International Journal of Number Theory

UNE SOLUTION DE L'HYPOTHESE DE RIEMANN

Abdelmajid Ben Hadj Salem
6, rue du Nil, Cité Soliman Er-Riadh, 8020 Soliman, Tunisia
abenhadjsalem@gmail.com

Received (Day Month Year)
Accepted (Day Month Year)

En 1898, Riemann avait annoncé la conjecture suivante [1] : *Soit $\zeta(s)$ la fonction complexe de la variable complexe $s = \sigma + it$ définie par :*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \textit{ pour } \Re(s) = \sigma > 1$$

alors les zéros non triviaux de $\zeta(s) = 0$ sont de la forme $s = \dfrac{1}{2} + it$, $t \in \mathbb{R}^*$. Nous donnons une démonstration que $\sigma = \dfrac{1}{2}$ en utilisant une définition équivalente de l'Hypothèse de Riemann.

Abstract
In 1898, Riemann had announced the following conjecture [1] : the nontrivial roots (zeros) $s = \sigma + it$ of the zeta function, defined by :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}, \text{ for } \quad \Re(s) > 1$$

have real part $\sigma = \dfrac{1}{2}$. We give a proof that $\sigma = \dfrac{1}{2}$ using an equivalent statement of Riemann Hypothesis.

Keywords: : Zeta function ; nontrivial zeros of zeta function ; equivalent statements ; definition of limit of real sequences.

Mathematics Subject Classification 2010 : 11-XX

1. Introduction

En 1898, Riemann avait annoncé la conjecture suivante [1] :

Conjecture 1. *Soit $\zeta(s)$ la fonction complexe de la variable complexe $s = \sigma + it$ définie par le prolongement analytique de la fonction :*

$$\zeta_1(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}, \textit{ pour } \Re(s) = \sigma > 1 \tag{1.1}$$

sur tout le plan complexe sauf au point $s = 1$. Alors les zéros non triviaux de $\zeta(s) = 0$ sont de la forme :

$$s = \frac{1}{2} + it \tag{1.2}$$

Dans cette communication, nous donnons une démonstration que $\sigma = \dfrac{1}{2}$. Notre idée est de partir d'une proposition équivalente de l'Hypothèse de Riemann et en utilisant la définition de la limite des suites.

1.1. *La fonction ζ*

Notons par $s = \sigma + it$ la variable complexe de $\mathbb{C}$. Pour $\Re(s) = \sigma > 1$, appelons ζ_1 la fonction définie par :

$$\zeta_1(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}, \text{ avec } \Re(s) = \sigma > 1 \tag{1.3}$$

Nous savons qu'avec la définition précédente, la fonction ζ_1 est une fonction analytique de s. Notons par $\zeta(s)$ la fonction obtenue par prolongement analytique de $\zeta_1(s)$, alors nous rappelons le théorème suivant [2] :

Theorem 2. *Les zéros de $\zeta(s)$ satisfont :*

1. $\zeta(s)$ n'a pas de zéros pour $\Re(s) > 1$;

2. le seul pôle de $\zeta(s)$ est au point $s = 1$; son résidu vaut 1 et il est simple ;

3. les zéros triviaux de $\zeta(s)$ sont déterminés pour les valeurs $s = -2, -4, \dots$;

4. les zéros non triviaux se situent dans la région $0 \leq \Re(s) \leq 1$ dite bande critique et ils sont symétriques respectivement par rapport à l'axe vertical $\Re(s) = \dfrac{1}{2}$ et l'axe des réels $\Im(s) = 0$.

Par suite, la conjecture relative à l'Hypothèse de Riemann est exprimée comme suit :

Conjecture 3. *(Hypothèse de Riemann,[2]) Tous les zéros non triviaux de $\zeta(s)$ sont sur la droite critique $\Re(s) = \dfrac{1}{2}$.*

En plus des propriétes citées par le théorème cité ci-dessus, la fonction $\zeta(s)$ vérifie la relation fonctionnelle [2] pour $s \neq 1$:

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s}\pi^{-s} cos\frac{s\pi}{2}\Gamma(s)\zeta(s) \tag{1.4}$$

où $\Gamma(s)$ est la fonction définie sur le demi-plan $\Re(s) > 0$ par :

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{s-1}dt, \tag{1.5}$$

Alors, au lieu d'utiliser la fonctionnelle donnée par (1.4), nous allons utiliser celle présentée par G.H. Hardy [3] à savoir la fonction eta de Dirichlet [2] :

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = (1 - 2^{1-s})\zeta(s) \tag{1.6}$$

Elle est convergente pour tout $s \in \mathbb{C}$ avec $\Re(s) > 0$.

