

Démonstration Complète de la Conjecture de BEAL - Suivie d'Exemples Numériques

Abdelmajid Ben Hadj Salem, Dipl.- Ing.

6,rue du Nil, Cité Soliman Er-Riadh, 8020 Soliman, Tunisia.¹

Abstract

In 1997, Andrew Beal [1] announced the following conjecture : *Let A, B, C, m, n , and l be positive integers with $m, n, l > 2$. If $A^m + B^n = C^l$ then A, B , and C have a common factor.* We begin to construct the polynomial $P(x) = (x - A^m)(x - B^n)(x + C^l) = x^3 - px + q$ with p, q integers depending of A^m, B^n and C^l . We resolve $x^3 - px + q = 0$ and we obtain the three roots x_1, x_2, x_3 as functions of p, q and a parameter θ . Since $A^m, B^n, -C^l$ are the only roots of $x^3 - px + q = 0$, we discuss the conditions that x_1, x_2, x_3 are integers. Four numerical examples are given.

Résumé

En 1997, Andrew Beal [1] avait annoncé la conjecture suivante : *Soient A, B, C, m, n , et l des entiers positifs avec $m, n, l > 2$. Si $A^m + B^n = C^l$ alors A, B , et C ont un facteur en commun.* Nous considérons le polynôme $P(x) = (x - A^m)(x - B^n)(x + C^l) = x^3 - px + q$ avec p, q des entiers qui dépendent de A^m, B^n et C^l . La résolution de $x^3 - px + q = 0$ nous donne les trois racines x_1, x_2, x_3 comme fonctions de p, q et d'un paramètre θ . Comme $A^m, B^n, -C^l$ sont les seules racines de $x^3 - px + q = 0$, nous discutons les conditions pour que x_1, x_2, x_3 soient des entiers. Quatre exemples numériques sont présentés.

Keywords: Prime numbers, divisibility, roots of polynomials of third degree,

1. Email : abenhadjalem@gmail.com

convenient numbers, diophantine equations.

2010 MSC: 11AXX; 11D41.

*A mon épouse Wahida,
mes enfants Senda et Mohamed Mazen*

1. Introduction

En 1997, Andrew Beal [1] avait annoncé la conjecture suivante :

Conjecture 1. *Soient A, B, C, m, n , et l des entiers positifs avec $m, n, l > 2$.*

Si :

$$A^m + B^n = C^l \tag{1}$$

5 *alors A, B , et C ont un facteur commun.*

Dans ce papier, nous allons donner une démonstration de la conjecture de Beal. Notre idée est de considérer un polynôme $P(x)$ de troisième degré ayant comme racines les nombres A^m, B^n et $-C^l$ en tenant compte de la condition (1). Le papier est organisé comme suit : dans la section 2, nous exprimons les racines
10 de $P(x) = x^3 - px + q = 0$ en fonction de deux paramètres ρ, θ qui dépendent de A^m, B^n et C^l . Les sections 3,4 et 5 représentent la partie importante du papier, nous obtenons que $A^{2m} = \frac{4p}{3} \cos^2 \frac{\theta}{3}$. Comme A^{2m} est un entier, il s'ensuit que $\cos^2 \frac{\theta}{3}$ doit être écrit comme une fraction $\frac{a}{b}$ où a, b sont deux entiers positifs non
15 nuls copremiers. Nous discutons alors les conditions de divisibilité de p, a, b telles que l'expression de A^{2m} soit un entier et que a, b restent copremiers. Suivant les cas étudiés, nous obtenons que A, B, C aient ou non un facteur commun. Dans la section 6, quatre exemples numériques sont présentés et nous finissons par la conclusion en section 7.

20 1.1. Cas trivial

Nous commençons avec le cas trivial où $A^m = B^n$. L'équation (1) devient :

$$2A^m = C^l \tag{2}$$

Comme $l > 2$, nous déduisons facilement que 2 est un facteur commun. La conjecture (1) est vérifiée.

25 Nous supposons dans la suite que $A^m > B^n$.

2. Calculs Préliminaires

Nous supposons la donnée de $m, n, l \in \mathbb{N}^* > 2$ et $A, B, C \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$A^m + B^n = C^l \quad (3)$$

Nous appellerons :

$$P(x) = (x - A^m)(x - B^n)(x + C^l) \quad (4)$$

Utilisant l'équation (3), $P(x)$ peut s'écrire :

$$P(x) = x^3 + x[A^m B^n - (A^m + B^n)^2] + A^m B^n (A^m + B^n) \quad (5)$$

30 Nous introduisons les notations :

$$p = (A^m + B^n)^2 - A^m B^n; \quad q = A^m B^n (A^m + B^n) \quad (6)$$

Comme $A^m \neq B^n$, nous obtenons $p > 0$. L'équation (5) devient :

$$P(x) = x^3 - px + q \quad (7)$$

en utilisant l'équation (4), $P(x) = 0$ a trois racines réelles différentes : A^m, B^n et $-C^l$. Maintenant, résolvons l'équation :

$$P(x) = x^3 - px + q = 0 \quad (8)$$

Pour résoudre (8), posons :

$$x = u + v; \quad \alpha = A^m B^n > 0; \quad \beta = (A^m + B^n)^2 \quad (9)$$

35 Alors $P(x) = 0$ donne les deux conditions sur u et v :

$$u^3 + v^3 = -q; \quad uv = p/3 > 0 \quad (10)$$

Alors u^3 et v^3 sont solutions de l'équation du second degré :

$$X^2 + qX + p^3/27 = 0 \quad (11)$$

Son discriminant Δ s'écrit :

$$\Delta = q^2 - 4p^3/27 = \frac{27q^2 - 4p^3}{27} = \frac{\bar{\Delta}}{27}$$

avec :

$$\bar{\Delta} = 27q^2 - 4p^3 = 27\alpha^2\beta - 4(\beta - \alpha)^3$$

Comme $\alpha \neq 0$, nous pouvons aussi re-écrire l'équation précédente comme :

$$\bar{\Delta} = \alpha^3 \left(27\frac{\beta}{\alpha} - 4\left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right)^3 \right)$$

Nous appelons t le paramètre $\frac{\beta}{\alpha}$, $\bar{\Delta}$ devient :

$$\bar{\Delta} = \alpha^3(27t - 4(t-1)^3)$$

Notons :

$$y = y(t) = 27t - 4(t-1)^3 \quad (12)$$

Comme $\alpha > 0$, le signe de $\bar{\Delta}$ est aussi le signe de $y(t)$. L'étude du signe de la fonction y montre que $y < 0$ pour $t > 4$. Dans notre cas, nous sommes intéressés
 40 à $t > 0$. Pour $t = 4$, nous obtenons $y(4) = 0$ et pour $t \in]0, 4[$, $y > 0$. Comme nous avons $t = \frac{\beta}{\alpha} > 4$ parce que $A^m \neq B^n$:

$$(A^m - B^n)^2 > 0 \implies \beta = (A^m + B^n)^2 > 4\alpha = 4A^m B^n \quad (13)$$

Alors $y < 0 \implies \bar{\Delta} < 0 \implies \Delta < 0$. Alors l'équation (11) n'a pas de racines réelles u^3 et v^3 . Retrouvons les solutions u et v avec $x = u + v$ un réel positif ou négatif et $u.v = p/3$.

