Новая форма антисимметричного тензора электромагнитного поля и ее следствия

Ю.А. Спиричев

Научно-исследовательский и конструкторский институт радиоэлектронной техники – филиал федерального государственного унитарного предприятия федерального научно-производственного центра «Производственное объединение «Старт» имени М.В. Проценко»

E-mail: yurii.spirichev@mail.ru

Описана новая форма эквивалентного представления канонического антисимметричного тензора электромагнитного поля. Эта форма представления основана на разложении несимметричного тензора общего вида на симметричную и антисимметричную части. Из этого разложения следует, что канонический антисимметричный тензор электромагнитного поля можно эквивалентно представить в виде разности несимметричного тензора общего вида и симметричного тензора. Тогда уравнения Максвелла можно записать в виде четырехмерных дивергенций этих тензоров. Из этого представления кроме уравнений Максвелла следуют и новые уравнения электромагнитного поля, расширяющие знания о нем. Одним из таких уравнений является уравнение движения электромагнитного поля в форме динамического уравнения Навье – Стокса.

Содержание

1. Введение

Современная электродинамика основана на каноническом представлении антисимметричного тензора электромагнитного поля в форме $F_{[\nu\mu]}=\partial_\nu \mathbf{A}_\mu-\partial_\mu \mathbf{A}_\nu$, где $\mathbf{A}_\mu$ –

четырехмерный электромагнитный потенциал, а ∂_ν - оператор четырехмерного дифференцирования [1]. Однако, канонический антисимметричный тензор электромагнитного поля $F_{[\nu\mu]}$ имеет и другую форму эквивалентного представления. В соответствии с правилами тензорной алгебры несимметричный тензор второго ранга $F_{\nu\mu}$ можно однозначно разложить на антисимметричный и симметричный тензоры $F_{\nu\mu}=F_{(\nu\mu)}/2+F_{[\nu\mu]}/2$. Тогда антисимметричный тензор $F_{[\nu\mu]}$ электромагнитного поля можно однозначно и эквивалентно записать в виде разности тензоров $F_{[\nu\mu]}=2F_{\nu\mu}-F_{(\nu\mu)}$, где $F_{(\nu\mu)}$ – симметричный тензор. Уравнения Максвелла следуют из антисимметричного тензора $F_{[\nu\mu]}$ электромагнитного поля в виде его четырехмерной дивергенции. Из новой формы представления тензора $F_{[\nu\mu]}$ следует, что уравнения Максвелла можно эквивалентно записать в виде разности уравнений, являющихся четырехмерными дивергенциями тензоров $F_{\nu\mu}$ и $F_{(\nu\mu)}$. Новая форма антисимметричного тензора электромагнитного поля имеет и новые следствия, расширяющие знания об электромагнитном поле.

Целью настоящей статьи является получение и описание следствий из новой формы $F_{[\nu\mu]}=2F_{\nu\mu}-F_{(\nu\mu)}$ антисимметричного тензора электромагнитного поля.

2 Новая форма антисимметричного тензора электромагнитного поля

Электромагнитный потенциал будем записывать в виде $\mathbf{A}_\mu$ (φ/c, i$\mathbf{A}$), где φ и $\mathbf{A}$ скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля. Канонический антисимметричный тензор $F_{[\nu\mu]}$ электромагнитного поля запишем в матричном представлении:

$$F_{[\nu\mu]}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_x+\partial_x\varphi) & \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_y+\partial_y\varphi) & \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_z+\partial_z\varphi) \\ -\frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_x+\partial_x\varphi) & 0 & (\partial_x A_y-\partial_y A_x) & (\partial_x A_z-\partial_z A_x) \\ -\frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_y+\partial_y\varphi) & -(\partial_x A_y-\partial_y A_x) & 0_y & (\partial_y A_z-\partial_z A_y) \\ -\frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_z+\partial_z\varphi) & -(\partial_x A_z-\partial_z A_x) & -(\partial_y A_z-\partial_z A_y) & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Из тензорной алгебры следует, что несимметричный тензор второго ранга можно разложить на симметричную и антисимметричную части $F_{\nu\mu}=(\partial_\nu A_\mu+\partial_\mu A_\nu)/2+(\partial_\nu A_\mu-\partial_\mu A_\nu)/2$. Используя это разложения и тензор (1) запишем симметричный тензор $F_{(\nu\mu)}$:

