周期系におけるＮＳＩＶＰの時間大域可解性の時間変換解析に基く証明

概要

周期系における非圧縮性ＮＳＩＶＰの時間大域可解性を、時間変換解析に基き、証明する。

序論

ＮＳｅｑに関しては、流体力学の基礎方程式として、ナビエ[1], ストークス[2]により確立された。以降、長らくその可解性が追究されてきたが、その非線形性に基く困難のため、解析対象を非圧縮性流体に限定しても、１７０年を経過するまで可解性に関する十分な結果が知られなかった。

非圧縮性流体に対するＮＳＩＶＰに関しては、ルレイ[3], ホップ[4]あるいはキセレフ-ラジゼンスカヤ[5], 伊藤[6], 加藤-藤田[7]等に始まり、加藤[8], 儀我-宮川[9]により拡充されて発展した議論に基き、時間局所可解性、あるいは小値性初期値に対する時間大域可解性が、適切性を含めて知られている。しかしながら、小値性を想定しない初期値に対する時間大域可解性は不明であった。

本論文では、周期系における小値性を想定しない初期値に対するＮＳＩＶＰの時間大域可解性を、時間変換解析に基き、証明する。なお、全空間におけるＮＳＩＶＰに関しても時間大域可解性が示されており、その証明は別論文[11]にて示される。

本論文は、ＣＭＩの周期系版のＮＳＩＶＰに関する問題[10]に対する肯定的回答を与え、またその収束特性等の解特性を明確化する。

概観

本論では、周期系におけるＮＳＩＶＰが、初期値の大きさに依らず時間大域的古典解を持つことを示す。時間大域解は、一意性, 正則性, 初期値連続依存を有し、この意味で適切である。また、解のノルムは減衰性上限関数を持ち、その減衰特性は初期値ノルムに応じて与えられる。

本論では、時間局所可解性解析と先験的評価に基き時間大域可解性解析を行っており、この観点で本論は時間大域可解性解析の典型的形態に基くものとなっている。但し、ＮＳＩＶＰに対する積分方程式とヤングの不等式に依るルベーグ空間ノルムの基本的な評価による解析には限界があり、この問題を乗越えるため、本論では、時間変数を変換した上で評価を行い、然る後に逆変換する形での解析を行う。この時間変換解析によりノルム上限評価の範囲の拡大が可能となる。

時間局所可解性解析では、初期値の $\boldsymbol{L}^{Q}{}_{,Q\in(n,\infty)}$への帰属に基き解 $\boldsymbol{u}_{\in\boldsymbol{L}^{Q}_{[0,T_M]}}$ の存在を示した上で、初期値の $\boldsymbol{L}^2\cap\boldsymbol{L}^q{}_{,q\in(n,\infty]}$ への帰属に基き、解の $\boldsymbol{L}^2_{[0,T_M]}\cap\boldsymbol{L}^q_{[0,T_M]}$ や $\boldsymbol{L}^r_{t\,,t\in(0,T_M],r\in(q,\infty]}$ への帰属並びに解の偏導関数の $\boldsymbol{L}^r_{t\,,t\in(0,T_M],r\in[2,\infty]}$ への帰属を示す。次いで、先験的にエネルギー非増加性を示し、これに基き解やその偏導関数の $\boldsymbol{L}^r{}_{,r\in[2,\infty]}$ノルムが減少型上限を持つことを示す。そして、時間局所可解性と先験的評価に基き、時間大域可解性を示す。

時間変換解析は (時間大域可解性の証明の段階に限らず) 上記過程で随時 (しばしば) 利用される。

１. 準備

本論では以下により定義される関数空間を扱う。

定義１ (関数空間)

本論では、３次元以上の全空間領域 $\boldsymbol{R}^n{}_{;n\in\boldsymbol{N}_{\geq 3}}$ における空間的周期関数を扱う。a を正定数、$\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ を基本ベクトルとして、周期格子系 $\boldsymbol{\Lambda}^n$ および単位周期領域 $\mathit{\Omega}$ を以下に依り定義する。

$$\boldsymbol{\Lambda}^n = \{\, \lambda_1 a\boldsymbol{e}_1 + \cdots + \lambda_n a\boldsymbol{e}_n \,|\, \lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \boldsymbol{Z} \,\}$$

$$\mathit{\Omega} = \{\, (x_1,\ldots,x_n)_{\in\boldsymbol{R}^n} \,|\, x_1,\ldots,x_n \in [0,a] \,\}$$

このとき、関数空間 $\boldsymbol{L}^q(\boldsymbol{R}^n;\boldsymbol{\Lambda}^n)_{,q\in[1,\infty]}$、関数 $\boldsymbol{\varphi}_{\in\boldsymbol{L}^q_{loc}(\boldsymbol{R}^n)}$ の平均値 $\boldsymbol{\varphi}_{\mathit{\Omega}}$ を、以下に依り定義する。

$$\boldsymbol{L}^q(\boldsymbol{R}^n;\boldsymbol{\Lambda}^n) = \{\, \boldsymbol{\varphi}_{\,\in\boldsymbol{L}^q_{loc}(\boldsymbol{R}^n)} \,|\, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{l}) = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})_{\,,\boldsymbol{x}\in\mathit{\Omega}\,,\boldsymbol{l}\in\boldsymbol{\Lambda}}\,, \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\boldsymbol{L}^q(\mathit{\Omega})} < \infty \,\}$$

$$\boldsymbol{\varphi}_{\mathit{\Omega}} = \frac{1}{|\mathit{\Omega}|}\int_{\mathit{\Omega}} dV \boldsymbol{\varphi}$$

時間点 $t_{\in[0,\infty)}$ や時間区間 $TI_{\subseteq[0,\infty]}$ と $\boldsymbol{L}^q(\boldsymbol{R}^n;\boldsymbol{\Lambda}^n)$ に対して関数空間 $\boldsymbol{L}^q_t(\boldsymbol{R}^n;\boldsymbol{\Lambda}^n), \boldsymbol{L}^q_{TI}(\boldsymbol{R}^n;\boldsymbol{\Lambda}^n)$ を以下に依り導入する。

但し、時間空間関数 $\boldsymbol{\varphi}$ に対して時間変数 t を指定して得られる空間関数を $\boldsymbol{\varphi}_t$ とする。

$$\|\boldsymbol{\varphi}\|_{\boldsymbol{L}^q_t(\Omega)} = \|\boldsymbol{\varphi}_t\|_{\boldsymbol{L}^q(\Omega)} \ , \ \boldsymbol{L}^q_t(\boldsymbol{R}^n;\boldsymbol{\Lambda}^n) = \big\{\boldsymbol{\varphi}\,\big|\, \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\boldsymbol{L}^q_t(\Omega)} < \infty\big\}$$
$$\|\boldsymbol{\varphi}\|_{\boldsymbol{L}^q_{TI}(\Omega)} = \sup_{t\in TI}\|\boldsymbol{\varphi}_t\|_{\boldsymbol{L}^q(\Omega)} \ , \ \boldsymbol{L}^q_{TI}(\boldsymbol{R}^n;\boldsymbol{\Lambda}^n) = \big\{\boldsymbol{\varphi}\,\big|\, \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\boldsymbol{L}^q_{TI}(\Omega)} < \infty\big\}$$
[]

以上で定義された関数空間 $\boldsymbol{L}^q(\boldsymbol{R}^n;\boldsymbol{\Lambda}^n),\boldsymbol{L}^q_t(\boldsymbol{R}^n;\boldsymbol{\Lambda}^n),\boldsymbol{L}^q_{TI}(\boldsymbol{R}^n;\boldsymbol{\Lambda}^n)_{,q\in[1,\infty]}$ はバナッハ空間である。

以降、これらを各々単に $\boldsymbol{L}^q, \boldsymbol{L}^q_t, \boldsymbol{L}^q_{TI}$ のように表記する。

定義２ (多重指数)

本論では、多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)_{\in(\{0\}\cup\boldsymbol{N})^n}$ の大きさを $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ に依り定義する。また、α に対応する多重空間変数の単項式を $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}$、また偏微分を $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}\ldots\partial_n^{\alpha_n}$ に依り定義する。 []

定義３ (ヘルムホルツ分解)

周期関数 $\boldsymbol{\varphi}$ に対して以下を満たす周期関数 $\mathcal{P}\boldsymbol{\varphi}, \overline{\mathcal{P}}\boldsymbol{\varphi}$ が存在する場合、これらを各々 $\boldsymbol{\varphi}$ の非発散成分, 非回転成分と称し、$\boldsymbol{\varphi}$ のこれらの成分への分解をヘルムホルツ分解と称する。

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathcal{P}\boldsymbol{\varphi} + \overline{\mathcal{P}}\boldsymbol{\varphi} \ , \ \boldsymbol{\partial}\cdot\mathcal{P}\boldsymbol{\varphi} = 0 \ , \ (\mathcal{P}\boldsymbol{\varphi}, \overline{\mathcal{P}}\boldsymbol{\varphi})_{\boldsymbol{L}^2} = 0$$

周期関数 $\boldsymbol{\varphi}$ に対してこれに収束するヘルムホルツ分解可能周期関数列 $\{\boldsymbol{\varphi}_k\}_{k\in\boldsymbol{N}}, \boldsymbol{\varphi}_k = \mathcal{P}\boldsymbol{\varphi}_k + \overline{\mathcal{P}}\boldsymbol{\varphi}_k$ が存在し、成分組列 $\{(\mathcal{P}\boldsymbol{\varphi}_k, \overline{\mathcal{P}}\boldsymbol{\varphi}_k)\}_{k\in\boldsymbol{N}}$ が極限 $(\mathcal{P}\boldsymbol{\varphi}, \overline{\mathcal{P}}\boldsymbol{\varphi})$ を持つ場合、その各成分を $\boldsymbol{\varphi}$ の非発散成分, 非回転成分と称し、$\boldsymbol{\varphi}$ のこれらの成分への分解をヘルムホルツ分解と称する。

一般に、(上記の $\boldsymbol{L}^q, \boldsymbol{L}^q_{TI}$ 等の) 関数空間 $\boldsymbol{X}$ に対し、関数空間 $\mathcal{P}\boldsymbol{X}$ を以下により定義する。

$$\mathcal{P}\boldsymbol{X} = \{\,\boldsymbol{\varphi}\in\boldsymbol{X}\,|\,\boldsymbol{\varphi} = \mathcal{P}\boldsymbol{\varphi}\,\}$$
[]