45 2.1. Démonstration

DÉMONSTRATION. Les solutions de l'équation (11) sont :

$$X_1 = \frac{-q + i\sqrt{-\Delta}}{2}; \quad X_2 = \bar{X}_1 = \frac{-q - i\sqrt{-\Delta}}{2}$$

Nous devons résoudre :

$$u^3 = \frac{-q + i\sqrt{-\Delta}}{2}; \quad v^3 = \frac{-q - i\sqrt{-\Delta}}{2}$$

Ecrivons X_1 sous la forme $X_1 = \rho e^{i\theta}$ avec :

$$\rho = \frac{\sqrt{q^2 - \Delta}}{2} = \frac{p\sqrt{p}}{3\sqrt{3}}; \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2\rho} > 0; \quad \cos\theta = -\frac{q}{2\rho} < 0 \quad (14)$$

alors $\theta [2\pi] \in] + \frac{\pi}{2}, +\pi[$, soit :

$$\boxed{\frac{\pi}{2} < \theta < +\pi \Rightarrow \frac{\pi}{6} < \frac{\theta}{3} < \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} < \cos\frac{\theta}{3} < \frac{\sqrt{3}}{2}} \quad (15)$$

et :

$$\boxed{\frac{1}{4} < \cos^2\frac{\theta}{3} < \frac{3}{4}} \quad (16)$$

d'où l'expression de X_2 : $X_2 = \rho e^{-i\theta}$. Posons :

$$u = r e^{i\psi}; \quad \text{et } j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad (17)$$

50 avec j est une racine complexe cubique de l'unité, alors les solutions u et v sont :

$$\begin{cases} u_1 = r e^{i\psi_1} = \sqrt[3]{\rho} e^{i\frac{\theta}{3}} \\ u_2 = r e^{i\psi_2} = \sqrt[3]{\rho} j e^{i\frac{\theta}{3}} = \sqrt[3]{\rho} e^{i\frac{\theta+2\pi}{3}} \\ u_3 = r e^{i\psi_3} = \sqrt[3]{\rho} j^2 e^{i\frac{\theta}{3}} = \sqrt[3]{\rho} e^{i\frac{4\pi}{3}} e^{i\frac{\theta}{3}} = \sqrt[3]{\rho} e^{i\frac{\theta+4\pi}{3}} \end{cases} \quad (18)$$

et similairement :

$$\begin{cases} v_1 = r e^{-i\psi_1} = \sqrt[3]{\rho} e^{-i\frac{\theta}{3}} \\ v_2 = r e^{-i\psi_2} = \sqrt[3]{\rho} j^2 e^{-i\frac{\theta}{3}} = \sqrt[3]{\rho} e^{i\frac{4\pi}{3}} e^{-i\frac{\theta}{3}} = \sqrt[3]{\rho} e^{i\frac{4\pi-\theta}{3}} \\ v_3 = r e^{-i\psi_3} = \sqrt[3]{\rho} j e^{-i\frac{\theta}{3}} = \sqrt[3]{\rho} e^{i\frac{2\pi-\theta}{3}} \end{cases} \quad (19)$$

Nous devons choisir u_k et v_h tels que $u_k + v_h$ soit réel. Dans ce cas, nous avons nécessairement :

$$v_1 = \overline{u_1}; \quad v_2 = \overline{u_2}; \quad v_3 = \overline{u_3}$$

Nous obtenons comme solutions réelles de l'équation (8) :

$$\begin{cases} x_1 = u_1 + v_1 = 2\sqrt[3]{\rho} \cos\frac{\theta}{3} > 0 \\ x_2 = u_2 + v_2 = 2\sqrt[3]{\rho} \cos\frac{\theta+2\pi}{3} = -\sqrt[3]{\rho} (\cos\frac{\theta}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{\theta}{3}) < 0 \\ x_3 = u_3 + v_3 = 2\sqrt[3]{\rho} \cos\frac{\theta+4\pi}{3} = \sqrt[3]{\rho} (-\cos\frac{\theta}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{\theta}{3}) > 0 \end{cases} \quad (20)$$

Comparant les expressions de x_1 et x_3 , nous obtenons facilement $x_1 > x_3$.

Comme A^m, B^n et $-C^l$ sont les seules solutions réelles de (8), nous considérons,

55 comme A^m est supposé supérieur à B^n , les expressions :

$$\left\{ \begin{array}{l} A^m = x_1 = u_1 + v_1 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{\theta}{3} \\ B^n = x_3 = u_3 + v_3 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{\theta + 4\pi}{3} = \sqrt[3]{\rho}\left(-\cos\frac{\theta}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{\theta}{3}\right) \\ -C^l = x_2 = u_2 + v_2 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{\theta + 2\pi}{3} = -\sqrt[3]{\rho}\left(\cos\frac{\theta}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{\theta}{3}\right) \end{array} \right. \quad (21)$$

3. Préambule de la Démonstration du Principal Théorème

Théorème 1. Soient A, B, C, m, n , et l des entiers positifs avec $m, n, l > 2$.

Si :

$$A^m + B^n = C^l \quad (22)$$

alors A, B , et C ont un facteur commun.

60 DÉMONSTRATION. $A^m = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{\theta}{3}$ est un entier $\Rightarrow A^{2m} = 4\sqrt[3]{\rho^2}\cos^2\frac{\theta}{3}$ est un entier. Mais :

$$\sqrt[3]{\rho^2} = \frac{p}{3} \quad (23)$$

Alors :

$$A^{2m} = 4\sqrt[3]{\rho^2}\cos^2\frac{\theta}{3} = 4\frac{p}{3}\cos^2\frac{\theta}{3} = p\cdot\frac{4}{3}\cos^2\frac{\theta}{3} \quad (24)$$

Comme A^{2m} est un entier, et p est un entier, alors $\cos^2\frac{\theta}{3}$ doit être écrit sous la forme :

$$\boxed{\cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{1}{b} \quad \text{ou} \quad \cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{a}{b}} \quad (25)$$

65 avec $b \in \mathbb{N}^*$, pour la dernière condition $a \in \mathbb{N}^*$ et a, b coprimiers.

Notations : dans la suite du papier, les scalaires $a, b, \dots, z, \alpha, \beta, \dots, A, B, C, \dots$ et Δ, Φ, \dots représentent des entiers positifs sauf les paramètres θ, ρ , ou ceux mentionnés dans le texte, sont des réels.

70 3.1. Cas $\cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{1}{b}$

Nous obtenons :

$$A^{2m} = p \cdot \frac{4}{3} \cdot \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{4 \cdot p}{3 \cdot b} \quad (26)$$

Comme $\frac{1}{4} < \cos^2 \frac{\theta}{3} < \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{b} < \frac{3}{4} \Rightarrow b < 4 < 3b \Rightarrow b = 1, 2, 3$.

3.1.1. $b = 1$

75 $b = 1 \Rightarrow 4 < 3$ ce qui est impossible.