$$F_{(\nu\mu)}=\begin{pmatrix} 2\frac{1}{c^2}\partial_t\varphi & \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_x-\partial_x\varphi) & \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_y-\partial_y\varphi) & \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_z-\partial_z\varphi) \\ \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_x-\partial_x\varphi) & 2\partial_x A_x & (\partial_x A_y+\partial_y A_x) & (\partial_x A_z+\partial_z A_x) \\ \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_y-\partial_y\varphi) & (\partial_x A_y+\partial_y A_x) & 2\partial_y A_y & (\partial_y A_z+\partial_z A_y) \\ \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_z-\partial_z\varphi) & (\partial_x A_z+\partial_z A_x) & (\partial_y A_z+\partial_z A_y) & 2\partial_z A_z \end{pmatrix} \quad (2)$$

Тогда несимметричный тензор $F_{\nu\mu}$ получим сложением тензоров (1) и (2):

$$F_{\nu\mu} = \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{c^2}\partial_t\varphi & \frac{1}{c}i\cdot\partial_t A_x & \frac{1}{c}i\cdot\partial_t A_y & \frac{1}{c}i\cdot\partial_t A_z \\ -\frac{1}{c}i\cdot\partial_x\varphi & \partial_x A_x & \partial_x A_y & \partial_x A_z \\ -\frac{1}{c}i\cdot\partial_y\varphi & \partial_y A_x & \partial_y A_y & \partial_y A_z \\ -\frac{1}{c}i\cdot\partial_z\varphi & \partial_z A_x & \partial_z A_y & \partial_z A_z \end{pmatrix} \tag{3}$$

Теперь, используя выражение $F_{[\nu\mu]}=2F_{\nu\mu}-F_{(\nu\mu)}$ запишем новое представление канонического антисимметричного тензора электромагнитного поля $F_{[\nu\mu]}$ в виде:

$$F_{[\nu\mu]} = 2\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{c^2}\partial_t\varphi & \frac{1}{c}i\cdot\partial_t A_x & \frac{1}{c}i\cdot\partial_t A_y & \frac{1}{c}i\cdot\partial_t A_z \\ -\frac{1}{c}i\cdot\partial_x\varphi & \partial_x A_x & \partial_x A_y & \partial_x A_z \\ -\frac{1}{c}i\cdot\partial_y\varphi & \partial_y A_x & \partial_y A_y & \partial_y A_z \\ -\frac{1}{c}i\cdot\partial_z\varphi & \partial_z A_x & \partial_z A_y & \partial_z A_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2\frac{1}{c^2}\partial_t\varphi & \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_x - \partial_x\varphi) & \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_y - \partial_y\varphi) & \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_z - \partial_z\varphi) \\ \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_x - \partial_x\varphi) & 2\partial_x A_x & (\partial_x A_y + \partial_y A_x) & (\partial_x A_z + \partial_z A_x) \\ \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_y - \partial_y\varphi) & (\partial_x A_y + \partial_y A_x) & 2\partial_y A_y & (\partial_y A_z + \partial_z A_y) \\ \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_z - \partial_z\varphi) & (\partial_x A_z + \partial_z A_x) & (\partial_y A_z + \partial_z A_y) & 2\partial_z A_z \end{pmatrix}$$