定義４ (熱核)

全空間 $\boldsymbol{R}^n$ での熱方程式 $\partial_t f - \nu\triangle f = 0$ の初期値問題に対応する核 $K^{(\nu)}$ を次式に依り定義する。

$$K^{(\nu)}(t,\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}^{\,n}}\exp\Big(-\frac{\boldsymbol{x}^2}{4\nu t}\Big)$$

本論は次に定義される周期領域に対するＮＳＩＶＰの可解性や解特性の解析を主目的とする。この解析の過程では、これに対応する以下に定義される積分方程式の解析が行われる。

定義５ (初期値)

ここでは、以下を満たす初期値関数 $\boldsymbol{a}$ を想定する。但し、$q_{\in(n,\infty]}$; $m \ge 2$ とする。

$$\text{(1.1)}\quad \boldsymbol{a}\in\mathcal{P}\boldsymbol{L}^q \ , \ \partial^\alpha\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{L}^q{}_{,\,|\alpha|\le m}$$
$$\boldsymbol{a}_\Omega = \boldsymbol{0}$$

定義６ (方程式)

本論では以下の偏微分方程式の初期値問題 (ＮＳＩＶＰ) を扱う。

$$\text{(1.2)}\quad \boldsymbol{u}\in\mathcal{P}\boldsymbol{L}^q_{(0,\infty)}$$
$$\partial_t\boldsymbol{u} - \nu\triangle\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\partial})\boldsymbol{u} + \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\partial}p = \boldsymbol{0} \qquad {}_{,(t,\boldsymbol{x})\in(0,\infty)\times\boldsymbol{R}^n}$$
$$\boldsymbol{u}(0,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) \qquad {}_{,\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n}$$
$$\boldsymbol{u}_\Omega = \boldsymbol{0} \qquad {}_{,t\in(0,\infty)}$$

次の積分方程式は、初期値 $\boldsymbol{a}$ で $\boldsymbol{a}_\Omega = \boldsymbol{0}$ なるものに対して、解 $\boldsymbol{u}$ で $\boldsymbol{u}_\Omega = \boldsymbol{0}$ なるもので偏導関数をもつものが存在する場合、初期値問題 (1.2) と同値となる。

$$\text{(1.3)}\quad \boldsymbol{u}_t = K_t{*}\boldsymbol{a} - \int_0^t d\tau\,\mathcal{P}(\boldsymbol{\partial}K_{t-\tau}{*}\cdot\boldsymbol{u}_\tau\boldsymbol{u}_\tau) \qquad {}_{,(t,\boldsymbol{x})\in(0,\infty)\times\boldsymbol{R}^n}$$

$\Phi(0)=0,\Phi(t)>0,\partial_t\Phi(t)=\varphi(t)$ なる関数 $\Phi=\Phi(t)$ を採り、一般に $f^{\Phi}(t,\boldsymbol{x})=f(\Phi(t),\boldsymbol{x})$ とすれば、原解 $\boldsymbol{u}$ に対して時間変換解 $\boldsymbol{u}^{\Phi}$ を定めることができる。このとき原方程式は時間変換解 $\boldsymbol{u}^{\Phi}$ に対する次の時間変換方程式と同値となる。

$$(1.4)\quad \boldsymbol{u}^{\Phi}_t=K^{\Phi}_t{*}\boldsymbol{a}-\int_0^t d\tau\,\mathcal{P}(\boldsymbol{\partial}K^{\Phi}_{t-\tau}{*}\varphi_\tau\cdot\boldsymbol{u}^{\Phi}_\tau\boldsymbol{u}^{\Phi}_\tau)\qquad {,(t,\boldsymbol{x})\in(0,\infty)\times\boldsymbol{R}^n}\qquad []$$

定義 7 (解の線形項と非線形項)

ＮＳＩＶＰ (1.2) の解 $\boldsymbol{u}$ が積分方程式 (1.3) あるいは時間変換積分方程式 (1.4) を満たすとき、解はその方程式に基き右辺の第 1 項と第 2 項の和に分解される。これらを各々、解の線形項 $\boldsymbol{u}^{(L)}$ および非線形項 $\boldsymbol{u}^{(NL)}$ とする。

$$\boldsymbol{u}^{(L)}_t=K_t{*}\boldsymbol{a}\quad,\ \boldsymbol{u}^{(NL)}_t=-\int_0^t d\tau\,\mathcal{P}(\boldsymbol{\partial}K_{t-\tau}{*}\cdot\boldsymbol{u}_\tau\boldsymbol{u}_\tau)$$

$$\boldsymbol{u}^{\Phi(L)}_t=K^{\Phi}_t{*}\boldsymbol{a}\ ,\ \boldsymbol{u}^{\Phi(NL)}_t=-\int_0^t d\tau\,\mathcal{P}(\boldsymbol{\partial}K^{\Phi}_{t-\tau}{*}\varphi_\tau\cdot\boldsymbol{u}^{\Phi}_\tau\boldsymbol{u}^{\Phi}_\tau)\qquad []$$

補題 (核合成積の特性)

核合成積に関して以下の関係式が成立する。但し $K=K^{(\nu)};\nu,\nu_0,\nu_1>0;\,p\in[1,q],q\in(n,\infty]$ とし、φ の平均値 φ_Ω は零であるとする。

$$(1.5)\quad K^{(\nu_0+\nu_1)}=K^{(\nu_0)}{*}K^{(\nu_1)}$$

$$(1.6)\quad \|K{*}\varphi\|_{L^2(\Omega)}\le e^{-C\nu t}\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}\qquad {,\varphi\in L^2}$$

$$(1.7)\quad \|K{*}\varphi\|_{L^q(\Omega)}\le C(\nu t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|\varphi\|_{L^p(\Omega)}\qquad {,\varphi\in L^p}$$

$$(1.8)\quad \|\partial_i K{*}\varphi\|_{L^q(\Omega)}\le C(\nu t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-\frac{1}{2}}\|\varphi\|_{L^p(\Omega)}\qquad {,\varphi\in L^p}\qquad []$$

証明

関係式 (1.5) は、フーリエ変換での関係式 $\mathcal{F}[K^{(\nu_0+\nu_1)}]=\mathcal{F}[K^{(\nu_0)}]\mathcal{F}[K^{(\nu_1)}]$ の成立に依る。

関係式 (1.6) は、ポアンカレ-ビルティンガー不等式等により得られる。$u=K{*}\varphi$ とすれば、以下が成立する。

$$\partial_t u^2=2u\partial_t u=2u(\nu\triangle u+f)=2u\nu\triangle u=2\nu\boldsymbol{\partial}(u\boldsymbol{\partial}u)-2\nu\boldsymbol{\partial}u\boldsymbol{\partial}u$$

$$\partial_t u^2-2\nu\boldsymbol{\partial}(u\boldsymbol{\partial}u)+2\nu\boldsymbol{\partial}u\boldsymbol{\partial}u=0$$

積分により以下を得る。但し、ガウスの公式と u の周期性を用いた。

$$d_t\|u\|^2_{L^2(\Omega)}-2\nu\int_{\partial\Omega}d\boldsymbol{S}\,u\boldsymbol{\partial}u+2\nu\|\boldsymbol{\partial}u\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}=0$$

$$d_t\|u\|^2_{L^2(\Omega)}+2\nu\|\boldsymbol{\partial}u\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}=0$$

ここでポアンカレ-ビルティンガー不等式 $\|f-f_\Omega\|_{L^2(\Omega)}\le C\|\boldsymbol{\partial}f\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}$ および $u_\Omega=0$ より、次の不等式を得る。

$$d_t\|u\|^2_{L^2(\Omega)}+2C^{-2}\nu\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\le 0$$

従って、グロンウォールの不等式により以下を得る。

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\le\|a\|^2_{L^2(\Omega)}e^{-2C^{-2}\nu t}$$

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}\le\|a\|_{L^2(\Omega)}e^{-C^{-2}\nu t}$$

関係式 (1.7)(1.8) の証明のため、次の合成積のノルム評価を利用する。ここでは、分割された周期領域毎に拡張型ヤング不等式の適用を想定する。

$$J{*}f(\boldsymbol{x})=\int_{\boldsymbol{R}^n}dV(\boldsymbol{y})\,J(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})f(\boldsymbol{y})=\sum_{\boldsymbol{l}\in\boldsymbol{\Lambda}}\int_{\boldsymbol{l}+\Omega}dV(\boldsymbol{y})\,J(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})f(\boldsymbol{y})$$

$$\|\,J{*}f\,\|_{L^q(\Omega)}\le\sum_{\boldsymbol{l}\in\boldsymbol{\Lambda}}M_{\boldsymbol{l}}^{\frac{1}{q}}N_{\boldsymbol{l}}^{1-\frac{1}{p}}\|f\|_{L^p(\Omega)}$$

$$M_{\boldsymbol{l}} = \sup_{\boldsymbol{y}\in\Omega}\int_\Omega dV(\boldsymbol{x})\,|\,J(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{l}-\boldsymbol{y})\,|^r = \sup_{\boldsymbol{x}\in\Omega}\int_\Omega dV(\boldsymbol{y})\,|\,J(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{l}-\boldsymbol{x})\,|^r$$
$$N_{\boldsymbol{l}} = \sup_{\boldsymbol{x}\in\Omega}\int_\Omega dV(\boldsymbol{y})\,|\,J(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{l}-\boldsymbol{y})\,|^r$$