3.1.2. $b = 2$

$b = 2 \Rightarrow A^{2m} = p \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot p}{3} \Rightarrow 3|p \Rightarrow p = 3p'$ avec $p' \neq 1$ parce que $3 \ll p$, nous obtenons :

$$A^{2m} = (A^m)^2 = \frac{2p}{3} = 2 \cdot p' \Rightarrow 2|p' \Rightarrow p' = 2^\alpha p_1^2$$

$$\text{avec } 2 \nmid p_1, \quad \alpha + 1 = 2\beta$$

$$A^m = 2^\beta p_1 \quad (27)$$

$$B^n C^l = \sqrt[3]{\rho^2} \left(3 - 4 \cos^2 \frac{\theta}{3} \right) = p' = 2^\alpha p_1^2 \quad (28)$$

De l'équation (27), il s'ensuit que $2|A^m \Rightarrow A = 2^i A_1$, $i \geq 1$ et $2 \nmid A_1$. Par suite,
80 nous avons $\beta = i \cdot m = im$. L'équation (28) entraîne que $2|(B^n C^l) \Rightarrow 2|B^n$ ou $2|C^l$.

Cas $2|B^n$. : Si $2|B^n \Rightarrow 2|B \Rightarrow B = 2^j B_1$ avec $2 \nmid B_1$. L'expression de $B^n C^l$ devient :

$$B_1^n C^l = 2^{2im-1-jn} p_1^2$$

- Si $2im - 1 - jn \geq 1$, $2|C^l \Rightarrow 2|C$ en accord avec $C^l = 2^{im} A_1^m + 2^{jn} B_1^n$ et la conjecture (1) est vérifiée.

- Si $2im - 1 - jn \leq 0 \Rightarrow 2 \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = 2^{im} A_1^m + 2^{jn} B_1^n$.

85 Cas $2|C^l$. : Si $2|C^l$: de la même manière traitée ci-dessus, nous obtenons les mêmes résultats.

3.1.3. $b = 3$

$b = 3 \Rightarrow A^{2m} = p \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4p}{9} \Rightarrow 9|p \Rightarrow p = 9p'$ avec $p' \neq 1$ comme $9 \ll p$ alors $A^{2m} = 4p'$. Si p' est premier c'est impossible. Nous supposons que p' est
 90 non premier, comme $m \geq 3$, il s'ensuit que $2|p'$, d'où $2|A^m$. Or $B^n C^l = 5p'$ et $2|(B^n C^l)$. En utilisant la manière traitée du cas $b = 2$, nous obtenons les mêmes résultats.

3.2. Cas $a > 1$, $\cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{a}{b}$

Nous avons donc :

$$\cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{a}{b}; \quad A^{2m} = p \cdot \frac{4}{3} \cdot \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{4 \cdot p \cdot a}{3 \cdot b} \quad (29)$$

95 où a, b vérifient l'une des deux conditions :

$$\boxed{\{3|a \text{ et } b|4p\}} \text{ ou } \boxed{\{3|p \text{ et } b|4p\}} \quad (30)$$

et en utilisant l'équation (16), nous obtenons une troisième condition :

$$\boxed{b < 4a < 3b} \quad (31)$$

Pour ces conditions, $A^{2m} = 4 \sqrt[3]{\rho^2} \cos^2 \frac{\theta}{3} = 4 \frac{p}{3} \cdot \cos^2 \frac{\theta}{3}$ est un entier.

Etudions alors les conditions données par l'équation (30) dans les deux sections
 100 suivantes.

4. Hypothèse : $\{3|a \text{ et } b|4p\}$

Nous avons donc :

$$3|a \implies \exists a' \in \mathbb{N}^* / a = 3a' \quad (32)$$

4.1. Cas $b = 2$ et $3|a$:

A^{2m} s'écrit :

$$A^{2m} = \frac{4p}{3} \cdot \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3} \cdot \frac{a}{b} = \frac{4p}{3} \cdot \frac{a}{2} = \frac{2 \cdot p \cdot a}{3} \quad (33)$$

105 En utilisant l'équation (32), A^{2m} devient :

$$A^{2m} = \frac{2.p.3a'}{3} = 2.p.a' \quad (34)$$

mais $\cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{a}{b} = \frac{3a'}{2} > 1$ ce qui est impossible, d'où $b \neq 2$.

4.2. Cas $b = 4$ et $3|a$:

A^{2m} s'écrit :

$$A^{2m} = \frac{4.p}{3} \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{4.p}{3} \cdot \frac{a}{b} = \frac{4.p}{3} \cdot \frac{a}{4} = \frac{p.a}{3} = \frac{p.3a'}{3} = p.a' \quad (35)$$

$$\text{et } \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{a}{b} = \frac{3.a'}{4} < \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{3}{4} \implies a' < 1 \quad (36)$$

ce qui est impossible. Alors le cas $b = 4$ est impossible.

110 4.3. Cas $b = p$ et $3|a$:

Nous avons :

$$\cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{a}{b} = \frac{3a'}{p} \quad (37)$$

et :

$$A^{2m} = \frac{4p}{3} \cdot \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3} \cdot \frac{3a'}{p} = 4a' = (A^m)^2 \quad (38)$$

$$\exists a'' / a' = a''^2 \quad (39)$$

$$\text{et } B^n C^l = p - A^{2m} = b - 4a' = b - 4a''^2 \quad (40)$$

Le calcul $A^m B^n$ donne :

$$A^m B^n = p \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{2\theta}{3} - 2a'$$

$$\text{ou } A^m B^n + 2a' = p \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{2\theta}{3} \quad (41)$$

Le membre à gauche de (41) est un entier et p aussi, alors $2 \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{2\theta}{3}$ s'écrit

115 sous la forme :

$$2 \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{2\theta}{3} = \frac{k_1}{k_2} \quad (42)$$

où k_1, k_2 sont deux entiers copremiers et $k_2|p \implies p = b = k_2.k_3, k_3 \in \mathbb{N}^*$.

** A-1- Nous supposons que $k_3 \neq 1$, nous obtenons :

$$A^m(A^m + 2B^n) = k_1.k_3 \quad (43)$$

Soit μ un entier premier avec $\mu|k_3$, alors $\mu|b$ et $\mu|A^m(A^m + 2B^n) \implies \mu|A^m$ ou
 120 $\mu|(A^m + 2B^n)$.

** A-1-1- Si $\mu|A^m \implies \mu|A$ et $\mu|A^{2m}$, mais $A^{2m} = 4a' \implies \mu|4a' \implies (\mu = 2$
 mais $2|a')$ ou $(\mu|a')$. Alors $\mu|a$ d'où la contradiction avec a, b copremiers.

