite:

$$\frac{\partial^7 f(u;v)}{\partial u^7} + u^2 \frac{\partial t}{\partial u}(\frac{\partial f(u;v)}{\partial v}) = 0$$

$$\frac{\partial^9 f(u;v)}{\partial u^9} + u^6 \frac{\partial t^5}{\partial u^5}(\frac{\partial^{10} f(u;v)}{\partial v^{10}}) = 0$$

$$\frac{\partial^7 f(u;v)}{\partial u^7} + u^2 \frac{\partial t}{\partial u}(\frac{\partial f(u;v)}{\partial v}) + \frac{\partial^9 f(u;v)}{\partial u^9} + u^n \frac{\partial t^5}{\partial u^5}(\frac{\partial^{10} f(u;v)}{\partial v^{10}}) = 0$$

9. Complémentarité et produit vectoriel

Dans ce chapitre, il est surtout question de différencier calcul vectoriel à calcul complémentaire, et de montrer aussi que le calcul complémentaire peut également s'appliquer à certaines propriétés physiques

9.1. **Notion de complémentarité vectoriel.**

9.1.1. *Description Elémentaire.* Les symboles utilisés jusqu'ici pour décrire le complémentaire d'une fonction ou d'un vecteur sont : ⍀ et $\frac{dt}{dx}$ tel que :

$$⍀f(x) = f(x) - xf'(x) \quad et \quad \frac{dtf(x)}{dx} = f(x) - xf'(x)$$

$$⍀\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM} – x\overrightarrow{OM}' \quad et \quad \frac{\overrightarrow{OM}}{dx} = \overrightarrow{OM} – x\overrightarrow{OM}'$$

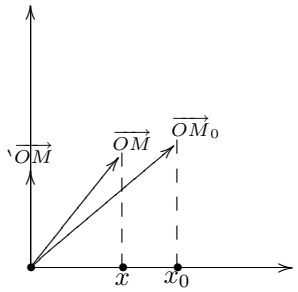
Cependant, en remarquant que $y_2x_1 - y_1x_2$ correspond au déterminant des vecteurs $\overrightarrow{OM}(x_1; y_1)$ et $\overrightarrow{OM}(x_2; y_2)$, celui-ci correspond également au produit vectoriel de ces mêmes vecteurs
Ce qui m'amène à représenter le complémentaire vectoriel par cette expression

$$[\frac{\Delta t\overrightarrow{OM}}{\Delta x}] = \frac{\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{OM}_0}{\Delta x}$$

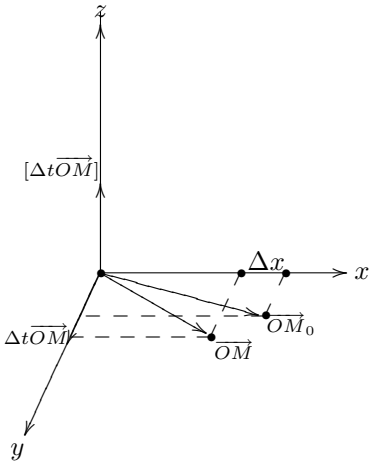
Ce qui correspond à la notion :

$$[⍀\overrightarrow{OM}_0] = \lim_{x \to x_0} \frac{\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{OM}_0}{x - x_0}$$

Le vecteur vectoriel complémentaire sera entre parenthèses pour éviter de toute confusion . Nous savons que le vecteur © $\overrightarrow{OM}$ est dans le plan(oxy), et si celui-ci est défini par rapport à x, alors il est orienté suivant l'axe (oy)tel que je le représente sur cette figure :



Cependant, il est bien connu que le vecteur venant du produit vectoriel $\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{OM}_0 = [\Delta t\overrightarrow{OM}_0]$ est un vecteur orienté suivant la normale du plan (oxy) tel qu'il est représenté ci-dessous :



. Les deux vecteurs complémentaires sont donc différents en sens même s'ils sont de module identique.

Les deux vecteurs sont de même module et obéissent aux mêmes lois. Donc, le calcul vectoriel pour ce qui est uniquement des fonctions vectorielles de type $\overrightarrow{OM}(x;y)$ donne lieu à de mêmes simplifications : De ce qui précède, nous allons retenir pour des fonctions © vectoriels ces relations suivantes :

$$[\frac{\Delta t\overrightarrow{OM}}{\Delta x}] = \frac{\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{OM_0}}{\Delta x} \quad et \quad [\overrightarrow{OM_0}] = \lim_{x \to x_0} \frac{\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{OM_0}}{x - x_0}$$

9.1.2. *Expression du vectoriel complémentaire.* :
Le vecteur © vectoriel tel que nous l'avons définie a même module que le vecteur © et lui est orthogonal

$$\Big|\Big|[\frac{dt\overrightarrow{OM}}{dx}]\Big|\Big| = \Big|\Big|\frac{dt\overrightarrow{OM}}{dx}\Big|\Big|$$

Avec :

$$[\frac{dt\overrightarrow{OM}}{dx}] \times \frac{dt\overrightarrow{OM}}{dx} = 0$$