特に $J(\boldsymbol{x})$ が空間座標成分毎因子 (積分) の積 $J_1(x_1)\cdots J_n(x_n)$ で与えられる場合、以下が成立つ。

$$M_{\boldsymbol{l}} = \prod_{j=1}^n (M_j)_{l_j}\,,\,(M_j)_{l_j} = \sup_{x_j\in[0,a]}\int_0^a dy_j\,|\,J_j(y_j-l_j-x_j)\,|^r$$
$$N_{\boldsymbol{l}} = \prod_{j=1}^n (N_j)_{l_j}\,,\,(N_j)_{l_j} = \sup_{x_j\in[0,a]}\int_0^a dy_j\,|\,J_j(x_j-l_j-y_j)\,|^r$$
$$\begin{aligned}\|\,J{*}f\,\|_{L^q(\Omega)} &\le \prod_{j=1}^n\Big(\sum_{l_j\in\Lambda_j}(M_j)_{l_j}^{\frac{1}{q}}(N_j)_{l_j}^{1-\frac{1}{p}}\Big)\|f\|_{L^p(\Omega)}\\
&\le \prod_{j=1}^n\Big(\sum_{l_j\in\Lambda_j}(M_j)_{l_j}^{\frac{1}{r}}\Big)^{\frac{r}{q}}\Big(\sum_{l_j\in\Lambda_j}(N_j)_{l_j}^{\frac{1}{r}}\Big)^{r(1-\frac{1}{p})}\|f\|_{L^p(\Omega)}\\
&\le \prod_{j=1}^n\big(2\|J_j\|_{L^r(\boldsymbol{R})}\big)^{\frac{r}{q}}\big(2\|J_j\|_{L^r(\boldsymbol{R})}\big)^{r(1-\frac{1}{p})}\|f\|_{L^p(\Omega)} = \prod_{j=1}^n\big(2\|J_j\|_{L^r(\boldsymbol{R})}\big)\|f\|_{L^p(\Omega)}\\
&= 2^n\|J\|_{L^r(\boldsymbol{R}^n)}\|f\|_{L^p(\Omega)}\end{aligned}$$

以上に対して、特に $J=K$ あるいは $J=\partial_i K$ と採ることに依り、以下を得る。

$$\|\,K{*}f\,\|_{L^q(\Omega)} \le c\|K\|_{L^r(\boldsymbol{R}^n)}\|f\|_{L^p(\Omega)} = C(\nu t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|f\|_{L^p(\Omega)}$$
$$\|\,\partial_i K{*}f\,\|_{L^q(\Omega)} \le c\|\partial_i K\|_{L^r(\boldsymbol{R}^n)}\|f\|_{L^p(\Omega)} = C(\nu t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-\frac{1}{2}}\|f\|_{L^p(\Omega)} \qquad []$$

２. 時間局所可解性

本項ではＮＳＩＶＰの時間局所可解性を示す。これは、先ず積分方程式の時間局所可解性を示し、次いでその解の正則性を示すことにより、証明される。積分方程式の時間局所可解性は、厳縮小型写像の不動点定理を用いて行われる。

命題１ (積分方程式の時間局所可解性)

正変数 ξ に対する減少関数 $TM=TM(\xi)$ が存在し、初期値 $\boldsymbol{a}_{\in\mathcal{P}\boldsymbol{L}^q,\,q\in(n,\infty]}$ で $\boldsymbol{a}_\Omega=\boldsymbol{0}$ なるものに対して、積分方程式 (1.3) は時間区間 $[0,T_M]_{,T_M=TM(\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^q})}$ における解 $\boldsymbol{u}_{\in\boldsymbol{L}^q_{[0,T_M]}}$ で $\boldsymbol{u}_\Omega=\boldsymbol{0}$ なるものを持つ。[]

証明

先ず、以下の写像 Ψ, 集合 S_λ を導入する。但し $t\in[0,T]_{\,,T\in(0,\infty]},\lambda\in(0,\infty)$ とする。

$$\Psi\boldsymbol{f}_t = K_t{*}\boldsymbol{a} - \int_0^t d\tau\,\mathcal{P}(\boldsymbol{\partial}K_{t-\tau}{*}\cdot\boldsymbol{f}_\tau\boldsymbol{f}_\tau)$$
$$S_\lambda = \big\{\boldsymbol{f}_{\in\boldsymbol{L}^q_{[0,T]}}\,\big|\,\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{L}^q_{[0,T]}}\le\lambda,\boldsymbol{f}_\Omega=\boldsymbol{0}\big\}$$

このとき $\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}\in S_\lambda$ に対して以下の評価式を得る。但し $\chi(t)=\nu^{-1}(\nu t)^\beta{}_{,\,\beta=\frac{1}{2}(1-\frac{n}{q})}$ とする。

$$\|\Psi\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{L}^q_t} \le C_1\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^q} + C_2\chi(t)\|\boldsymbol{f}\|^2_{\boldsymbol{L}^q_{[0,T]}}$$
$$\|\Psi\boldsymbol{f}-\Psi\boldsymbol{g}\|_{\boldsymbol{L}^q_t} \le C_2\chi(t)(\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{L}^q_{[0,T]}}+\|\boldsymbol{g}\|_{\boldsymbol{L}^q_{[0,T]}})\|\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g}\|_{\boldsymbol{L}^q_{[0,T]}}$$

ここで、定数 $\Theta_{\in(0,1)}$ を採り、$TM(\xi),T_M;\lambda$ を以下により導入する。

$$TM(\xi)=\Theta\frac{1}{\nu}\Big(\frac{\nu}{4C_1C_2\xi}\Big)^{\frac{1}{\beta}}\,,\qquad T_M=TM(\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^q})$$

$$\lambda = \frac{1}{2C_2\chi(T_M)}\left(1-\sqrt{1-4C_1C_2\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^q}\chi(T_M)}\,\right)$$

このとき、以下が成立つ。

$$\chi(T_M) = \Theta^\beta(4C_1C_2\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^q})^{-1}$$
$$\lambda \le 2C_1\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^q}$$

また、定数 $C_{\,\in(0,1)}$ が存在して、各時刻 $t_{\,\in[0,T_M]}$ に対して次式が成立する。

$$C_1\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^q} + C_2\chi(t)\lambda^2 < \lambda$$
$$2C_2\chi(t)\lambda \le C$$

従って、上記評価式より $\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}_{\,\in S_\lambda}$ に対して以下が成立つ。

$$\Psi\boldsymbol{f} \in S_\lambda$$
$$\|\Psi\boldsymbol{f}-\Psi\boldsymbol{g}\|_{\boldsymbol{L}^q_{[0,T_M]}} \le C\|\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g}\|_{\boldsymbol{L}^q_{[0,T_M]}}$$

即ち、写像 Ψ は集合 S_λ 上の厳縮小写像を与える。

従って、不動点定理に依り、写像 Ψ は集合 S_λ 内に不動点 $\boldsymbol{u}$ を持つ。

このとき $\Psi\boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{u}_{t\ ,t\in[0,T_M]}$ が成立するので、$\boldsymbol{u}$ は時間区間 $[0,T_M]$ における積分方程式 (1.3) の解となる。

そして、以上の議論より以下の関係式が得られ、$\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{L}^q_{[0,T_M]}, \boldsymbol{u}_\Omega = \boldsymbol{0}$ となる。

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^q_{[0,T_M]}} \le 2C_1\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^q}$$
$$\|\boldsymbol{u}^{(NL)}\|_{\boldsymbol{L}^q_{[0,T_M]}} \le C_1\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^q} \qquad []$$

註 (非線形項の上限評価)

上記の議論における $\|\mathcal{P}(\boldsymbol{\partial}K_{t-\tau}*\cdot\boldsymbol{f}_\tau\boldsymbol{f}_\tau)\|_{\boldsymbol{L}^q\ ,q\in(n,\infty]}$ の上限評価は、以下の関係に依る。

$$\|\mathcal{P}_{ij}\partial_kK_{t-\tau}*f_{k\,\tau}f_{j\,\tau}\|_{L^q(\boldsymbol{R}^n)} \le \|\mathcal{P}_{ij}\partial_kK_{t-\tau}\|_{L^Q(\boldsymbol{R}^n)}\|f_{k\,\tau}\|_{L^q(\boldsymbol{R}^n)}\|f_{j\,\tau}\|_{L^q(\boldsymbol{R}^n)}$$
$$\|\mathcal{P}_{ij}\partial_kK\|_{L^Q(\boldsymbol{R}^n)} \le c_Q\left\|\left(1-\frac{\xi_i\xi_j}{\boldsymbol{\xi}^2}\right)\xi_k\hat{K}\right\|_{L^q(\boldsymbol{R}^n)}$$
$$\le 2c_Q\|\xi_k\hat{K}\|_{L^q(\boldsymbol{R}^n)} = C(\nu t)^{-\frac{n}{2}\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}\ {}_{;\,1=\frac{1}{q}+\frac{1}{Q}\ ,\,Q\in[1,2]}$$

但し、$\mathcal{P}_{ij}$ を $\mathcal{P}$ の空間座標成分表示、ξ_k は n 次元フーリエ変換変数の成分、$\hat{K}$ は K のフーリエ変換とし、前者ではヤングの不等式、後者ではハウスドルフ-ヤングの不等式を用いている。[]

命題 2 (積分方程式の時間局所解の正則性)

初期値 $\boldsymbol{a}_{\,\in\mathcal{P}\boldsymbol{L}^q,q\in(n,\infty]}$ に対して命題 1 に基く積分方程式 (1.3) の時間局所解 $\boldsymbol{u}_{\in\mathcal{P}\boldsymbol{L}^q_{[0,T_M]}}$ は、以下の特性 (2.1-4) を有し、正則である。但し、$|\alpha|\ge 1$ とし、(2.2)(2.4) では $q<\infty$ とする。

(2.1) $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{L}^r_{[0,T_M],r\in[2,q]}$

(2.2) $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{L}^r_{(0,T_M],r\in(q,\infty]}$; $\sup_{t\in(0,T_M]} t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^r_t}<\infty$

(2.3) $\partial^\alpha\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{L}^r_{(0,T_M],r\in[2,q]}$; $\sup_{t\in(0,T_M]} t^{\frac{|\alpha|}{2}}\|\partial^\alpha\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^r_t}<\infty$

(2.4) $\partial^\alpha\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{L}^r_{(0,T_M],r\in(q,\infty]}$; $\sup_{t\in(0,T_M]} t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})+\frac{|\alpha|}{2}}\|\partial^\alpha\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^r_t}<\infty$