125 ** A-1-2- Si $\mu|(A^m + 2B^n) \implies \mu \nmid A^m$ et $\mu \nmid 2B^n$ alors $\mu \neq 2$ et $\mu \nmid B^n$. Nous
 écrivons $\mu|(A^m + 2B^n)$ comme :

$$A^m + 2B^n = \mu.t' \quad (44)$$

Il s'ensuit :

$$A^m + B^n = \mu t' - B^n \implies A^{2m} + B^{2n} + 2A^m B^n = \mu^2 t'^2 - 2t' \mu B^n + B^{2n}$$

En utilisant l'expression de p :

$$p = t'^2 \mu^2 - 2t' B^n \mu + B^n (B^n - A^m) \quad (45)$$

Comme $p = b = k_2.k_3$ et $\mu|k_3$ alors $\mu|b \implies \exists \mu'$ et $b = \mu\mu'$, ainsi nous pouvons
 écrire :

$$\mu' \mu = \mu(\mu t'^2 - 2t' B^n) + B^n (B^n - A^m) \quad (46)$$

130 De la dernière équation, nous obtenons $\mu|B^n(B^n - A^m) \implies \mu|B^n$ ou $\mu|(B^n -$
 $A^m)$.

** A-1-2-1- Si $\mu|B^n$ ce qui en contradiction avec $\mu \nmid B^n$.

135 ** A-1-2-2- Si $\mu|(B^n - A^m)$ et utilisant $\mu|(A^m + 2B^n)$, nous arrivons à :

$$\mu|3B^n \begin{cases} \mu|B^n \\ \text{ou} \\ \mu = 3 \end{cases} \quad (47)$$

** A-1-2-2-1- Si $\mu|B^n \implies \mu|B$ c'est la contradiction avec $\mu \nmid B$ citée ci-dessus.

** A-1-2-2-2- Si $\mu = 3$, alors $3|b$, mais $3|a$ alors la contradiction avec a, b coprimiers.

140

** A-2- Nous assumons maintenant $k_3 = 1$, alors :

$$A^{2m} + 2A^m B^n = k_1 \quad (48)$$

$$b = k_2 \quad (49)$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} \sin \frac{2\theta}{3} = \frac{k_1}{b} \quad (50)$$

Prenons le carré de la dernière équation, nous obtenons :

$$\frac{4}{3} \sin^2 \frac{2\theta}{3} = \frac{k_1^2}{b^2}$$

$$\frac{16}{3} \sin^2 \frac{\theta}{3} \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{k_1^2}{b^2}$$

$$\frac{16}{3} \sin^2 \frac{\theta}{3} \cdot \frac{3a'}{b} = \frac{k_1^2}{b^2}$$

Finalement :

$$4^2 a' (p - a) = k_1^2 \quad (51)$$

mais $a' = a''^2$, alors $p - a$ est un carré. Soit :

$$\lambda^2 = p - a = b - a = b - 3a''^2 \implies \lambda^2 + 3a''^2 = b \quad (52)$$

L'équation (51) devient :

$$4^2 a''^2 \lambda^2 = k_1^2 \implies k_1 = 4a'' \lambda \quad (53)$$

145 en prenant la racine carrée positive, mais $k_1 = A^m (A^m + 2B^n) = 2a'' (A^m + 2B^n)$, par suite :

$$A^m + 2B^n = 2\lambda \implies \lambda = a'' + B^n \quad (54)$$

** A-2-1- Comme $A^m = 2a'' \implies 2|A^m \implies 2|A \implies A = 2^i A_1$, avec $i \geq 1$ et $2 \nmid A_1$, par suite $A^m = 2a'' = 2^{im} A_1^m \implies a'' = 2^{im-1} A_1^m$, or $im \geq 3 \implies 4|a''$.

Comme $p = b = A^{2m} + A^m B^n + B^{2n} = \lambda = 2^{im-1} A_1^m + B^n$. Prenons son carré, d'où :

$$\lambda^2 = 2^{2im-2} A_1^{2m} + 2^{im} A_1^m B^n + B^{2n}$$

Comme $im \geq 3$, nous pouvons écrire $\lambda^2 = 4\lambda_1 + B^{2n} \implies \lambda^2 \equiv B^{2n} \pmod{4} \implies \lambda^2 \equiv B^{2n} \equiv 0 \pmod{4}$ ou $\lambda^2 \equiv B^{2n} \equiv 1 \pmod{4}$.

150 ** A-2-1-1- Nous supposons que $\lambda^2 \equiv B^{2n} \equiv 0 \pmod{4} \implies 4|\lambda^2 \implies 2|(b-a)$. Or $2|a$ car $a = 3a' = 3a'^2 = 3 \times 2^{2(im-1)} A_1^{2m}$ et $im \geq 3$. Par suite $2|b$, il en résulte la contradiction avec a, b copremiers.

** A-2-1-2- Nous supposons maintenant que $\lambda^2 \equiv B^{2n} \equiv 1 \pmod{4}$. Comme
155 $A^m = 2^{im-1} A_1^m$ et $im - 1 \geq 2$, d'où $A^m \equiv 0 \pmod{4}$. Comme $B^{2n} \equiv 1 \pmod{4}$, alors B^n ne peut être que $B^n \equiv 1 \pmod{4}$ ou $B^n \equiv 3 \pmod{4}$ ce qui donne dans les deux cas $B^n C^l \equiv 1 \pmod{4}$.

Nous avons aussi $p = b = A^{2m} + A^m B^n + B^{2n} = 4a' + B^n C^l = 4a'^2 + B^n C^l$
160 soit $B^n C^l = \lambda^2 - a'^2 = B^n C^l$, par suite $\lambda, a'' \in \mathbb{N}^*$ sont solutions de l'équation diophantaine :

$$x^2 - y^2 = N \tag{55}$$

avec $N = B^n C^l > 0$. Soit $Q(N)$ le nombre des solutions de (55) et $\tau(N)$ le nombre de façon d'écrire les facteurs de N , alors nous annonçons le résultat suivant concernant les solutions de (55) (voir théorème 27.3 de [2]) :

- 165 - si $N \equiv 2 \pmod{4}$, alors $Q(N) = 0$;
- si $N \equiv 1$ ou $N \equiv 3 \pmod{4}$, alors $Q(N) = [\tau(N)/2]$;
- si $N \equiv 0 \pmod{4}$, alors $Q(N) = [\tau(N/4)/2]$.

Soit (u, v) , $u, v \in \mathbb{N}^*$ un autre couple solution de l'équation (55), alors
170 $u^2 - v^2 = x^2 - y^2 = N = B^n C^l$, mais $\lambda = x$ et $a'' = y$ vérifie l'équation (54) soit $x - y = B^n$, par suite u, v vérifient aussi $u - v = B^n$, ce qui donne $u + v = C^l$, par suite $u = x = \lambda = a'' + B^n$ et $v = a''$. Nous avons démontré

l'unicité des solutions de l'équation (55) avec la condition $x - y = B^n$. Comme
 $N = B^n C^l \equiv 1 \pmod{4} \implies Q(N) = [\tau(N)/2] > 1$. Or $Q(N) = 1$, d'où la
175 contradiction.

Alors le cas $k_3 = 1$ est impossible.