1.2. *Une Proposition équivalente à l'Hypothèse de Riemann*

Parmi les propositions équivalentes à l'Hypothèse de Riemann celle de la fonction eta de Dirichlet qui s'énnonce comme suit [2] :

Equivalence 4. *L'Hypothèse de Riemann est équivalente à l'énnoncé que tous les zéros de la fonction eta de Dirichlet :*

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = (1 - 2^{1-s})\zeta(s) \tag{1.7}$$

qui se situent dans la bande critique $0 < \Re(s) < 1$*, sont sur la droite critique* $\Re(s) = \frac{1}{2}$.

2. Démonstration que les zéros de la $\boldsymbol{\eta(s)}$ sont sur la droite critique $\boldsymbol{\Re(s) = \frac{1}{2}}$

Notons par $s = \sigma + it$ avec $0 < \sigma < 1$. Considérons maintenant un zéro de $\eta(s)$ qui se trouve dans la bande critique et appelons $s = \sigma + it$ ce zéro, nous avons donc $0 < \sigma < 1$ et $\eta(s) = 0 \Longrightarrow (1 - 2^{1-s})\zeta(s) = 0$. Notons $\zeta(s) = A + iB$, et $\theta = tLog2$, alors :

$$(1-2^{1-s})\zeta(s) = \left[A(1 - 2^{1-\sigma}cos\theta) - 2^{1-\sigma}Bsin\theta\right] + i\left[B(1 - 2^{1-\sigma}cos\theta) + 2^{1-\sigma}Asin\theta\right] \tag{2.1}$$

$(1 - 2^{1-s})\zeta(s) = 0$ donne le système :

$$A(1 - 2^{1-\sigma}cos\theta) - 2^{1-\sigma}Bsin\theta = 0 \tag{2.2}$$

$$B(1 - 2^{1-\sigma}cos\theta) + 2^{1-\sigma}Asin\theta = 0 \tag{2.3}$$

Comme les fonctions *sin* et *cos* ne s'annulent pas simultanément, supposons par exemple que $sin\theta \neq 0$, la première équation du système donne $B = \dfrac{A(1 - 2^{1-\sigma}cos\theta)}{2^{1-\sigma}sin\theta}$, la deuxième équation s'écrit :

$$\frac{A(1 - 2^{1-\sigma}cos\theta)}{2^{1-\sigma}sin\theta}(1 - 2^{1-\sigma}cos\theta) + 2^{1-\sigma}Asin\theta = 0 \Longrightarrow A = 0 \tag{2.4}$$

Par suite, $B = 0 \Longrightarrow \zeta(s) = 0$, il s'ensuit que :

$$\boxed{s\ est\ un\ zéro\ de\,\eta(s)\ dans\ la\ bande\ critique\ est\ aussi\ un\ zéro\ de\,\zeta(s)} \tag{2.5}$$

Reciproquement, si s est un zéro de $\zeta(s)$ dans la bande critique, soit $\zeta(s) = A+iB = 0 \Longrightarrow \eta(s) = (1-2^{1-s})\zeta(s) = 0$, donc s est aussi un zéro de $\eta(s)$ dans la bande critique. Nous pouvons écrire :

$$\boxed{s\ est\ un\ zéro\ de\,\zeta(s)\ dans\ la\ bande\ critique\ est\ aussi\ un\ zéro\ de\,\eta(s)} \tag{2.6}$$

Ecrivons la fonction η :

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}e^{-sLogn} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}e^{-(\sigma+it)Logn} =$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}e^{-\sigma Logn}.e^{-itLogn}$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}e^{-\sigma Logn}(cos(tLogn) - isin(tLogn)) \tag{2.7}$$

Définissons la suite de fonctions $((\eta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}(s))$, par :

$$\eta_n(s) = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k^s} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{cos(tLogk)}{k^\sigma} - i\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{sin(tLogk)}{k^\sigma} \tag{2.8}$$

avec $s = \sigma + it$ et $t \neq 0$.