また、初期値 $\boldsymbol{a}_{\,\in\mathcal{P}\boldsymbol{L}^q,q\in(n,\infty]}, \partial^\alpha\boldsymbol{a}_{\,\in\mathcal{P}\boldsymbol{L}^q,q\in(n,\infty],|\alpha|\le m}$ に対して命題 1 に基く積分方程式 (1.3) の時間局所解 $\boldsymbol{u}_{\in\mathcal{P}\boldsymbol{L}^q_{[0,T_M]}}$ は上記特性 (2.1-4) に加えて次の特性 (2.5) を有する。

(2.5) $\partial^\alpha\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{L}^r_{[0,T_M],r\in[2,q],|\alpha|\le m}$ []

証明

(1) 先ず、特性 (2.1) を示す。

$r \in [2,q]$ とするとき、各時刻 $t_{\in[0,T_M]}$ において次式が成立する。

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^r_t} \le C_1\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^r} + C_2\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^q_{[0,T_M]}}\int_0^t d\tau\,(\nu(t-\tau))^{-\frac{n}{2}\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^r_\tau}$$

ここで、A, X および作用素 $\mathcal{K}$ を以下に依り導入する。但し $t \in (0,T_M]$ とする。

$$A = C_1\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^r}$$
$$X_t = \|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^r_t}$$
$$\mathcal{K}f_t = C_2\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^q_{[0,T_M]}}\int_0^t d\tau\,(\nu(t-\tau))^{-\frac{n}{2}\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}f_\tau$$

このとき、上記の積分関係式は次の関係式で表される。

$$X \le A + \mathcal{K}X$$

この関係式の反復的代入に依り、$k_{\in\boldsymbol{N}}$ に対して次式を得る。

$$X \le \sum_{j=0}^{k}\mathcal{K}^jA + \mathcal{K}^{k+1}X$$

このとき、$j_{\in\boldsymbol{N}}$ に対して各時刻 $t_{\in[0,T_M]}$ において以下が成立する。但し、$B(x,y)$ をベータ関数、$\mathit{\Gamma}(x)$ をガンマ関数とし、$\beta = \dfrac{1}{2}\Big(1-\dfrac{n}{q}\Big)$ とする。

$$\begin{aligned}\mathcal{K}^jA &\le A\big(c_2\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^q_{[0,T_M]}}\nu^{-1}(\nu t)^\beta\big)^j\prod_{k=0}^{j-1}B(\beta,1+k\beta)\\ &\le A\frac{1}{\mathit{\Gamma}(1+j\beta)}\big(C_2\mathit{\Gamma}(\beta)\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^q}\nu^{-1}(\nu t)^\beta\big)^j\end{aligned}$$

$$\mathcal{K}^jX \le \|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^q_{[0,T_M]}}\frac{1}{\mathit{\Gamma}(1+j\beta)}\big(C_2\mathit{\Gamma}(\beta)\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^q}\nu^{-1}(\nu t)^\beta\big)^j$$

ここで $k \to \infty$ に対して $\mathcal{K}^kX \to 0$ となることから、各時刻 $t_{\in[0,T_M]}$ において次式が成立する。

$$X \le U^{(r)}(\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^r},t) < \infty$$
$$U^{(r)}(\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^r},t) = C_1\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^r}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\mathit{\Gamma}(1+j\beta)}\big(C_2\mathit{\Gamma}(\beta)\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^q}\nu^{-1}(\nu t)^\beta\big)^j$$

これは次を与える。

$$\sup_{t\in[0,T_M]}\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^r_t} < \infty$$

以上より、所期の結論が得られた。

(２) 次に、特性 (2.2) を示す。

$r \in (q,\infty]$ のとき、$\mathit{\Phi}(t) = t^\varepsilon{}_{,\,\varepsilon\in(0,(\frac{n}{2}(\frac{2}{q}-\frac{1}{r})+\frac{1}{2})^{-1})}$ とすれば、各変換時刻 $\mathit{\Phi}_{t\,\in(0,T_M]}$ において次式が成立する。

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{u}^{\mathit{\Phi}}\|_{\boldsymbol{L}^r_t} &\le C_1(\nu\mathit{\Phi}_t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^q} + c_2\|\boldsymbol{u}\|^2_{\boldsymbol{L}^q_{[0,T_M]}}\int_0^t d\tau\,(\nu\mathit{\Phi}_{t-\tau})^{-\frac{n}{2}(\frac{2}{q}-\frac{1}{r})-\frac{1}{2}}\varphi_\tau\\ &\le C_1(\nu\mathit{\Phi}_t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^q} + C_2\nu^{-1}(\nu\mathit{\Phi}_t)^{\frac{1}{2}-\frac{n}{2}(\frac{2}{q}-\frac{1}{r})}\|\boldsymbol{a}\|^2_{\boldsymbol{L}^q}\end{aligned}$$

従って、以下が得られる。

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^r_t} \le C_1(\nu t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^q} + C_2\nu^{-1}(\nu t)^{\frac{1}{2}-\frac{n}{2}(\frac{2}{q}-\frac{1}{r})}\|\boldsymbol{a}\|^2_{\boldsymbol{L}^q}$$
$$(\nu t)^{\frac{n}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^r_t} \le C_1\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^q} + C_2\nu^{-1}(\nu t)^{\frac{1}{2}(1-\frac{n}{q})}\|\boldsymbol{a}\|^2_{\boldsymbol{L}^q}$$
$$(\nu t)^{\frac{n}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^r_t} \le U^{(q)}(\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^q})$$

以上に依り所期の結論が得られた。

(3) 次に、特性 (2.3) を示す。

$r \in [2,q]$ の場合、$Q = \min\{q,2r\}, \Phi(t) = t^{\varepsilon}{}_{,\,\varepsilon\in(0,(\frac{n}{2}(\frac{2}{Q}-\frac{1}{r})+\frac{1}{2}+\frac{|\alpha|}{2})^{-1})}$ とすれば、各変換時刻 $\Phi_{t\in(0,T_M]}$ において、以下が成立する。

$$\begin{aligned}
\|\partial^\alpha \boldsymbol{u}^\Phi\|_{\boldsymbol{L}^r_t} &\le C_1(\nu\Phi_t)^{-\frac{|\alpha|}{2}}\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^r} + C_2\|\boldsymbol{u}\|^2_{\boldsymbol{L}^Q_{[0,T_M]}}\int_0^t d\tau\,(\nu\Phi_{t-\tau})^{-\frac{n}{2}(\frac{2}{Q}-\frac{1}{r})-\frac{1}{2}-\frac{|\alpha|}{2}}\varphi_\tau \\
&= C_1(\nu\Phi_t)^{-\frac{|\alpha|}{2}}\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^r} + C_2\nu^{-1}(\nu\Phi_t)^{\frac{1}{2}-\frac{n}{2}(\frac{2}{Q}-\frac{1}{r})-\frac{|\alpha|}{2}}b_\varepsilon\|\boldsymbol{u}\|^2_{\boldsymbol{L}^Q_{[0,T_M]}}
\end{aligned}$$

$$b_\varepsilon = \varepsilon B\Big(1-\varepsilon\Big(\frac{n}{2}\Big(\frac{2}{Q}-\frac{1}{r}\Big)+\frac{1}{2}+\frac{|\alpha|}{2}\Big),\varepsilon\Big)$$

$$\|\partial^\alpha \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^r_t} \le C_1(\nu t)^{-\frac{|\alpha|}{2}}\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^r} + C_2\nu^{-1}(\nu t)^{\frac{1}{2}-\frac{n}{2}(\frac{2}{Q}-\frac{1}{r})-\frac{|\alpha|}{2}}b_\varepsilon\|\boldsymbol{u}\|^2_{\boldsymbol{L}^Q_{[0,T_M]}}$$

$$(\nu t)^{\frac{|\alpha|}{2}}\|\partial^\alpha \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^r_t} \le U^{(r,\alpha)}(\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^r})$$

以上より、所期の結論が得られた。

(4) 次に、特性 (2.4) を示す。

$r \in (q,\infty]$ の場合、$\Phi(t) = t^{\varepsilon}{}_{,\,\varepsilon\in(0,(\frac{n}{2}(\frac{2}{q}-\frac{1}{r})+\frac{1}{2}+\frac{|\alpha|}{2})^{-1})}$ とすれば、各変換時刻 $\Phi_{t\in(0,T_M]}$ において、以下が成立する。

$$\begin{aligned}
\|\partial^\alpha \boldsymbol{u}^\Phi\|_{\boldsymbol{L}^r_t} &\le C_1(\nu\Phi_t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})-\frac{|\alpha|}{2}}\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^q} + c_2\|\boldsymbol{u}\|^2_{\boldsymbol{L}^q_{[0,T_M]}}\int_0^t d\tau\,(\nu\Phi_{t-\tau})^{-\frac{n}{2}(\frac{2}{q}-\frac{1}{r})-\frac{1}{2}-\frac{|\alpha|}{2}}\varphi_\tau \\
&\le C_1(\nu\Phi_t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})-\frac{|\alpha|}{2}}\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^q} + C_2\nu^{-1}(\nu\Phi_t)^{\frac{1}{2}-\frac{n}{2}(\frac{2}{q}-\frac{1}{r})-\frac{|\alpha|}{2}}b_\varepsilon\|\boldsymbol{a}\|^2_{\boldsymbol{L}^q}
\end{aligned}$$

$$b_\varepsilon = \varepsilon B\Big(1-\varepsilon\Big(\frac{n}{2}(\frac{2}{q}-\frac{1}{r})+\frac{1}{2}+\frac{|\alpha|}{2}\Big),\varepsilon\Big)$$

$$\|\partial^\alpha \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^r_t} \le C_1(\nu t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})-\frac{|\alpha|}{2}}\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^q} + C_2\nu^{-1}(\nu t)^{\frac{1}{2}-\frac{n}{2}(\frac{2}{q}-\frac{1}{r})-\frac{|\alpha|}{2}}b_\varepsilon\|\boldsymbol{a}\|^2_{\boldsymbol{L}^q}$$

$$(\nu t)^{\frac{n}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})+\frac{|\alpha|}{2}}\|\partial^\alpha \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^r_t} \le U^{(q,\alpha)}(\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^q})$$