Vérifions la condition (31) donnée par $b < 4a < 3b$. Dans notre cas, la condition
180 devient :

$$p < 3A^{2m} < 3p \quad \text{avec} \quad p = A^{2m} + B^{2n} + A^m B^n \quad (56)$$

et $3A^{2m} < 3p \implies A^{2m} < p$ est donc vérifié. Si :

$$p < 3A^{2m} \implies 2A^{2m} - A^m B^n - B^{2n} \overset{?}{>} 0$$

En étudiant le signe du polynôme $Q(Y) = 2Y^2 - B^n Y - B^{2n}$ et en prenant
 $Y = A^m > B^n$, la condition $2A^{2m} - A^m B^n - B^{2n} > 0$ est vérifiée, par suite, la
condition $b < 4a < 3b$ est vraie.

185 Dans la suite du papier, nous vérifions facilement que la condition $b < 4a < 3b$
implique à vérifier $A^m > B^n$ ce qu'est vrai.

4.4. Cas $b|p \implies p = b.p', p' > 1, b \neq 2, b \neq 4$ et $3|a$:

$$A^{2m} = \frac{4.p}{3} \cdot \frac{a}{b} = \frac{4.b.p'.3.a'}{3.b} = 4.p'a' \quad (57)$$

Calculons $B^n C^l$:

$$B^n C^l = \sqrt[3]{\rho^2} \left(3 \sin^2 \frac{\theta}{3} - \cos^2 \frac{\theta}{3} \right) = \sqrt[3]{\rho^2} \left(3 - 4 \cos^2 \frac{\theta}{3} \right) \quad (58)$$

mais $\sqrt[3]{\rho^2} = \frac{p}{3}$ d'où en utilisant $\cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{3.a'}{b}$:

$$B^n C^l = \sqrt[3]{\rho^2} \left(3 - 4 \cos^2 \frac{\theta}{3} \right) = \frac{p}{3} \left(3 - 4 \frac{3.a'}{b} \right) = p \cdot \left(1 - \frac{4.a'}{b} \right) = p'(b - 4a') \quad (59)$$

190 Comme $p = b.p'$, et $p' > 1$, nous avons alors :

$$B^n C^l = p'(b - 4a') \quad (60)$$

$$\text{et } A^{2m} = 4.p'.a' \quad (61)$$

** B-1- Supposons que p' est premier, d'où $A^{2m} = 4ap' = (A^m)^2 \implies p'|a$. Or $B^n C^l = p'(b - 4a') \implies p'|B^n$ ou $p'|C^l$.

** B-1-1- Si $p'|B^n \implies p'|B \implies B = p'B_1$ avec $B_1 \in \mathbb{N}^*$. Par suite : $p'^{n-1}B_1^n C^l =$
195 $b - 4a'$. Or $n > 2$ alors $(n - 1) > 1$ et $p'|a'$, d'où $p'|b \implies a$ et b non copremiers, d'où la contradiction.

** B-1-2- Si $p'|C^l \implies p'|C$. La même méthode utilisée ci-dessus, nous obtenons le même résultat.

200

** B-2- Nous considérons que p' n'est pas un nombre premier.

** B-2-1- p', a sont supposés copremiers : $A^{2m} = 4ap' \implies A^m = 2a'.p_1$ avec $a = a'^2$ et $p' = p_1^2$, donc a', p_1 sont aussi copremiers. Comme $A^m = 2a'.p_1$ alors
205 $2|a'$ ou $2|p_1$.

** B-2-1-1- $2|a'$, alors $2|a' \implies 2 \nmid p_1$. Mais $p' = p_1^2$.

** B-2-1-1-1- Si p_1 est premier, c'est impossible avec $A^m = 2a'.p_1$.

210

** B-2-1-1-2- Supposons que p_1 est non premier, il s'écrit sous la forme $p_1 = \omega^m \implies p' = \omega^{2m}$. Par suite $B^n C^l = \omega^{2m}(b - 4a')$.

** B-2-1-1-2-1- Si ω est premier, il est différent de 2, alors $\omega|(B^n C^l) \implies \omega|B^n$
215 ou $\omega|C^l$.

** B-2-1-1-2-1-1- Si $\omega|B^n \implies \omega|B \implies B = \omega^j B_1$ avec $\omega \nmid B_1$, d'où $B_1^n.C^l = \omega^{2m-nj}(b-4a')$.

220 ** B-2-1-1-2-1-1- Si $2m - n.j = 0$, nous obtenons $B_1^n.C^l = b - 4a'$ Comme $C^l = A^m + B^n \implies \omega|C^l \implies \omega|C$, et $\omega|(b-4a')$. Or $\omega \neq 2$ et ω est premier avec a' donc premier avec a , par suite $\omega \nmid b$. La conjecture (1) est vérifiée.

** B-2-1-1-2-1-1-2- Si $2m - nj \geq 1$, là aussi, avec le même raisonnement, nous
225 avons $\omega|C^l \implies \omega|C$ et $\omega|(b-4a')$ et $\omega \nmid a$ et $\omega \nmid b$. La conjecture (1) est vérifiée.

** B-2-1-1-2-1-1-3- Si $2m - nj < 0 \implies \omega^{n.j-2m} B_1^n.C^l = b - 4a'$. Comme $\omega|C$ utilisant $C^l = A^m + B^n$ d'où $C = \omega^h.C_1 \implies \omega^{n.j-2m+h.l} B_1^n.C_1^l = b - 4a'$. Si $n.j - 2m + h.l < 0 \implies \omega|B_1^n.C_1^l$ par suite la contradiction avec $\omega \nmid B_1$ ou $\omega \nmid C_1$.
230 Donc si $n.j - 2m + h.l > 0$ et $\omega|(b-4a')$ avec ω, a, b coprimiers et la conjecture (1) est vérifiée.

** B-2-1-1-2-1-2- Nous obtenons les mêmes résultats si $\omega|C^l$.

235 ** B-2-1-1-2-2- Maintenant, $p' = \omega^{2m}$ et ω non premier, nous écrivons $\omega = \omega_1^f.\Omega$ avec ω_1 premier $\nmid \Omega$ et $f \geq 1$ un entier, et $\omega_1|A$. D'où $B^n.C^l = \omega_1^{2f.m}\Omega^{2m}(b-4a') \implies \omega_1|(B^n.C^l) \implies \omega_1|B^n$ ou $\omega_1|C^l$.

** B-2-1-1-2-2-1- Si $\omega_1|B^n \implies \omega_1|B \implies B = \omega_1^j B_1$ avec $\omega_1 \nmid B_1$, d'où
240 $B_1^n.C^l = \omega_1^{2mf-nj}\Omega^{2m}(b-4a')$:

** B-2-1-1-2-2-1-1- Si $2f.m - n.j = 0$, nous obtenons $B_1^n.C^l = \Omega^{2m}(b-4a')$. Comme $C^l = A^m + B^n \implies \omega_1|C^l \implies \omega_1|C$, et $\omega_1|(b-4a')$. Or $\omega_1 \neq 2$ et ω_1 est premier avec a' donc premier avec a , par suite $\omega_1 \nmid b$, donc $\omega_1 \nmid b$. La conjecture
245 (1) est vérifiée.

** B-2-1-1-2-2-1-2- Si $2f.m - n.j \geq 1$, là aussi, avec le même raisonnement, nous

avons $\omega_1|C^l \implies \omega_1|C$ et $\omega_1|(b - 4a')$ et $\omega_1 \nmid a$ et $\omega_1 \nmid b$. La conjecture (1) est vérifiée.

