証明の要点 (周期系におけるＮＳＩＶＰの時間大域可解性の時間変換解析)

時間大域可解性は、先験的評価として得られる解２乗ノルムの非増加性 $\|\boldsymbol{u}\|_2 \le \|\boldsymbol{a}\|_2$ を利用して、解の満たす積分方程式に基く解の上限評価を行うことにより、証明される。

但し、積分方程式 (1.3) とヘルダー不等式や拡張ヤング不等式の単純な組合せによる評価には限界があり、必要な結果は得られない。

$$(1.3)\quad \boldsymbol{u}_t = K_t * \boldsymbol{a} - \int_0^t d\tau\, \mathcal{P}(\boldsymbol{\partial} K_{t-\tau} * \cdot \boldsymbol{u}_\tau \boldsymbol{u}_\tau)$$

例えば、単純に上式に $\|\boldsymbol{u}\|_2 \le \|\boldsymbol{a}\|_2$ を適用すると、形式的に次の不等式が得られる。

$$\|\boldsymbol{u}_t\|_q \le \|\boldsymbol{a}\|_q + C\|\boldsymbol{a}\|_2^2 \int_0^t d\tau\, \|\boldsymbol{\partial} K_{t-\tau}\|_q$$

このとき因子 $\|\boldsymbol{\partial} K_{t-\tau}\|_q$ は $c(t-\tau)^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{q})-\frac{1}{2}}$ となり、$n \ge 3, q \in (n,\infty]$ の場合、同因子は τ での積分に関して発散し、この形式的な不等式は有効な評価式を与えない。

同論文では、時間変換積分方程式 (1.4) の利用により、このような発散を回避して有用な評価式を構成することにより、時間大域可解性が証明される。

$$(1.4)\quad \boldsymbol{u}_t^{\varPhi} = K_t^{\varPhi} * \boldsymbol{a} - \int_0^t d\tau\, \mathcal{P}(\boldsymbol{\partial} K_{t-\tau}^{\varPhi} * \varphi_\tau \cdot \boldsymbol{u}_\tau^{\varPhi} \boldsymbol{u}_\tau^{\varPhi})$$

上式に $\|\boldsymbol{u}\|_2 \le \|\boldsymbol{a}\|_2$ を適用すると、次式が得られる。

$$\|\boldsymbol{u}_t^{\varPhi}\|_q \le \|\boldsymbol{a}\|_q + C\|\boldsymbol{a}\|_2^2 \int_0^t d\tau\, \varphi_\tau \|\boldsymbol{\partial} K_{t-\tau}^{\varPhi}\|_q$$

このとき因子 $\|\boldsymbol{\partial} K_{t-\tau}^{\varPhi}\|_q$ は $c(\varPhi(t-\tau))^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{q})-\frac{1}{2}}$ となり、$n \ge 3, q \in (n,\infty]$ の場合に、適当な時間変換関数 $\varPhi = \varPhi(t)$ の採用により、同因子は τ での積分に関して発散せず、被積分因子 φ を考慮しても積分が有限確定となり、有用な評価式が得られる。

$$\|\boldsymbol{u}_t^{\varPhi}\|_q \le \|\boldsymbol{a}\|_q + Cc\|\boldsymbol{a}\|_2^2 \int_0^t d\tau\, \varphi_\tau {\varPhi_{t-\tau}}^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{q})-\frac{1}{2}}$$

註記

非線形問題の時間大域可解性は、典型的に、時間局所可解性と先験的評価により証明されてきた。

周期系でのＮＳＩＶＰに関しては、例えば平均値零値条件等の、適切な附帯条件下で、$\boldsymbol{L}^q{}_{,\, q\in(n,\infty]}$ 帰属の初期値に対する時間局所可解性と解の $\boldsymbol{L}^2$ での先験的評価は、積分方程式や拡張ヤング不等式のようなよく知られた関係式に基く単純な解析に基き、示され得る。

従って、適切な解の $\boldsymbol{L}^q$ での先験的評価が得られれば、時間大域可解性が証明されることになる。

しかしながら、積分方程式や拡張ヤング不等式のようなよく知られた関係式に基く単純な解析では、解の $\boldsymbol{L}^q$ での先験的評価を得ることは困難と思われる。

これに対し、時間変換された積分方程式に基く解析に依り、適切な解の $\boldsymbol{L}^q$ での先験的評価が得られる。