以上より、所期の結論が得られた。

(5) 最後に、特性 (2.5) を示す。

本項では $k = 1,\dots,m$ に対する $(2.5)_{|\alpha|\le k}$ を帰納的に証明する。$k=1$ の場合、$|\alpha|=1$ なる α に対して次式が成立する。

$$\|\partial^\alpha \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^r_t} \le C_1\|\partial^\alpha \boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^r} + C_2\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^q_{[0,T_M]}}\int_0^t d\tau\,(\nu(t-\tau))^{-\frac{n}{2}\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}\|\partial^\alpha \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^r_\tau}$$

ここで、A, X および作用素 $\mathcal{K}$ を各時刻 $t_{\in(0,T_M]}$ に対して以下に依り導入する。

$$A = C_1\|\partial^\alpha \boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^r}$$

$$X_t = \|\partial^\alpha \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^r_t}$$

$$\mathcal{K}f_t = C_2\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^q_{[0,T_M]}}\int_0^t d\tau\,(\nu(t-\tau))^{-\frac{n}{2}\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}f_\tau$$

このとき、(1) と同様の議論に依り、$|\alpha|=1$ なる α に対する次の結果が得られる。

$$\sup_{t\in[0,T_M]}\|\partial^\alpha \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^r_t} < \infty$$

従って $(2.5)_{|\alpha|=1}$ が成立する。

次に $(2.5)_{|\alpha|\le k\le m-1}$ が成立しているとき、$|\alpha| = k+1$ なる α に対して、次式が成立する。但し、式中の β,γ に関する和は $\beta+\gamma=\alpha;\ |\beta|,|\gamma|\le k$ なる範囲に亘るものとする。

$$\|\partial^\alpha \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^r_t} \le C_1\|\partial^\alpha \boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^r} + C_2\sum_{\beta,\gamma}c_{\beta,\gamma}\|\partial^\beta \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^q_{[0,T_M]}}\int_0^t d\tau\,(\nu(t-\tau))^{-\frac{n}{2}\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}\|\partial^\gamma \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^r_\tau}$$

$$+C_2\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^q_{[0,T_M]}}\int_0^t d\tau\,(\nu(t-\tau))^{-\frac{n}{2}\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}\|\partial^\alpha\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^r_\tau}$$

ここで、A, X および作用素 $\mathcal{K}$ を各時刻 $t_{\in(0,T_M]}$ に対して以下に依り導入する。

$$A = C_1\|\partial^\alpha\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^r} + C_2\sum_{\beta,\gamma}c_{\beta,\gamma}\|\partial^\beta\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^q_{[0,T_M]}}\int_0^t d\tau\,(\nu(t-\tau))^{-\frac{n}{2}\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}\|\partial^\gamma\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^r_\tau}$$

$$X_t = \|\partial^\alpha\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^r_t}$$

$$\mathcal{K}f_t = C_2\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^q_{[0,T_M]}}\int_0^t d\tau\,(\nu(t-\tau))^{-\frac{n}{2}\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}f_\tau$$

このとき、(1) と同様の議論に依り、$|\alpha| = k+1$ なる α に対する次の結果が得られる。

$$\sup_{t\in[0,T_M]}\|\partial^\alpha\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^r_t} < \infty$$

従って $(2.5)_{|\alpha|=k+1}$ が成立する。

以上に依り所期の結論が得られた。 []

定理１ (ＮＳＩＶＰの時間局所可解性)

ＮＳＩＶＰ (1.2) は時間局所解をもつ。 []

証明

命題１, **命題２**より、積分方程式 (1.3) は任意階偏微分可能な時間局所解をもつ。このとき、積分方程式 (1.3) は次の積分方程式と同値となる。

$$\boldsymbol{u}_t = K_t{*}\boldsymbol{a} - \int_0^t d\tau\,K_{t-\tau}{*}\mathcal{P}((\boldsymbol{u}_\tau{\cdot}\boldsymbol{\partial})\boldsymbol{u}_\tau)$$

従って、この積分方程式は任意階偏微分可能な時間局所解をもつ。このとき、この積分方程式は、ＮＳＩＶＰ (1.2) と同値となる。従って、ＮＳＩＶＰ (1.2) は時間局所解をもつ。 []

３. 先験的評価

本項ではＮＳＩＶＰに対する先験的評価を与える。これは、エネルギー減衰性に対応する。

命題３ (エネルギー減衰性)

初期値 (1.1) に対応するＮＳＩＶＰ (1.2) の時間局所解 $\boldsymbol{u}_{\in\mathcal{P}\boldsymbol{L}^q_{[0,T_M]}}$ に対して次の先験的評価が成立する。

(3.1) $\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^2} \le e^{-C\nu t}\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^2}$ []

証明

ＮＳＩＶＰの初期値 $\boldsymbol{a}$ に対応する解 $\boldsymbol{u}$ は以下の関係式を満たす。但し $t\in[0,T_M]$ とする。

$$\partial_t\boldsymbol{u}^2 = -2\nu\boldsymbol{\partial u\partial u} + 2\nu\boldsymbol{\partial}(\boldsymbol{u}\ \cdot\boldsymbol{\partial u}) - \boldsymbol{\partial}\Big(\cdot\boldsymbol{u}\Big(\boldsymbol{u}^2+\frac{2}{\rho}p\Big)\Big)\ \ ,\ \boldsymbol{\partial u\partial u} = \sum_{i,j}\partial_i u_j\partial_i u_j$$

$$d_t\|\boldsymbol{u}\|^2_{\boldsymbol{L}^2} + 2\nu\|\boldsymbol{\partial u}\|^2_{\boldsymbol{L}^2} = 0$$

$$d_t\|\boldsymbol{u}\|^2_{\boldsymbol{L}^2} + 2C\nu\|\boldsymbol{u}\|^2_{\boldsymbol{L}^2} \le 0$$

これより、グロンウォールの不等式に基き、(3.1) を得る。 []

命題４ (解の上限評価)

初期値 (1.1) に対応するＮＳＩＶＰ (1.2) の時間局所解 $\boldsymbol{u}_{\in\mathcal{P}\boldsymbol{L}^q_{[0,T_M]}}$ の $\boldsymbol{L}^r_{t\,,r\in[2,\infty]}$ ノルムに対して、以下の先験的評価式が成立する。但し、$\nu = \nu_0 + \nu_{1,\,\nu_0,\nu_1>0}$ とする。

(3.2) $\|\boldsymbol{u}^{(L)}\|_{\boldsymbol{L}^r} \le C_0(\nu_0 t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})}e^{-C_2\nu_1 t}\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^2}$

$\|\boldsymbol{u}^{(NL)}\|_{\boldsymbol{L}^r} \le C_1\nu_0^{-1}(\nu_0 t)^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{r})+\frac{1}{2}}e^{-C_2\nu_1 t}\|\boldsymbol{a}\|^2_{\boldsymbol{L}^2}$

(3.3) $\|\partial^\alpha\boldsymbol{u}^{(L)}\|_{\boldsymbol{L}^r} \le C_0(\nu_0 t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})-\frac{|\alpha|}{2}}e^{-C_2\nu_1 t}\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^2}$

$$\|\partial^\alpha \boldsymbol{u}^{(NL)}\|_{\boldsymbol{L}^r} \le C_1\nu_0^{-1}(\nu_0 t)^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{r})+\frac{1}{2}-\frac{|\alpha|}{2}} e^{-C_2\nu_1 t}\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^2} ^2 \qquad []$$

証明

補題より以下を得る。

$$\begin{aligned}
&\|\, K^{(\nu)} * \boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^r} = \|\, K^{(\nu_0)} * K^{(\nu_1)} * \boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^r} \\
&\quad \le c_0(\nu_0 t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})}\|K^{(\nu_1)}*\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^2} \le c_0(\nu_0 t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})}e^{-C_2\nu_1 t}\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^2} \\
&\|\, \partial^\alpha K^{(\nu)} * \boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^r} = \|\, \partial^\alpha K^{(\nu_0)} * K^{(\nu_1)} * \boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^r} \\
&\quad \le c_0(\nu_0 t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})-\frac{|\alpha|}{2}}\|K^{(\nu_1)}*\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^2} \le c_0(\nu_0 t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})-\frac{|\alpha|}{2}}e^{-C_2\nu_1 t}\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^2}
\end{aligned}$$