250

** B-2-1-1-2-2-1-3- Si $2f.m - n.j < 0 \implies \omega_1^{n.j-2m.f} B_1^n.C^l = \Omega^{2m}(b - 4a')$.
Comme $\omega_1|C$ utilisant $C^l = A^m + B^n$ d'où $C = \omega_1^h.C_1 \implies \omega_1^{n.j-2m.f+h.l} B_1^n.C_1^l = \Omega^{2m}(b - 4a')$. Si $n.j - 2m.f + h.l < 0 \implies \omega_1|B_1^n.C_1^l$ par suite la contradiction avec $\omega_1 \nmid B_1$ et $\omega_1 \nmid C_1$. Donc si $n.j - 2m.f + h.l > 0$ et $\omega_1|(b - 4a')$ avec ω_1, a, b copremiers et la conjecture (1) est vérifiée.

255

** B-2-1-1-2-2-2- Nous obtenons les mêmes résultats si $\omega_1|C^l$.

** B-2-1-2- Si $2|p_1$: alors $2|p_1 \implies 2 \nmid a' \implies 2 \nmid a$. Or $p' = p_1^2$.

260

** B-2-1-2-1- Si p_1 est premier égal à 2, nous obtenons $A^m = 4a' \implies 2|a'$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** B-2-1-2-2- Donc p_1 est non premier et $2|p_1$, Comme $A^m = 2a'p_1$, p_1 s'écrit sous la forme $p_1 = 2^{m-1}\omega^m \implies p' = 2^{2m-2}\omega^{2m}$. Par suite $B^n.C^l = 2^{2m-2}\omega^{2m}(b - 4a') \implies 2|B^n$ ou $2|C^l$.

265

** B-2-1-2-2-1- Si $2|B^n \implies 2|B$, comme $2|A$, par suite $2|C$. De $B^n.C^l = 2^{2m-2}\omega^{2m}(b - 4a')$ s'ensuit que si $2|(b - 4a') \implies 2|b$ mais comme $2 \nmid a$, il n'y aura pas de contradiction avec a, b copremiers et la conjecture (1) est vérifiée.

270

** B-2-1-2-2-2- Si $2|C^l$, de la même manière ci-dessus, nous obtenons les mêmes résultats.

** B-2-2- p', a sont supposés non copremiers : Soit ω un nombre premier tel que $\omega|a$ et $\omega|p'$.

275

** B-2-2-1- Supposons que $\omega = 3$. Comme $A^{2m} = 4ap' \implies 3|A$, or $3|p' \implies 3|p$,

comme $p = A^{2m} + B^{2n} + A^m B^n \implies 3|B^{2n} \implies 3|B$, par suite $3|C^l \implies 3|C$.
 280 Nous écrivons $A = 3^i A_1$, $B = 3^j B_1$, $C = 3^h C_1$ avec 3 est copremier avec
 A_1, B_1 et C_1 et $p = 3^{2im} A_1^{2m} + 3^{2nj} B_1^{2n} + 3^{im+jn} A_1^m B_1^n = 3^k .g$ avec $k =$
 $\min(2im, 2jn, im + jn)$ et $3 \nmid g$. Nous avons aussi $(\omega = 3)|a$ et $(\omega = 3)|p'$ ce
 qui donne $a = 3^\alpha a_1 = 3a' \implies a' = 3^{\alpha-1} a_1$, $3 \nmid a_1$ et $p' = 3^\mu p_1$, $3 \nmid p_1$ avec
 $A^{2m} = 4a'p' = 3^{2im} A_1^{2m} = 4 \times 3^{\alpha-1+\mu} .a_1 .p_1 \implies \alpha + \mu - 1 = 2im$. Comme $p =$
 285 $bp' = b.3^\mu p_1 = 3^\mu .b.p_1$. L'exposant du facteur 3 de p est k , l'exposant du facteur
 3 du membre à gauche de l'équation précédente est μ . Si $3|b$ c'est la contradiction
 avec a, b copremiers. Donc, nous supposons que $3 \nmid b$, et nous avons l'égalité des
 exposants : $\min(2im, 2jn, im + jn) = \mu$ en rappelant que $\alpha + \mu - 1 = 2im$.
 Mais $B^n C^l = p'(b - 4a')$ ce qui donne $3^{(nj+hl)} B_1^n C_1^l = 3^\mu p_1 (b - 4 \times 3^{(\alpha-1)} a_1)$.
 290 Nous avons aussi $A^m + B^n = C^l$ donne $3^{im} A_1^m + 3^{jn} B_1^n = 3^{hl} C_1^l$. Posons
 $\epsilon = \min(im, jn)$, nous avons $\epsilon = hl = \min(im, jn)$. Nous avons les conditions :

$$k = \min(2im, 2jn, im + jn) = \mu \quad (62)$$

$$\alpha + \mu - 1 = 2im \quad (63)$$

$$\epsilon = hl = \min(im, jn) \quad (64)$$

$$3^{(nj+hl)} B_1^n C_1^l = 3^\mu p_1 (b - 4 \times 3^{(\alpha-1)} a_1) \quad (65)$$

** B-2-2-1-1- $\alpha = 1 \implies a = 3a_1 = 3a'$ et $3 \nmid a_1$, l'équation (63) devient :

$$\mu = 2im \quad (66)$$

et la première équation (62) s'écrit :

$$k = \min(2im, 2jn, im + jn) = 2im \quad (67)$$

- Si $k = 2im$, par suite $2im \leq 2jn \leq im \leq jn \implies hl = im$, et $\mu = 2im =$
 295 $nj + hl = im + nj \implies im = jn = hl$. Par suite $3|A, 3|B$ et $3|C$ et la conjecture
 (1) est vérifiée.

- Si $k = 2jn \implies 2jn = 2im - 1$ c'est impossible, un nombre pair ne peut être
 impair.

- Si $k = im + jn \leq 2im \implies jn \leq im$ et $k = im + jn \leq 2jn \implies im \leq jn \implies$
 300 $im = jn \implies k = 2im = 2jn$ cas étudié ci-dessus et par suite $3|A, 3|B$ et $3|C$ et

la conjecture (1) est vérifiée.

** B-2-2-1-2- $\alpha > 1 \implies \alpha \geq 2$ et $a' = 3^{\alpha-1}a_1$.

- Si $k = 2im \implies 2im = \mu$, or $\mu = 2im - \alpha$ ce qui impossible.

305 - Si $k = 2jn = \mu \implies 2jn = 2im - \alpha$. Nous obtenons $2jn < 2im \implies jn < im \implies 2jn < im + jn$, $k = 2jn$ est bien le minimum de $(2im, 2jn, im + jn)$.

Nous obtenons $jn = hl < im$ et l'équation (65) devient :

$$B_1^n C_1^l = p_1(b - 4 \times 3^{(\alpha-1)}a_1) \quad (68)$$

La conjecture (1) est vérifiée.

- Si $k = im + jn \leq 2im \implies jn \leq im$ et $k = im + jn \leq 2jn \implies im \leq jn \implies$

310 $im = jn \implies k = 2im = 2jn$ ce qui donne des contradictions.