3. Новые уравнения электромагнитного поля

Уравнения Максвелла следуют из антисимметричного тензора в виде его четырехмерной дивергенции. При отсутствии источников $\partial_\nu F_{[\nu\mu]}=0$ (здесь ковариантные и контравариантные индексы можно не различать). Запишем новое представление уравнений Максвелла в форме четырехмерной дивергенции:

$$\partial_\nu F_{[\nu\mu]} = 2\partial_\nu F_{\nu\mu} - \partial_\nu F_{(\nu\mu)} = 0 \tag{4}$$

Это уравнение можно записать в развернутом виде:

$$2(\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\varphi - \Delta\varphi) - (2\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\varphi + \partial_t\nabla\cdot\mathbf{A} - \Delta\varphi) = \nabla\cdot(-\nabla\varphi - \partial_t\mathbf{A}) = \nabla\cdot\mathbf{E} = 0 \tag{5}$$

$$\begin{aligned} &2(\frac{1}{c^2}\partial_{tt}A - \Delta A) - (\frac{1}{c^2}\partial_{tt}A - \frac{1}{c^2}\partial_t\nabla\varphi - \nabla(\nabla\cdot A) - \Delta A) = \\ &= \frac{1}{c^2}\partial_t(\partial_t A + \nabla\varphi) + \nabla\times\nabla\times A = -\frac{1}{c^2}\partial_t\mathbf{E} + \nabla\times\mathbf{B} = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

или окончательно получим уравнения Максвелла $\nabla\cdot\mathbf{E}=0$ и $\partial_t\mathbf{E}/c^2=\nabla\times\mathbf{B}$, где $\mathbf{E}$ и B, соответственно напряженность электрического поля и индукция магнитного поля.

Для тензора второго ранга существуют дивергенции по каждому из индексов. Уравнение (4) является дивергенцией по индексу ν. Найдем дивергенцию антисимметричного тензора $F_{[\nu\mu]}$ по индексу μ:

$$\partial_\mu F_{[\nu\mu]} = 2\partial_\mu F_{\nu\mu} - \partial_\mu F_{(\nu\mu)} = 0 \tag{7}$$

Очевидно, что в силу антисимметричности тензора $F_{[\nu\mu]}$ должны получить результат, что и в предыдущем случае, но с противоположным знаком. Уравнение (8) можно записать в развернутом виде:

$$2\partial_t(\frac{1}{c^2}\partial_t\varphi+\nabla\cdot\mathbf{A})-(2\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\varphi+\partial_t\nabla\cdot\mathbf{A}-\Delta\varphi)=-\nabla\cdot(-\nabla\varphi-\partial_t\mathbf{A})=-\nabla\cdot\mathbf{E}=0 \qquad (8)$$

$$\begin{aligned}&2(-\nabla(\frac{1}{c^2}\partial_t\varphi+\nabla\cdot\mathbf{A})-(\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\partial_t-\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\Delta\mathbf{A}=\\&=\frac{1}{c^2}\partial_t(-\partial_t\mathbf{A}-\nabla\varphi)-\nabla\times\nabla\times\partial_t\mathbf{A}=\frac{1}{c^2}\partial_t\mathbf{E}-\nabla\times\mathbf{B}=0\end{aligned} \qquad (9)$$

или окончательно также получим уравнения Максвелла $\nabla\cdot\mathbf{E}=0$ и $\partial_t\mathbf{E}/c^2=\nabla\times\mathbf{B}$. Уравнения (5) и (6) отличаются от уравнений (8) и (9). Это вызвано тем, что дивергенции несимметричного тензора (3) по разным индексам различны. Найдем дивергенции этого тензора из уравнений (4) и (7):

$$\partial_\nu F_{\nu\mu}=\partial_\nu F_{[\nu\mu]}/2+\partial_\nu F_{(\nu\mu)}/2=0 \qquad \text{и} \qquad \partial_\mu F_{\nu\mu}=\partial_\mu F_{[\nu\mu]}/2+\partial_\mu F_{(\nu\mu)}/2=0$$