また、補題, 命題３より以下を得る。但し $\nu_2 = \dfrac{1}{2}\nu_0$ とする。

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{P}(\boldsymbol{\partial} K^{(\nu)\,\Phi}_{t-\tau} *\cdot \boldsymbol{u}^\Phi_\tau \boldsymbol{u}^\Phi_\tau)\|_{\boldsymbol{L}^r} \le c(\nu_2\Phi_{t-\tau})^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})-\frac{1}{2}}\|K^{(\nu-\nu_2)\,\Phi}_{t-\tau} *\cdot \boldsymbol{u}^\Phi_\tau \boldsymbol{u}^\Phi_\tau\|_{\boldsymbol{L}^2} \\
&\quad \le c(\nu_2\Phi_{t-\tau})^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})-\frac{1}{2}}e^{-C_2\nu_1\Phi_{t-\tau}}\|K^{(\nu_2)\,\Phi}_{t-\tau} *\cdot \boldsymbol{u}^\Phi_\tau \boldsymbol{u}^\Phi_\tau\|_{\boldsymbol{L}^2} \\
&\quad \le c(\nu_2\Phi_{t-\tau})^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})-\frac{1}{2}}e^{-C_2\nu_1\Phi_{t-\tau}}(\nu_2\Phi_{t-\tau})^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{2})}\|\cdot \boldsymbol{u}^\Phi_\tau \boldsymbol{u}^\Phi_\tau\|_{\boldsymbol{L}^1} \\
&\quad = c_1(\nu_0\Phi_{t-\tau})^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{r})-\frac{1}{2}}e^{-C_2\nu_1\Phi_{t-\tau}}\|\boldsymbol{u}^\Phi_\tau\|^2_{\boldsymbol{L}^2} \\
&\quad \le c_1(\nu_0\Phi_{t-\tau})^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{r})-\frac{1}{2}}e^{-C_2\nu_1\Phi_{t-\tau}}e^{-2C_2\nu\Phi_\tau}\|\boldsymbol{a}\|^2_{\boldsymbol{L}^2} \\
&\quad \le c_1(\nu_0\Phi_{t-\tau})^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{r})-\frac{1}{2}}e^{-C_2\nu_1\Phi_t}e^{-C_2(\nu+\nu_0)\Phi_\tau}\|\boldsymbol{a}\|^2_{\boldsymbol{L}^2} \\
&\|\boldsymbol{u}^{(NL)\Phi}_t\|_{\boldsymbol{L}^r} \le c_1 e^{-C_2\nu_1\Phi_t}\|\boldsymbol{a}\|^2_{\boldsymbol{L}^2}\int_0^t d\tau\,(\nu_0\Phi_{t-\tau})^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{r})-\frac{1}{2}}e^{-C_2(\nu+\nu_0)\Phi_\tau} \\
&\quad \le C_1\nu_0^{-1}(\nu_0\Phi_t)^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{r})+\frac{1}{2}}e^{-C_2\nu_1\Phi_t}\|\boldsymbol{a}\|^2_{\boldsymbol{L}^2} \\
&\|\mathcal{P}(\partial^\alpha\boldsymbol{\partial} K^{(\nu)\,\Phi}_{t-\tau} *\cdot \boldsymbol{u}^\Phi_\tau \boldsymbol{u}^\Phi_\tau)\|_{\boldsymbol{L}^r} \le c(\nu_2\Phi_{t-\tau})^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})-\frac{1}{2}-\frac{|\alpha|}{2}}\|K^{(\nu-\nu_2)\,\Phi}_{t-\tau} *\cdot \boldsymbol{u}^\Phi_\tau \boldsymbol{u}^\Phi_\tau\|_{\boldsymbol{L}^2} \\
&\quad \le c(\nu_2\Phi_{t-\tau})^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})-\frac{1}{2}-\frac{|\alpha|}{2}}e^{-C_2\nu_1\Phi_{t-\tau}}\|K^{(\nu_2)\,\Phi}_{t-\tau} *\cdot \boldsymbol{u}^\Phi_\tau \boldsymbol{u}^\Phi_\tau\|_{\boldsymbol{L}^2} \\
&\quad \le c(\nu_2\Phi_{t-\tau})^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})-\frac{1}{2}-\frac{|\alpha|}{2}}e^{-C_2\nu_1\Phi_{t-\tau}}(\nu_2\Phi_{t-\tau})^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{2})}\|\cdot \boldsymbol{u}^\Phi_\tau \boldsymbol{u}^\Phi_\tau\|_{\boldsymbol{L}^1} \\
&\quad = c_1(\nu_0\Phi_{t-\tau})^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{r})-\frac{1}{2}-\frac{|\alpha|}{2}}e^{-C_2\nu_1\Phi_{t-\tau}}\|\boldsymbol{u}^\Phi_\tau\|^2_{\boldsymbol{L}^2} \\
&\quad \le c_1(\nu_0\Phi_{t-\tau})^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{r})-\frac{1}{2}-\frac{|\alpha|}{2}}e^{-C_2\nu_1\Phi_{t-\tau}}e^{-2C_2\nu\Phi_\tau}\|\boldsymbol{a}\|^2_{\boldsymbol{L}^2} \\
&\quad \le c_1(\nu_0\Phi_{t-\tau})^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{r})-\frac{1}{2}}e^{-C_2\nu_1\Phi_t}e^{-C_2(\nu+\nu_0)\Phi_\tau}\|\boldsymbol{a}\|^2_{\boldsymbol{L}^2} \\
&\|\partial^\alpha\boldsymbol{u}^{(NL)\Phi}_t\|_{\boldsymbol{L}^r} \le c_1 e^{-C_2\nu_1\Phi_t}\|\boldsymbol{a}\|^2_{\boldsymbol{L}^2}\int_0^t d\tau\,(\nu_0\Phi_{t-\tau})^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{r})-\frac{1}{2}-\frac{|\alpha|}{2}}e^{-C_2(\nu+\nu_0)\Phi_\tau} \\
&\quad \le C_1\nu_0^{-1}(\nu_0\Phi_t)^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{r})+\frac{1}{2}-\frac{|\alpha|}{2}}e^{-C_2\nu_1\Phi_t}\|\boldsymbol{a}\|^2_{\boldsymbol{L}^2} \qquad []
\end{aligned}$$

４. 時間大域可解性解析

命題５ (ＮＳＩＶＰの時間大域可解性)

初期値 (1.1) に対応するＮＳＩＶＰ (1.2) に関して以下が成立つ。

(１) 時間局所解 $\boldsymbol{u}_{\in\mathcal{P}\boldsymbol{L}^q_{[0,T]}}$ に対し、延長時間 $\Delta T = \Delta T(\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^2}, T)$ と延長時間局所解 $\boldsymbol{u}_{\in\mathcal{P}\boldsymbol{L}^q_{[0,T+\Delta T]}}$ が存在する。ここで $\Delta T(\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^2}, T)$ は T の増加関数となる。

(２) 時間大域解 $\boldsymbol{u}$ を持つ。これは $\boldsymbol{u}\in\mathcal{P}\boldsymbol{L}^q_{[0,\infty)}\cap\mathcal{P}\boldsymbol{L}^\infty_{(0,\infty)}, \partial^\alpha\boldsymbol{u}\in\mathcal{P}\boldsymbol{L}^\infty_{(0,\infty)}$ を満たす。[]

証明

(１) は以下に依る。

有限時間区間における解 $\boldsymbol{u}_{t,t\in(0,T]}$ の終点を改めて初期時刻として、終点における解を改めて初期値とし、改めて延長時間領域での可解性解析 (命題１) を行うことに依り、延長解の存在が分る。延長解の $t=T$ での先験的評価 $\|\boldsymbol{u}_T\|_{\boldsymbol{L}^q} \le U_2^{(q)}(\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^2}, T)_{,q\in(n,\infty]}$(命題４) から、延長解の存在時間に対して $\Delta T \ge TM(U_2^{(q)}(\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^2}, T))$ が成立する。$U_2^{(q)}(\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^2}, t)$ が t の減少関数であり、

$TM(\xi)$ が ξ の減少関数であることから、$TM(U_2^{(q)}(\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^2}, T))$ は T の増加関数となる。
（2）は以下に依る。
ＮＳＩＶＰが時間局所可解 (命題１) であること、そして、その有限時間区間での解が延長可能であること (上記（1）)、その延長時間が時間区間長に対して増加性であること (上記（1）) から、解の延長の反復に依り、任意に長い時間区間に対する解が存在することが分る。従ってＮＳＩＶＰは時間大域可解である。
そして、(命題２) より、$\boldsymbol{u} \in \mathcal{P}\boldsymbol{L}^q_{[0,\infty)} \cap \mathcal{P}\boldsymbol{L}^\infty_{(0,\infty)}, \partial^\alpha \boldsymbol{u} \in \mathcal{P}\boldsymbol{L}^\infty_{(0,\infty)}$ が分る。[]
命題６ (ＮＳＩＶＰの解の漸近減衰性および時間大域的有界性)
初期値 (1.1) に対応するＮＳＩＶＰ (1.2) の時間大域解 $\boldsymbol{u}$ に関して、以下が成立する。
(1) 漸近減衰性
解 $\boldsymbol{u}$ およびその空間変数偏導関数は、以下の $t \to \infty$ に対する漸近減衰性を有する。

(4.1) $\|\boldsymbol{u}^{(L)}\|_{\boldsymbol{L}^r_t} = O(t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})} e^{-C_2\nu_1 t})$ $_{,r\in[2,\infty]}$

$\|\boldsymbol{u}^{(NL)}\|_{\boldsymbol{L}^r_t} = O(t^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{r})+\frac{1}{2}} e^{-C_2\nu_1 t})$ $_{,r\in[2,\infty]}$

(4.2) $\|\partial^\alpha \boldsymbol{u}^{(L)}\|_{\boldsymbol{L}^r_t} = O(t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})-\frac{|\alpha|}{2}} e^{-C_2\nu_1 t})$ $_{,r\in[2,\infty]}$

$\|\partial^\alpha \boldsymbol{u}^{(NL)}\|_{\boldsymbol{L}^r_t} = O(t^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{r})+\frac{1}{2}-\frac{|\alpha|}{2}} e^{-C_2\nu_1 t})$ $_{,r\in[2,\infty]}$

(2) 時間大域的有界性
解 $\boldsymbol{u}$ は、次の時間大域的有界性を有する。

(4.3) $\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^r_{[0,\infty)}} < \infty$ $_{,r\in[2,q]}$ []

証明
(1) 漸近減衰性
命題５に加え、(4.1) は (3.2) に、(4.2) は (3.3) に依る。
(2) 時間大域的有界性
命題１の証明より $\|\boldsymbol{u}^{(NL)}\|_{\boldsymbol{L}^q} \le C\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^q, t\in[0,T_M]}$、また命題３より $\|\boldsymbol{u}^{(NL)}\|_{\boldsymbol{L}^2} = \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^{(L)}\|_{\boldsymbol{L}^2}$ $\le \|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^2} + \|\boldsymbol{u}^{(L)}\|_{\boldsymbol{L}^2} \le 2\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^2, t\in[0,T_M]}$ となり、これらの補間により次を得る。

$$\|\boldsymbol{u}^{(NL)}\|_{\boldsymbol{L}^r} \le C_1^{(r)} \|\boldsymbol{a}\|^{\theta_q}_{\boldsymbol{L}^q} \|\boldsymbol{a}\|^{\theta_2}_{\boldsymbol{L}^2} {}_{,\theta_q = \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{r}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}, \theta_2 = \frac{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}, t\in[0,T_M], r\in[2,q]}$$

他方、命題５と命題４より次を得る。

$$\|\boldsymbol{u}^{(NL)}\|_{\boldsymbol{L}^r} \le c_2^{(r)} \nu^{-1} (\nu t)^{-\gamma} \|\boldsymbol{a}\|^2_{\boldsymbol{L}^2} \le c_2^{(r)} \nu^{-1} (\nu T_M)^{-\gamma} \|\boldsymbol{a}\|^2_{\boldsymbol{L}^2, t\in[T_M,\infty), r\in[2,q]}$$