Soit s un zéro de η dans la bande critique, soit $\eta(s) = 0$, avec $0 < \sigma < 1$. Par suite, on peut écrire $lim_{n\longrightarrow+\infty}\eta_n(s) = 0 = \eta(s)$. Ce qui donne :

$$lim_{n\longrightarrow+\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{cos(tLogk)}{k^\sigma} = 0 \tag{2.9}$$

$$lim_{n\longrightarrow+\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{sin(tLogk)}{k^\sigma} = 0 \tag{2.10}$$

Utilisons la définition de la limite d'une suite, on peut écrire :

$$\forall\epsilon_1 > 0 \quad \exists n_r, \forall N > n_r \quad |\Re(\eta(s)_N)| < \epsilon_1 \tag{2.11}$$
$$\forall\epsilon_2 > 0 \quad \exists n_i, \forall N > n_i \quad |\Im(\eta(s)_N)| < \epsilon_2 \tag{2.12}$$

En prenant $\epsilon = \epsilon_1 = \epsilon_2$ et $N > max(n_r, n_i)$, on obtient :

$$0 < \sum_{k=1}^{N}\frac{cos^2(tLogk)}{k^{2\sigma}} + 2\sum_{k,k'=1;k<k'}^{N}\frac{(-1)^{k+k'}cos(tLogk).cos(tLogk')}{k^\sigma k'^\sigma} < \epsilon^2 \tag{2.13}$$
$$0 < \sum_{k=1}^{N}\frac{sin^2(tLogk)}{k^{2\sigma}} + 2\sum_{k,k'=1;k<k'}^{N}\frac{(-1)^{k+k'}sin(tLogk).sin(tLogk')}{k^\sigma k'^\sigma} < \epsilon^2 \tag{2.14}$$

En faisant la somme des deux dernières inégalités, on obtient :

$$0 < \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^{2\sigma}} + 2\sum_{k,k'=1;k<k'}^{N}(-1)^{k+k'}\frac{cos(tLog(k/k'))}{k^\sigma k'^\sigma} < 2\epsilon^2 \tag{2.15}$$

2.1. *Cas* $\sigma = \frac{1}{2} \Longrightarrow 2\sigma = 1$

On suppose que $\sigma = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow 2\sigma = 1$. Commençons par rappeler le théorème de Hardy (1914) [2],[3] :

Theorem 5. *Il y'a une infinité de zéros de $\zeta(s)$ sur la droite critique.*

Des propositions (2.5-2.6), nous déduisons la proposition suivante :

Proposition 6. *Il y'a une infinité de zéros de $\eta(s)$ sur la droite critique.*

Soit $s_j = \frac{1}{2} + it_j$ un des zéros de la fonction $\eta(s)$ sur la droite critique, soit $\eta(s_j) = 0$.

L'équation (2.15) s'écrit pour s_j :

$$0 < \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} + 2 \sum_{k,k'=1;k<k'}^{N} (-1)^{k+k'} \frac{cos(t_j Log(k/k'))}{\sqrt{k}\sqrt{k'}} < 2\epsilon^2 \tag{2.16}$$

ou encore :

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} < 2\epsilon^2 - 2 \sum_{k,k'=1;k<k'}^{N} (-1)^{k+k'} \frac{cos(t_j Log(k/k'))}{\sqrt{k}\sqrt{k'}} \tag{2.17}$$

Si on fait tendre N vers $+\infty$, la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$ est divergente et devient infinie. Soit :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \leq 2\epsilon^2 - 2 \sum_{k,k'=1;k<k'}^{+\infty} (-1)^{k+k'} \frac{cos(t_j Log(k/k'))}{\sqrt{k}\sqrt{k'}} \tag{2.18}$$

Par suite, nous obtenons le résultat important suivant :

$$\boxed{lim_{N\longrightarrow+\infty} \sum_{k,k'=1;k<k'}^{N} (-1)^{k+k'} \frac{cos(t_j Log(k/k'))}{\sqrt{k}\sqrt{k'}} = -\infty} \tag{2.19}$$

sinon, nous aurons une contradiction avec le fait que :

$$lim_{N\longrightarrow+\infty} \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k-1} \frac{1}{k^{s_j}} = 0$$