Эти уравнения можно записать в развернутом виде:

$$\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\varphi-\Delta\varphi=0 \qquad (10)$$

$$\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{A}-\Delta\mathbf{A}=0 \qquad (11)$$

$$\partial_t(\frac{1}{c^2}\partial_t\varphi+\nabla\cdot\mathbf{A})=0 \qquad (12)$$

$$-\nabla(\frac{1}{c^2}\partial_t\varphi+\nabla\cdot\mathbf{A})=0 \qquad (13)$$

Уравнения (10) и (11) являются уравнениями Максвелла в калибровке Лоренца [3], а уравнения (12) и (13) являются четырехмерной производной калибровочного условия Лоренца $\partial_t\varphi/c^2+\nabla\cdot A=0$. В электродинамике уравнения (11) и (12) получают применением этой калибровки. Из несимметричного тензора (3) уравнения Максвелла и это калибровочное условие следуют как уравнения электромагнитного поля, без дополнительных предположений и обоснований. Это говорит о том, что калибровочное условие Лоренца является не просто математическим приемом, а является полноправным уравнением электромагнитного поля и имеет глубокий физический смысл о котором будет сказано далее.

Из уравнения (4) найдем дивергенцию симметричного тензора $\partial_\nu F_{(\nu\mu)}$:

$$\partial_\nu F_{(\nu\mu)}=2\partial_\nu F_{\nu\mu}-\partial_\nu F_{[\nu\mu]}/2=0$$

Запишем ее в развернутом виде:

$$2\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\varphi+\partial_t\nabla\cdot\mathbf{A}-\Delta\varphi=0 \qquad (14)$$

$$\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\partial_t\nabla\varphi-\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\Delta\mathbf{A}=0 \qquad (15)$$

Уравнение (15) является электромагнитным аналогом уравнения движения изотропной упругой среды [4] или динамического уравнения движения Навье-Стокса. Здесь это уравнение показывает общность законов движения разных видов материи.

Канонический антисимметричный тензор электромагнитного поля $F_{[\nu\mu]}$ представляет собой четырехмерный ротор, т.е. описывает четырехмерное вращение электромагнитного поля. В физике сплошных сред симметричный тензор описывает деформацию среды. Тогда, применительно к электромагнитному полю, симметричный тензор $F_{(\nu\mu)}$ (2) и следующие из него уравнения (14) и (15) описывают четырехмерную деформацию поля. Таким образом, эти тензоры дополняют друг друга в описании четырехмерного движения электромагнитного поля. Диагональные члены симметричного тензора (2) являются членами калибровочного условия Лоренца. Из этого следует, что это условие описывает четырехмерную объемную деформацию расширения-сжатия электромагнитного поля.

Уравнения Максвелла с источниками поля в виде плотности электрических зарядов ρ и плотности тока **J** записывают в виде [3]:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \varepsilon_0 \qquad \text{или} \qquad -\partial_t \nabla \cdot \mathbf{A} - \Delta\varphi = \rho / \varepsilon_0$$

$$\mu_0 \cdot \mathbf{J} + \frac{1}{c^2}\partial_t \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{B} \qquad \text{или} \qquad \frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\partial_t \nabla\varphi + \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu_0 \cdot \mathbf{J}$$

$$\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\varphi - \Delta\varphi = \rho / \varepsilon_0 \qquad \frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A} = \mu_0 \cdot \mathbf{J}$$

Тогда уравнения (14) и (15) с источниками поля будут иметь вид:

$$2\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\varphi + \partial_t \nabla \cdot \mathbf{A} - \Delta\varphi = \rho / \varepsilon_0 \qquad \frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\partial_t \nabla\varphi - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A} = \mu_0 \cdot \mathbf{J}$$