以上に加え、命題１の $TM(\xi)$ の表式を用いれば、以下を得る。

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{u}^{(NL)}\|_{\boldsymbol{L}^r} &\le \max\{C_1^{(r)} \|\boldsymbol{a}\|^{\theta_q}_{\boldsymbol{L}^q} \|\boldsymbol{a}\|^{\theta_2}_{\boldsymbol{L}^2}, c_2^{(r)} \nu^{-1} (\nu T_M)^{-\gamma} \|\boldsymbol{a}\|^2_{\boldsymbol{L}^2}\} \\ &\le \max\{C_1^{(r)} \|\boldsymbol{a}\|^{\theta_q}_{\boldsymbol{L}^q} \|\boldsymbol{a}\|^{\theta_2}_{\boldsymbol{L}^2}, C_2^{(r)} \nu^{-1-\gamma_\beta} \|\boldsymbol{a}\|^{\gamma_\beta}_{\boldsymbol{L}^q} \|\boldsymbol{a}\|^2_{\boldsymbol{L}^2}\}_{,\gamma_\beta = \frac{\gamma}{\beta}}\end{aligned}$$

これより (4.3) を得る。
命題７ (ＮＳＩＶＰの解の初期値一様連続依存性および一意性)
初期値 (1.1) に対応するＮＳＩＶＰ (1.2) の時間大域解は、初期値に対して一様連続的に依存し、また $\boldsymbol{a}$ に対して一意である。[]
証明
ＮＳＩＶＰの２つの初期値 $\boldsymbol{a}^{(1)}, \boldsymbol{a}^{(2)}{}_{\in\mathcal{P}\boldsymbol{L}^q}$ に対応する解を $\boldsymbol{u}^{(1)}, \boldsymbol{u}^{(2)}$ とする。$r_{\in[2,q]}$ に対し、$t \in [0, T_M]$ において以下が成立する。

$$\boldsymbol{u}^{(1)}_t - \boldsymbol{u}^{(2)}_t = K_t * (\boldsymbol{a}^{(1)} - \boldsymbol{a}^{(2)}) - \int_0^t d\tau\, \mathcal{P}\boldsymbol{\partial} K_{t-\tau} * (\cdot \boldsymbol{u}^{(1)}_\tau \boldsymbol{u}^{(1)}_\tau - \cdot \boldsymbol{u}^{(2)}_\tau \boldsymbol{u}^{(2)}_\tau)$$

$$\|\boldsymbol{u}^{(1)}-\boldsymbol{u}^{(2)}\|_{\boldsymbol{L}_t^r}\le C_1\|\boldsymbol{a}^{(1)}-\boldsymbol{a}^{(2)}\|_{\boldsymbol{L}^r}$$
$$+C_2(\|\boldsymbol{u}^{(1)}\|_{\boldsymbol{L}^q_{[0,T_M]}}+\|\boldsymbol{u}^{(2)}\|_{\boldsymbol{L}^q_{[0,T_M]}})\int_0^t d\tau\,(\nu(t-\tau))^{-\frac{n}{2}\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{u}^{(1)}-\boldsymbol{u}^{(2)}\|_{\boldsymbol{L}_\tau^r}$$
これより、命題２（１）と同様の議論から、$t\in[0,T_M]$ において以下が成立する。
$$\|\boldsymbol{u}^{(1)}-\boldsymbol{u}^{(2)}\|_{\boldsymbol{L}_t^r}\le C_1\|\boldsymbol{a}^{(1)}-\boldsymbol{a}^{(2)}\|_{\boldsymbol{L}^r}U^{(r)}(t)$$
$$\sup_{t\in[0,T_M]}\|\boldsymbol{u}^{(1)}-\boldsymbol{u}^{(2)}\|_{\boldsymbol{L}_t^r}\le C_1\|\boldsymbol{a}^{(1)}-\boldsymbol{a}^{(2)}\|_{\boldsymbol{L}^r}U^{(r)}(T_M)$$
$$U^{(r)}(t)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(1+j\beta)}\big(C_2\Gamma(\beta)(\|\boldsymbol{u}^{(1)}\|_{\boldsymbol{L}^q_{[0,T_M]}}+\|\boldsymbol{u}^{(2)}\|_{\boldsymbol{L}^q_{[0,T_M]}})\nu^{-1}(\nu t)^{\beta}\big)^j$$
他方、$r\in[2,q]$ とするとき、命題４と同様の議論に基き、$t>0$ において以下が成立する。
$$\|\boldsymbol{u}_t^{(1)\Phi}-\boldsymbol{u}_t^{(2)\Phi}\|_{\boldsymbol{L}^r}\le C_1(\nu\Phi_t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})}\|\boldsymbol{a}^{(1)}-\boldsymbol{a}^{(2)}\|_{\boldsymbol{L}^2}$$
$$+c_2(\|\boldsymbol{a}^{(1)}\|_{\boldsymbol{L}^2}+\|\boldsymbol{a}^{(2)}\|_{\boldsymbol{L}^2})\int_0^t d\tau\,(\nu\Phi_{t-\tau})^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{r})-\frac{1}{2}}\varphi_\tau\|\boldsymbol{a}^{(1)}-\boldsymbol{a}^{(2)}\|_{\boldsymbol{L}^2}$$
$$\le C_1(\nu\Phi_t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})}\|\boldsymbol{a}^{(1)}-\boldsymbol{a}^{(2)}\|_{\boldsymbol{L}^2}$$
$$+C_2\nu^{-1}(\nu\Phi_t)^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{r})+\frac{1}{2}}(\|\boldsymbol{a}^{(1)}\|_{\boldsymbol{L}^2}+\|\boldsymbol{a}^{(2)}\|_{\boldsymbol{L}^2})\|\boldsymbol{a}^{(1)}-\boldsymbol{a}^{(2)}\|_{\boldsymbol{L}^2}$$
$$\|\boldsymbol{u}^{(1)}-\boldsymbol{u}^{(2)}\|_{\boldsymbol{L}_t^r}\le\|\boldsymbol{a}^{(1)}-\boldsymbol{a}^{(2)}\|_{\boldsymbol{L}^2}U_2^{(r)}(t)$$
これより、$t\in[T_M,\infty)$ において次を得る。
$$\sup_{t\in[T_M,\infty)}\|\boldsymbol{u}^{(1)}-\boldsymbol{u}^{(2)}\|_{\boldsymbol{L}_t^r}\le\|\boldsymbol{a}^{(1)}-\boldsymbol{a}^{(2)}\|_{\boldsymbol{L}^2}U_2^{(r)}(T_M)$$
以上に依り、次を得る。
$$\sup_{t\in[0,\infty)}\|\boldsymbol{u}^{(1)}-\boldsymbol{u}^{(2)}\|_{\boldsymbol{L}_t^r}\le\|\boldsymbol{a}^{(1)}-\boldsymbol{a}^{(2)}\|_{\boldsymbol{L}^r}\max\{U^{(r)}(T_M),U_2^{(r)}(T_M)\}$$
従って、$\|\boldsymbol{a}^{(1)}-\boldsymbol{a}^{(2)}\|_{\boldsymbol{L}^r}\to 0$ に対して $\sup_{t\in[0,\infty)}\|\boldsymbol{u}^{(1)}-\boldsymbol{u}^{(2)}\|_{\boldsymbol{L}_t^r}\to 0$ となる。即ち、解は初期値に一様連続的に依存する。
上記の議論で $\boldsymbol{a}^{(1)}=\boldsymbol{a}^{(2)}$ とすれば $\boldsymbol{u}^{(1)}=\boldsymbol{u}^{(2)}$ が得られる。即ち解は初期値に対して一意となる。[]

５. 一般平均値問題

前項迄の主要部では初期関数や解の平均値が零の場合を扱ったが、本項では初期関数や解の平均値が一般の定値 $\boldsymbol{c}_{\in\boldsymbol{R}^n}$ となる場合を扱う。
即ち、初期関数 $\boldsymbol{a}^{\#}$ と解 $\boldsymbol{u}^{\#}$ が以下の条件 (5.1)(5.2) を満たすとする初期値問題を考える。

(5.1) $\boldsymbol{a}^{\#}\in\mathcal{P}\boldsymbol{L}^q$, $\partial^\alpha\boldsymbol{a}^{\#}\in\boldsymbol{L}^q{}_{;\,q\in(n,\infty];\,|\alpha|=1,\dots,m}$
$\boldsymbol{a}^{\#}_\Omega=\boldsymbol{c}$

(5.2) $\boldsymbol{u}^{\#}\in\mathcal{P}\boldsymbol{L}^q_{(0,\infty)}$
$$\partial_t\boldsymbol{u}^{\#}-\nu\triangle\boldsymbol{u}^{\#}+(\boldsymbol{u}^{\#}\cdot\boldsymbol{\partial})\boldsymbol{u}^{\#}+\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\partial}p=\boldsymbol{0}\qquad{}_{,(t,\boldsymbol{x})\in(0,\infty)\times\boldsymbol{R}^n}$$
$$\boldsymbol{u}^{\#}(0,\boldsymbol{x})=\boldsymbol{a}^{\#}(\boldsymbol{x})\qquad{}_{,\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n}$$
$$\boldsymbol{u}^{\#}_\Omega=\boldsymbol{c}\qquad{}_{,t\in(0,\infty)}$$
この問題の解の時間大域的存在や特性に関しては、方程式の変換に依り、主要部に準じた議論が可能となる。即ち、$\widetilde{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{u}^{\#}-\boldsymbol{c},\widetilde{\boldsymbol{a}}=\boldsymbol{a}^{\#}-\boldsymbol{c}$ とすれば、初期関数 $\widetilde{\boldsymbol{a}}$ と解 $\widetilde{\boldsymbol{u}}$ が以下の条件 (5.1)˜(5.2)˜ を満たすとする初期値問題となる。