- Si $k = im + jn < 2im \implies jn < im$ et $2jn < im + jn = k$ ce qui est une contradiction avec $k = \min(2im, 2jn, im + jn)$.

** B-2-2-2- Nous supposons que $\omega \neq 3$. Nous écrivons $a = \omega^\alpha a_1$ avec $\omega \nmid a_1$ et

315 $p' = \omega^\mu p_1$ avec $\omega \nmid p_1$. Comme $A^{2m} = 4ap' = 4\omega^{\alpha+\mu}.a_1.p_1 \implies \omega|A \implies A = \omega^i A_1$, $\omega \nmid A_1$. Or $B^n C^l = p'(b - 4a') = \omega^\mu p_1(b - 4a') \implies \omega|B^n C^l \implies \omega|B^n$ ou $\omega|C^l$.

** B-2-2-2-1- $\omega|B^n \implies \omega|B \implies B = \omega^j B_1$ et $\omega \nmid B_1$. De $A^m + B^n = C^l \implies$

320 $\omega|C^l \implies \omega|C$. Comme $p = bp' = \omega^\mu bp_1 = \omega^k(\omega^{2im-k}A_1^{2m} + \omega^{2jn-k}B_1^{2n} + \omega^{im+jn-k}A_1^m B_1^n)$ avec $k = \min(2im, 2jn, im + jn)$. Par suite :

- Si $\mu = k$, alors $\omega \nmid b$ et la conjecture (1) est vraie.

- Si $k > \mu$, alors $\omega|b$, or $\omega|a$ d'où la contradiction avec a, b copremiers.

- Si $k < \mu$, il s'ensuit de :

$$\omega^\mu bp_1 = \omega^k(\omega^{2im-k}A_1^{2m} + \omega^{2jn-k}B_1^{2n} + \omega^{im+jn-k}A_1^m B_1^n)$$

que $\omega|A_1$ ou $\omega|B_1$ ce qui en contradiction avec les hypothèses.

325

** B-2-2-2-2- Si $\omega|C^l \implies \omega|C \implies C = \omega^h C_1$ avec $\omega \nmid C_1$. De $A^m + B^n = C^l \implies \omega|(C^l - A^m) \implies \omega|B$. Par suite, nous obtenons les mêmes résultats de B-2-2-2-1- ci-dessus.

4.5. Cas $b = 2p$ et $3|a$:

nous avons :

$$\cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{a}{b} = \frac{3a'}{2p} \implies A^{2m} = \frac{4p.a}{3b} = \frac{4p}{3} \cdot \frac{3a'}{2p} = 2a' = (A^m)^2 \implies 2|a' \implies 2|a$$

330 Alors $2|a$ et $2|b$ ce qui est en contradiction avec a, b copremiers.

4.6. Cas $b = 4p$ et $3|a$:

Nous avons :

$$\cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{a}{b} = \frac{3a'}{4p} \implies A^{2m} = \frac{4p.a}{3b} = \frac{4p}{3} \cdot \frac{3a'}{4p} = a' = (A^m)^2 = a'^2$$

avec $A^m = a''$

Calculons $A^m B^n$, nous obtenons :

$$A^m B^n = \frac{p\sqrt{3}}{3} \cdot \sin \frac{2\theta}{3} - \frac{2p}{3} \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{p\sqrt{3}}{3} \cdot \sin \frac{2\theta}{3} - \frac{a'}{2} \implies$$

$$A^m B^n + \frac{A^{2m}}{2} = \frac{p\sqrt{3}}{3} \cdot \sin \frac{2\theta}{3} \quad (69)$$

soit :

$$A^{2m} + 2A^m B^n = \frac{2p\sqrt{3}}{3} \sin \frac{2\theta}{3} \quad (70)$$

335 Le membre à gauche de (70) est un entier et p est un entier, alors $\frac{2\sqrt{3}}{3} \sin \frac{2\theta}{3}$ sera écrit :

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} \sin \frac{2\theta}{3} = \frac{k_1}{k_2} \quad (71)$$

où k_1, k_2 sont deux entiers copremiers et $k_2|p \implies p = k_2.k_3$.

** C-1- Premièrement, nous supposons que $k_3 \neq 1$. D'où :

$$A^{2m} + 2A^m B^n = k_3.k_1 \quad (72)$$

340 Soit μ un entier premier et $\mu|k_3$, alors $\mu|A^m(A^m + 2B^n) \implies \mu|A^m$ ou $\mu|(A^m + 2B^n)$.

** C-1-1- Si $\mu|(A^m = a^n) \implies \mu|(a^{n^2} = a') \implies \mu|(3a' = a)$. Comme $\mu|k_3 \implies \mu|p \implies \mu|(4p = b)$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

345

** C-1-2- Si $\mu|(A^m + 2B^n) \implies \mu \nmid A^m$ et $\mu \nmid 2B^n$, alors :

$$\mu \neq 2 \quad \text{et} \quad \mu \nmid B^n \quad (73)$$

$\mu|(A^m + 2B^n)$, nous écrivons :

$$A^m + 2B^n = \mu.t' \quad (74)$$

Alors :

$$\begin{aligned} A^m + B^n = \mu t' - B^n &\implies A^{2m} + B^{2n} + 2A^m B^n = \mu^2 t'^2 - 2t' \mu B^n + B^{2n} \\ &\implies p = t'^2 \mu^2 - 2t' B^n \mu + B^n (B^n - A^m) \end{aligned} \quad (75)$$

Comme $b = 4p = 4k_2.k_3$ et $\mu|k_3$ alors $\mu|b \implies \exists \mu'$ tel que $b = \mu.\mu'$, nous obtenons :

350

$$\mu' . \mu = \mu(4\mu t'^2 - 8t' B^n) + 4B^n (B^n - A^m) \quad (76)$$

La dernière équation implique $\mu|4B^n(B^n - A^m)$, mais $\mu \neq 2$ alors $\mu|B^n$ ou $\mu|(B^n - A^m)$.

** C-1-1-1- Si $\mu|B^n \implies$ c'est la contradiction avec (73).

355

** C-1-1-2- Si $\mu|(B^n - A^m)$ et en utilisant $\mu|(A^m + 2B^n)$, nous avons :

$$\mu|3B^n \implies \begin{cases} \mu|B^n \\ \text{ou} \\ \mu = 3 \end{cases} \quad (77)$$

** C-1-1-2-1- Si $\mu|B^n$ c'est contradictoire avec (73).

360 ** C-1-1-2-2- Si $\mu = 3$, alors $3|b$, mais $3|a$ ce qui en contradiction avec a, b premiers.