Таким образом, уравнения Максвелла (5), (6), (10), (11) образуют с уравнениями (12), (13), (14) и (15) связанную систему и эти уравнения имеют такое же право на существование в электродинамике, как и уравнения Максвелла. Все уравнения этой системы можно записать в двух сжатых эквивалентных вариантах:

$$1)\ \ \partial_\nu F_{\nu\mu} = \mathbf{J}_\nu \qquad \partial_\mu F_{\nu\mu} = 0 \qquad \text{и} \qquad 2)\ \partial_\nu F_{[\nu\mu]} = \mathbf{J}_\nu \qquad \partial_\nu F_{(\nu\mu)} = \mathbf{J}_\nu$$

Для перехода от одного варианта к другому достаточно попарно сложить и вычесть уравнения соответствующего варианта. Первый вариант этих уравнений в развернутом виде:

$$\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\varphi - \Delta\varphi = \rho / \varepsilon_0 \qquad \frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A} = \mu_0 \cdot \mathbf{J}$$

$$\partial_t\left(\frac{1}{c^2}\partial_t\varphi+\nabla\cdot\mathbf{A}\right)=0 \qquad -\nabla\left(\frac{1}{c^2}\partial_t\varphi+\nabla\cdot\mathbf{A}\right)=0$$

Второй вариант этих уравнений в развернутом виде:

$$-\partial_t\nabla\cdot\mathbf{A}-\Delta\varphi=\rho/\varepsilon_0 \qquad \frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{A}+\frac{1}{c^2}\partial_t\nabla\varphi+\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}=\mu_0\cdot\mathbf{J}$$

$$2\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\varphi+\partial_t\nabla\cdot\mathbf{A}-\Delta\varphi=\rho/\varepsilon_0 \qquad \frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\partial_t\nabla\varphi-\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\Delta A=\mu_0\cdot\mathbf{J}$$

В каждый из этих вариантов входят канонические уравнения Максвелла. Какой из этих эквивалентных вариантов выбирать, определяется конкретной задачей исследования. Второй вариант интересен тем, что он кроме вращения электромагнитного поля в явном виде описывает и его деформацию, которая в курсах электродинамики не рассмотрена. Динамическое уравнение Навье – Стокса описывает и волновые движения сплошной среды, следовательно, это относится и к его электромагнитному аналогу (15). Это очевидно, поскольку применение к нему калибровки Лоренца или уравнения (13), приводит волновому уравнению Максвелла (11).

4 Заключение

Новая форма представления канонического антисимметричного тензора электромагнитного поля в виде $F_{[\nu\mu]}=2F_{\nu\mu}-F_{(\nu\mu)}$ имеет новые следствия. Из него вытекает, что уравнения Максвелла можно эквивалентно зписать в виде разности уравнений, являющихся четырехмерными дивергенциями тензоров $F_{\nu\mu}$ и $F_{(\nu\mu)}$. Из новой формы тензора $F_{[\nu\mu]}$ следует уравнение движения электромагнитного поля в виде динамического уравнения Навье – Стокса, что показывает единство законов природы. Это представление антисимметричного тензора электромагнитного поля позволяет дать физическую интерпретацию калибровочного условия Лоренца, как описание четырехмерной объемной деформации электромагнитного поля, и равноправно включить это условие в систему уравнений электродинамики.

Таким образом, новая форма представления канонического антисимметричного тензора $F_{[\nu\mu]}$ и следующие из него уравнения расширяют возможности описания электромагнитного поля и его понимание.

Литература

1 Рубаков В А *Классические калибровочные поля* (М.: «Эдиториал УРСС», 1999)

2 Тоннела М-А *Основы электромагнетизма и теории относительности* (М.: «Издательство иностранной литературы», 1962, с.153)

3 Ландау Л Д , Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: «ФИЗМАТЛИТ», 2003)

Landau L D, Lifshits E M *The Classical Theory of Fields* (Oxford: Pergamon Press, 1983)

4 Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория упругости* (М.: «Наука», 1973);

Landau L D, Lifshits E M *The Theory of elasticity* (Oxford: Pergamon Press, 1983)

__________Ю.А. Спиричев