Comme $t_j \neq 0$, et qu'il y'a une infinité de zéros sur la droite critique, alors le résultat de la formule donnée par (2.19) est indépendant de t_j. Revenons maintenant à $s = \sigma + it$ un zéro de $\eta(s)$ dans la bande critique, soit $\eta(s) = 0$. Prenons $\sigma = \dfrac{1}{2}$. En partant de la définition de la limite des suites appliquée ci-dessus, nous obtenons :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \leq 2\epsilon^2 - 2 \sum_{k,k'=1;k<k'}^{+\infty} (-1)^{k+k'} \frac{cos(t Log(k/k'))}{\sqrt{k}\sqrt{k'}} \tag{2.20}$$

avec sans aucune contradiction. De la proposition (2.5) il s'ensuit que $\zeta(s) = \zeta(\frac{1}{2} + it) = 0$. Il existe donc des zéros de $\zeta(s)$ sur la droite critique $\Re(s) = \dfrac{1}{2}$.

2.2. *Cas* $0 < \sigma < \frac{1}{2}$

2.2.1. *Cas où il n'existe pas de zéros de* $\eta(s)$ *avec* $s = \sigma + it$ *et* $0 < \sigma < \frac{1}{2}$

En utilisant, pour ce cas, le point 4 du théorème (2), nous déduisons que la fonction $\eta(s)$ n'a pas de zéros avec $s = \sigma + it$ et $\frac{1}{2} < \sigma < 1$. Par suite, d'après la proposition (2.5), il s'ensuit que la fonction $\zeta(s)$ a ses zéros seulement sur la droite critique $\Re(s) = \sigma = \frac{1}{2}$ et **l'Hypothèse de Riemann est vraie**.

2.2.2. *Cas où il existe des zéros de* $\eta(s)$ *avec* $s = \sigma + it$ *et* $0 < \sigma < \frac{1}{2}$

Supposons qu'il existe $s = \sigma + it$ un zéro de $\eta(s)$ soit $\eta(s) = 0$ avec $0 < \sigma < \frac{1}{2} \Longrightarrow s \in$ à la bande critique. Nous écrivons l'équation (2.15), :

$$0 < \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^{2\sigma}} + 2 \sum_{k,k'=1;k<k'}^{N} (-1)^{k+k'} \frac{cos(tLog(k/k'))}{k^{\sigma} k'^{\sigma}} < 2\epsilon^2$$

ou :

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^{2\sigma}} < 2\epsilon^2 - 2 \sum_{k,k'=1;k<k'}^{N} (-1)^{k+k'} \frac{cos(tLog(k/k'))}{k^{\sigma} k'^{\sigma}} \tag{2.21}$$

Or $2\sigma < 1$, il s'ensuit que $lim_{N \longrightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^{2\sigma}}$ tende vers $+\infty$ et nous obtenons :

$$\sum_{k,k'=1;k<k'}^{+\infty} (-1)^{k+k'} \frac{cos(tLog(k/k'))}{k^{\sigma} k'^{\sigma}} = -\infty \tag{2.22}$$

2.3. *Cas* $0 < \Re(s) < \frac{1}{2}$

Soit $s = \sigma + it$ le zéro de $\eta(s)$ dans $0 < \Re(s) < \frac{1}{2}$, objet du paragraphe précédent. Suivant le point 4 du théorème 2, le nombre complexe $s' = 1 - \sigma + it$ est aussi un zéro de la fonction $\eta(s)$ dans la bande $\frac{1}{2} < \Re(s) < 1$. En appliquant (2.15), nous avons :

$$0 < \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^{2\sigma'}} + 2 \sum_{k,k'=1;k<k'}^{N} (-1)^{k+k'} \frac{cos(tLog(k/k'))}{k^{\sigma'} k'^{\sigma'}} < 2\epsilon^2 \tag{2.23}$$

Or $2\sigma' = 2(1 - \sigma) > 1 \Longrightarrow \sigma < \frac{1}{2}$, la série $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^{2\sigma'}}$ est convergente vers une constante $C(\sigma')>0$. De l'équation (2.23), nous déduisons que :

$$\sum_{k,k'=1;k<k'}^{+\infty} (-1)^{k+k'} \frac{cos(tLog(k/k'))}{k^{\sigma'} k'^{\sigma'}} = -\frac{C(\sigma')}{2} > -\infty \tag{2.24}$$