(5.1)˜ $\widetilde{\boldsymbol{a}}\in\mathcal{P}\boldsymbol{L}^q$, $\partial^\alpha\widetilde{\boldsymbol{a}}\in\boldsymbol{L}^q{}_{;\,q\in(n,\infty];\,|\alpha|=1,\dots,m}$

$$\widetilde{\boldsymbol{a}}_\Omega = \mathbf{0}$$

(5.2)̃ $\widetilde{\boldsymbol{u}} \in \mathcal{P}\boldsymbol{L}^q_{(0,\infty)}$

$$\partial_t \widetilde{\boldsymbol{u}} - \nu\triangle\widetilde{\boldsymbol{u}} + (\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{\partial})\widetilde{\boldsymbol{u}} + (\widetilde{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{\partial})\widetilde{\boldsymbol{u}} + \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\partial}p = \mathbf{0} \qquad {}_{,(t,\boldsymbol{x})\in(0,\infty)\times\boldsymbol{R}^n}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{u}}(0,\boldsymbol{x}) = \widetilde{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) \qquad {}_{,\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{u}}_\Omega = \mathbf{0} \qquad {}_{,t\in(0,\infty)}$$

この方程式は、ＮＳ方程式と比較して線形１階の空間偏微分項が含まれる点で異なる。これに対応して、熱核 $K^{(\nu)}$ の代りに、全空間 $\boldsymbol{R}^n$ での線形方程式 $\partial_t f - \nu\triangle f + (\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{\partial})f = 0$ の初期値問題に対応する次式の核 $\widetilde{K}^{(\nu)}$ を導入する。

$$\widetilde{K}^{(\nu)}(t,\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}^{\,n}} \exp\Big(-\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}t)^2}{4\nu t} \Big)$$

次の積分方程式 (5.3) は、解の偏導関数が存在する場合、初期値問題 (5.1)̃(5.2)̃ と同値となる。

(5.3) $$\widetilde{\boldsymbol{u}}_t = \widetilde{K}_t * \widetilde{\boldsymbol{a}} - \int_0^t d\tau\, \mathcal{P}(\boldsymbol{\partial}\widetilde{K}_{t-\tau} *\cdot \widetilde{\boldsymbol{u}}_\tau \widetilde{\boldsymbol{u}}_\tau) \qquad {}_{,(t,\boldsymbol{x})\in(0,\infty)\times\boldsymbol{R}^n}$$

核 $\widetilde{K}$ は熱核 K と同様の特性を有し、特に $\|\widetilde{K}\|_{L^q_t(\boldsymbol{R}^n)} = \|K\|_{L^q_t(\boldsymbol{R}^n)}, \|\partial^\alpha\widetilde{K}\|_{L^q_t(\boldsymbol{R}^n)} = \|\partial^\alpha K\|_{L^q_t(\boldsymbol{R}^n)\,,q\in[1,\infty]}$ が成立する。これより、概ね本論の (1.6)(1.7)(1.8) 以降と同様の議論が可能となり、この問題が次の形の時間大域解をもつことが分る。

$$\boldsymbol{u}^{\#} = \boldsymbol{c} + \widetilde{\boldsymbol{u}}^{(L)} + \widetilde{\boldsymbol{u}}^{(NL)}$$

他方、主要部での解 $\boldsymbol{u}$ と本項の解 $\boldsymbol{u}^{\#}$ に対して、次の関係式が成立する。

(5.4) $$\boldsymbol{u}^{\#}(t,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}t)$$

これは、以下に依り証明される。

$$\begin{aligned}(\partial_t - \nu\triangle)\boldsymbol{u}^{\#}(t,\boldsymbol{x}) &= (\partial_t - \nu\triangle)\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}t) - (\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{\partial})\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}t)\\ &= -((\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}t)+\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{\partial})\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}t) - \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\partial}p\\ &= -(\boldsymbol{u}^{\#}(t,\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\partial})\boldsymbol{u}^{\#}(t,\boldsymbol{x}) - \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\partial}p\end{aligned}$$

関係式 (5.4) の利用に依り、既述問題の解の存在から、本項の問題の解の存在が自動的に得られる。

６. 初期値境界値問題

前項では、平均値 $\boldsymbol{a}_\Omega$ をもつ初期値 $\boldsymbol{a}$ に対して、その平均値 $\boldsymbol{a}_\Omega$ に収束する解をもつ問題を扱ったが、本項では、初期値 $\boldsymbol{a}$ と解 $\boldsymbol{u}$ が境界 $\partial\Omega$ 上での定値境界値 $\boldsymbol{b}$ をもつ問題を扱う。即ち、初期値 $\boldsymbol{a}$ と解 $\boldsymbol{u}$ が各々以下の条件 (6.1)(6.2) を満たすとする初期値境界値問題を考える。

(6.1) $\boldsymbol{a} \in \mathcal{P}\boldsymbol{L}^q\ ,\ \partial^\alpha\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{L}^q\ {}_{;\,q\in(n,\infty];\,|\alpha|=1,\ldots,m}$

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} \qquad {}_{,\boldsymbol{x}\in\partial\Omega}$$

(6.2) $\boldsymbol{u} \in \mathcal{P}\boldsymbol{L}^q_{(0,\infty)}$

$$\partial_t\boldsymbol{u} - \nu\triangle\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\partial})\boldsymbol{u} + \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\partial}p = \mathbf{0} \qquad {}_{,(t,\boldsymbol{x})\in(0,\infty)\times\boldsymbol{R}^n}$$

$$\boldsymbol{u}(0,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) \qquad {}_{,\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n}$$

$$\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} \qquad {}_{,t\in(0,\infty),\boldsymbol{x}\in\partial\Omega}$$

この問題は時間大域的可解となり、その解は $\boldsymbol{b}$ に収束する。その解析の詳細はここでは扱わないが、本論 (４項迄) とは異なり、熱方程式 $\partial_t f - \nu\triangle f = 0$ の初期値周期境界値問題に対応する次式の核 K の利用に依り実現される。

$$K(t,\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\boldsymbol{\Lambda}} \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}^n} \exp\Big(-\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\lambda})^2}{4\nu t}\Big)$$

次の積分方程式は、解の偏導関数が存在する場合、ここでの初期値境界値問題と同値となる。

$$(6.3)\quad \boldsymbol{u}_t = K_t * \boldsymbol{a} - \int_0^t d\tau \int_{\partial\Omega} d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\partial}K_{t-\tau}\,\boldsymbol{b} - \int_0^t d\tau\,\mathcal{P}(\boldsymbol{\partial}K_{t-\tau} *\cdot \boldsymbol{u}_\tau\boldsymbol{u}_\tau) \qquad {}_{,(t,\boldsymbol{x})\in(0,\infty)\times\boldsymbol{R}^n}$$

従い、関数 $\boldsymbol{a}$ が、定値平均値 $\boldsymbol{a}_\Omega = \boldsymbol{c}$ を持ち、境界面 $\partial\Omega$ 上で定値 $\boldsymbol{b}$ となり、$\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{b}$ となる場合、前項 (5 項) の問題と本項 (6 項) での問題は、異なる定値に収束する解、即ち、異なる解、を持つことが分る。

これは、本論文で扱われたような周期系の方程式系においては、平均値条件や境界値条件のような附帯条件が指定されない限り、解が一意には定まらないことを意味する。

註 (ＣＭＩ問題との関連)

本論とＣＭＩ (クレイ数学研究所) 問題[8] との関連は、以下の通り。

ＣＭＩ問題では、４つの選択肢 (Ａ)(Ｂ)(Ｃ)(Ｄ) が示され、このうちの２者 (Ｂ)(Ｄ) が３次元空間の周期系での初期値問題に対するものとなっている。この２者 (Ｂ)(Ｄ) では、初期値に対し、非圧縮性に加え、任意階の空間偏導関数の存在が想定されている。

この２者の条件は、主要部 (4 項迄) あるいは 5 項の初期値に対する条件 $\boldsymbol{a} \in \mathcal{P}\boldsymbol{L}^2 \cap \boldsymbol{L}^\infty$ に対する十分条件になっており、従って、主要部 (4 項迄) あるいは 5 項の結果は、ＣＭＩ問題に対する結論を与えるものになっている。即ち、主張 (Ｂ) は肯定され、主張 (Ｄ) は否定される。

主要部 (4 項迄) あるいは 5 項の結果は、時間大域解の存在のみでなく、一意性や適切性、偏微分可能性、減衰性等の各種の解特性を与えるものとなっている。また、この２者の初期値に対する正則性の条件を緩和し、広範な初期値に対して同様の結果が得られることを示すものとなっている。

但し、 6 項に記したとおり、ＣＭＩ問題は不定性を有し、解の一意性が保証されないものとなっており、これは条件の不足に依っている。主要部 (4 項迄), 5 項, 6 項等の適切な条件が指定された問題では、解の一意性が保証される。

また、これ以外の２者 (Ａ)(Ｃ) に対する結論は、別論文[9] で示される。この２者 (Ａ)(Ｃ) の結論は本論と類似する。

文献

[1] C.L.M.H.Navier, Memoiré sur les lois du mouvement des fluides, *Mémoires Acad. Roy. Sci. Inst. France* **6**(1823), 389-440

[2] G.G.Stokes, On the Theories of the Internal Friction of Fluids in Motion, and of the Equilibrium and Motion of Elastic Solids, *Trans. Camb. Phil. Soc.,* **8**(1845), 287-319

[3] J. Leray, Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace, *Acta Mathematica.***63**(1934), 193-248

[4] E. Hopf, Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodyanamischen Grundgleichungen, *Math. Nachr* **4** (1950), 213-231

[5] A. A. Kiselev and O.A. Ladyzenskaya, On the existence and uniqueness of the solution of the nonstationary problem for a viscous incompressible fluid, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.,* **21**(1957), 655-680

[6] S. Ito, The existence and the uniqueness of regular solution of non-stationary Navier-Stokes equation, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I* **9** (1961), 103-140

[7] T. Kato and H. Fujita, On the nonstationary Navier-Stokes system *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **9** (1962), 243-260

[8] T. Kato, Strong L^p-solution of the Navier-Stokes equation in Rm, with applications to

weak solutions in $\boldsymbol{R}^m$, with applications to weak solutions, *Math. Z.* **187** (1984), 471-480

[9] Y. Giga and T. Miyakawa, Solution in L_r of the Navier-Stokes initial value problem, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **89** (1985), 267-281

[10] C. Fefferman, Existence & Smoothness of the Navier-Stokes Equations, Millennium Prize Problems, Clay Mathematical Institute, 2000,
http://www.claymath.org/prizeproblems/navierstokes.htm.

[11] N.Isobe, Global in Time Solvability of Incompressive NSIVP in the Whole Space,-