Puisque les deux vecteurs sont orthogonaux
C'est pourquoi, nous allons écrire :

$$[\frac{dt\overrightarrow{OM}}{dx}] = \vec{k}\Big|\Big|\frac{dt\overrightarrow{OM}}{dx}\Big|\Big|$$

Ensuite, nous connaissons la relation que nous avons déjà eu à démontrer : Pour un vecteur $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$$\frac{dt\overrightarrow{OM}}{dx} = \vec{j}\frac{dty(x)}{dx}$$

Ce qui nous amène à écrire :

$$[\frac{dt\overrightarrow{OM}}{dx}] = \vec{k} \lim_{x \to x_0}\Big|\Big|\frac{\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{OM_0}}{x - x_0}\Big|\Big| = \vec{k}(\lim_{x \to x_0} \frac{xf(x_0) - x_0f(x)}{x - x_0})$$

Cela donne donc finalement :

$$[\frac{dt\overrightarrow{OM}}{dx}] = \vec{k}\frac{dty}{dx}$$

9.1.3. *Propriété du vectoriel complémentaire.*
P_1: Soit v un vecteur considéré, on a:

$$[\vec{v}] = \vec{k}v$$

P_2: Soit un vecteur v quelconque considéré:

$$\vec{v} \times [\vec{v}] = 0$$

P_3: Soit un vecteur v quelconque considéré:

$$[\frac{dt\vec{v}}{dv}] = \vec{0}$$

P_4: Soit un vecteur $\overrightarrow{OM}$ constitué de plusieurs sous-vecteurs $\overrightarrow{OM}_i$ tels que : $\overrightarrow{OM} = \sum \overrightarrow{OM}_i$ On a:

$$[\frac{dt\overrightarrow{OM}}{dx}] = \sum [\frac{\overrightarrow{OM}_i}{dx}] = \vec{k} \sum \Big|\Big| \frac{\overrightarrow{OM}_i}{dx} \Big|\Big|$$

P_5: Soient $\overrightarrow{OM}$ un vecteur quelconque du plan et a un réel quelconque:

$$[\frac{dt(a\overrightarrow{OM})}{dx}] = a[\frac{dt(\overrightarrow{OM})}{dx}] + \overrightarrow{OM}[\frac{dt(a)}{dx}] - a[\overrightarrow{OM}]$$

9.2. **Vecteurs moments complémentaires.**

9.2.1. *Moment complémentaire.* Le moment d'un vecteur par rapport à un point M est donné par:

$$\Gamma_{\vec{F}|0} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

La fonction vectorielle moment complémentaire associé sera défini par l'expression:

$$\xi_{\vec{F}|0} = \vec{\omega} \frac{dtF(r)}{dr} = \text{`}F(r)\vec{\omega}$$

Où $\vec{\omega}$ est un vecteur orthogonal au plan formé par $(\vec{F}; \vec{r})$

9.2.2. *Expression complémentaire du produit vectoriel.* Soient deux vecteurs $\vec{u}_1(M_1; f(M_1))$ et $\vec{u}_2(M_2; f(M_2))$
En calculant la norme du produit vectoriel de ces deux vecteurs, nous aurons:

$$||\vec{u}_2 \wedge \vec{u}_1|| = \begin{bmatrix} M_2 \\ f(M_2) \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} M_1 \\ f(M_1) \end{bmatrix}$$

$$= M_2 f(M_1) - M_1 f(M_2)$$

Puisque $\vec{u}_2 \wedge \vec{u}_1$ est un vecteur orthogonal à $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$, nous aurons:

$$\vec{u}_2 \wedge \vec{u}_1 = (M_2 f(M_1) - M_1 f(M_2))\vec{\omega}$$

Or, il a déjà été montré que:

$$\Big(\int_{M_1}^{M_2} dtf(M) = \Big(f(M)\Big)_{M_1}^{M_2} = M_2 f(M_1) - M_1 f(M_2)$$

Ce qui nous amène pour deux fonctions de vecteurs $\vec{F}$ et $\vec{r}$ dans un intervalle considéré à écrire:

$$\vec{F} \wedge \vec{r} = (r_2 F(r_1) - r_1 F(r_2))\vec{\omega} = \Big(\int_{r_1}^{r_2} dtF(r)\vec{\omega}$$

$$=\Big(F(r)\Big)_{r_1}^{r_2}\vec{\omega}=\Big(F(r)\Big)_{r_1 r_2}\vec{\omega}$$

Pour l'ensemble, nous aurons:

$$\vec{F}\wedge\vec{r}=\Big(F(r)\Big)_{r}\vec{\omega}$$

Nous pouvons également écrire pour des fonctions pouvant s'écrire l'une en fonction de l'autre:

$$\vec{F}\wedge\vec{r}=\Big(F(r)\Big)_{r}\vec{\omega}=\Big(r(F)\Big)_{F}\vec{\omega}$$

Paroisse Saint Augustin (Yaoundé)
Nnom Nnam B.P 185
(C.232)
Procure
Cameroun,
Phone: +(237)75 45 47 71 or +(237)75 12 65 83
E-mail: m_essob@yahoo.fr