Maintenant fixons $t = \Im(s')$ et considérons la fonction $F_N(u)$ définie par :

$$F_N(u) = \sum_{k,k'=1;k<k'}^{N} (-1)^{k+k'} \frac{cos(tLog(k/k'))}{k^u k'^u} =$$

$$= \sum_{k,k'=1;k<k'}^{N} (-1)^{k+k'} cos(tLog(k/k'))e^{-uLog(kk')}, \quad u \in]0,1[\tag{2.25}$$

La fonction $F_N(u)$ est continue pour $\forall N \in \mathbb{N}^*$ et $u \in]0,1[$, et nous avons obtenu précédemment que pour $N \longrightarrow +\infty$:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k,k'=1;k<k'}^{+\infty} (-1)^{k+k'} \frac{cos(tLog(k/k'))}{k^{\sigma'} k'^{\sigma'}} = -\frac{C(\sigma')}{2} \quad \text{pour } u = \sigma' = 1-\sigma > \frac{1}{2} \\ \displaystyle\sum_{k,k'=1;k<k'}^{+\infty} (-1)^{k+k'} \frac{cos(tLog(k/k'))}{\sqrt{k}\sqrt{k'}} = -\infty \quad \text{pour } \ u = \frac{1}{2} \\ \displaystyle\sum_{k,k'=1;k<k'}^{+\infty} (-1)^{k+k'} \frac{cos(tLog(k/k'))}{k^{\sigma} k'^{\sigma}} = -\infty \quad \text{pour } u = \sigma < \frac{1}{2} \end{cases} \tag{2.26}$$

Nous déduisons que la fonction $F_N(u)$ n'est pas continue en u sur l'intervalle]0,1[, d'où la contradiction. Il s'ensuit que la fonction $\eta(s)$ ne s'annule pas dans les intervalles $0 < \Re(s) < \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} < \Re(s) < 1$ et par suite la fonction $\eta(s)$ a toutes ses zéros non triviaux sur la droite critique $\Re s = \frac{1}{2}$ de la bande critique.

3. Conclusion

En résumé : pour nos démonstrations, nous avons fait usage de la fonction $\eta(s)$ de Dirichlet :

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = (1-2^{1-s})\zeta(s), \quad s = \sigma + it$$

dans la bande critique $0 < \Re(s) < 1$, en obtenant :

- $\eta(s)$ s'annule pour $\sigma = \Re(s) = \frac{1}{2}$;
- $\eta(s)$ ne s'annule pas pour $0 < \sigma = \Re(s) < \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} < \sigma = \Re(s) < 1$.

Par suite, tous les zéros non triviaux de $\eta(s)$ dans la bande critique $0 < \Re(s) < 1$ s'annulent sur la droite critique $\Re(s) = \frac{1}{2}$. En appliquant la proposition équivalente à l'Hypothèse de Riemann 1.2, tous les zéros non triviaux de la fonction $\zeta(s)$ se trouvent sur la droite critique $\Re(s) = \frac{1}{2}$. La démonstration de l'Hypothèse de Riemann est ainsi achevée. Nous annonçons donc le théorème important :

Theorem 7. ***(Abdelmajid Ben Hadj Salem, 2017) :***
Tous les zéros non triviaux de la fonction $\zeta(s)$ avec $s = \sigma + it$ se situent sur l'axe vertical $\Re(s) = \dfrac{1}{2}$.

C.Q.F.D
Cité Soliman Er-Riadh, March 30^{th}, 2017

Bibliographie

[1] Enrico Bombieri. *The Riemann Hypothesis*, pp 107-124. The Millennium Prize Problems. J. Carlson, A. Jaffe, and A. Wiles Editors. 160 pages. Published by The American Mathematical Society, Providence, RI, for The Clay Mathematics Institute, Cambridge, MA. 2006.

[2] Peter Borwein, Stephen Choi, Brendan Rooney and Andrea Weirathmueller. *The Riemann Hypothesis - A Resource for the Afficionado and Virtuoso Alike.* First Edition. CMS Books in Mathematics. Springer-Verlag New York. 533 pages. 2008.

[3] E.C. Titchmarsh, D.R. Heath-Brown. *The Theory of the Riemann Zeta-Function.* Second Edition revised by D.R. Heath-Brown. Oxford University Press, New York. 418 pages. 1986.

Address : Abdelmajid Ben Hadj Salem : 6, Rue du Nil, Cité Soliman Er-Riadh, 8020 Soliman, Tunisia.

E-mail : abenhadjsalem@gmail.com