** C-2- Nous assumons maintenant que $k_3 = 1$, d'où :

$$A^{2m} + 2A^m B^n = k_1 \quad (78)$$

$$p = k_2 \quad (79)$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} \sin \frac{2\theta}{3} = \frac{k_1}{p} \quad (80)$$

Prenons le carré de la dernière équation, nous obtenons :

$$\frac{4}{3} \sin^2 \frac{2\theta}{3} = \frac{k_1^2}{p^2}$$

$$\frac{16}{3} \sin^2 \frac{\theta}{3} \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{k_1^2}{p^2}$$

$$\frac{16}{3} \sin^2 \frac{\theta}{3} \cdot \frac{3a'}{b} = \frac{k_1^2}{p^2}$$

Finalement :

$$a'(4p - 3a') = k_1^2 \quad (81)$$

mais $a' = a'^2$, alors $4p - 3a'$ est un carré. Soit :

$$\lambda^2 = 4p - 3a' = 4p - a = b - a \quad (82)$$

365 L'équation (81) devient :

$$a'^2 \lambda^2 = k_1^2 \implies k_1 = a' \lambda \quad (83)$$

en prenant la racine carrée positive. Utilisant (78), nous avons :

$$k_1 = A^m(A^m + 2B^n) = a'(A^m + 2B^n) \quad (84)$$

Par suite :

$$A^m + 2B^n = \lambda \quad (85)$$

Considérons maintenant que $b - a = \lambda^2 \implies \lambda^2 + 3a'^2 = b$, par suite le couple (λ, a') est une solution de l'équation diophantine :

$$X^2 + 3Y^2 = b \quad (86)$$

370 avec $X = \lambda$ et $Y = a^n$. Or d'après un théorème sur les solutions de l'équation donnée par (156), b s'écrit (voir théorème 37.4 de [3]) :

$$b = 2^{2s} \times 3^t \cdot p_1^{t_1} \cdots p_g^{t_g} q_1^{2s_1} \cdots q_r^{2s_r} \quad (87)$$

où les p_i sont des nombres premiers vérifiant $p_i \equiv 1 \pmod{6}$, les q_j sont aussi des nombres premiers tels que $q_j \equiv 5 \pmod{6}$. Alors, comme $b = 4p$:

- si $t \geq 1 \implies 3|b$, or $3|a$, d'où la contradiction avec a, b coprimiers.

375

** C-2-2-1- Donc, nous supposons que p s'écrit sous la forme :

$$p = p_1^{t_1} \cdots p_g^{t_g} q_1^{2s_1} \cdots q_r^{2s_r} \quad (88)$$

avec $p_i \equiv 1 \pmod{6}$ et $q_j \equiv 5 \pmod{6}$. Finalement nous obtenons que $p \equiv 1 \pmod{6}$. Vérifions alors si cette condition ne donne pas des contradictions.

380 Nous allons présenter le tableau des valeurs modulo 6 de $p = A^{2m} + A^m B^n + B^{2n}$ en fonction des valeurs de $A^m, B^n \pmod{6}$. Nous obtenons le tableau ci-dessous :

A^m, B^n	0	1	2	3	4	5
0	0	1	4	3	4	1
1	1	3	1	1	3	1
2	4	1	0	1	4	3
3	3	1	1	3	1	1
4	4	3	4	1	0	1
5	1	1	3	1	1	3

TABLE 1: Tableau de $p \pmod{6}$

** C-2-2-1-1- Cas $A^m \equiv 0 \pmod{6} \implies 2|(A^m = a^n) \implies 2|(a' = a'^2) \implies 2|a$,

or $2|b$, d'où la contradiction avec a, b coprimiers. Tous les cas de la première

385 ligne du tableau 1 à rejeter.

** C-2-2-1-2- Cas $A^m \equiv 1(\text{mod } 6)$ et $B^n \equiv 0(\text{mod } 6)$, d'où $2|B^n \implies B^n = 2B'$, alors p s'écrit $p = (A^m + B')^2 + 3B'^2$ avec $(p, 3) = 1$, sinon $3|p$, par suite $3|b$, or $3|a$, d'où la contradiction avec a, b copremiers. Donc le couple $(A^m + B', B')$

390 est solution de l'équation diophantine :

$$x^2 + 3y^2 = p \quad (89)$$

la solution $x = A^m + B', y = B'$ est unique vue que $x - y$ vérifie $x - y = A^m$. En effet, si (u, v) un autre couple solution de (89), avec $u, v \in \mathbb{N}^*$, alors nous avons :

$$u^2 + 3v^2 = p \quad (90)$$

$$u - v = A^m \quad (91)$$

D'où $u = v + A^m$, nous obtenons l'équation du second degré $4v^2 + 2vA^m - 2B'(A^m + 2B') = 0$ qui donne comme racine positive $v_1 = B' = y$, par suite $u = A^m + B' = x$. Il en résulte que p dans (89) a une représentation unique sous la forme $X^2 + 3Y^2$ avec $X, 3Y$ copremiers. Comme p est un nombre entier impair, nous appliquons l'un des théorèmes d'Euler sur les nombres convenables "numerus idoneus" (voir [4],[5]) à savoir : *Si $n > 1$ est un entier impair qui est représenté de façon unique telle que $n = x^2 + 3y^2$ avec $x, y \in \mathbb{N}$ et x et $3y$ sont relativement premiers, alors n est premier.* Donc p est premier et l'écriture $4p$ est unique (il suffit de poser $U = 2u, v = 2v$, avec $U^2 + 3V^2 = 4p$ et $U - V = 2A^m$). Or $b = 4p \implies \lambda^2 + 3a''^2 = (2(A^m + B'))^2 + 3(2B')^2$ l'unicité de l'écriture de $4p$ donne :

$$\lambda = 2(A^m + B') = 2a'' + B^n = 2a'' + B^n \quad (92)$$

$$\text{et } a'' = 2B' = B^n = A^m \quad (93)$$

405 Or $A^m > B^n$, d'où la contradiction.

** C-2-2-1-3- Cas $A^m \equiv 1(\text{mod } 6)$ et $B^n \equiv 2(\text{mod } 6)$, d'où B^n est pair, voir C-2-2-1-2-.

410 ** C-2-2-1-4- Cas $A^m \equiv 1(\text{mod } 6)$ et $B^n \equiv 3(\text{mod } 6)$, d'où $3|B^n \implies B^n = 3B'$. Nous pouvons écrire $b = 4p = (2A^m + 3B')^2 + 3(3B')^2 = \lambda^2 + 3a''^2$. L'unicité de l'écriture de b comme $x^2 + 3y^2 = \lambda^2 + 3a''^2 \implies a'' = A^m = 3B' = B^n$, d'où la contradiction avec $A^m > B^n$.

415 ** C-2-2-1-5- Cas $A^m \equiv 1(\text{mod } 6)$ et $B^n \equiv 5(\text{mod } 6)$, d'où $C^l \equiv 0(\text{mod } 6)$, donc $2|C^l$, voir C-2-2-1-2-.

** C-2-2-1-6- Cas $A^m \equiv 2(\text{mod } 6) \implies 2|a'' \implies 2|a$, or $2|b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

420

** C-2-2-1-7- Cas $A^m \equiv 3(\text{mod } 6)$ et $B^n \equiv 1(\text{mod } 6)$, d'où $C^l \equiv 4(\text{mod } 6) \implies 2|C^l \implies C^l = 2C'$, Nous pouvons écrire que $p = (C' - B^n)^2 + 3C'^2$, voir C-2-2-1-2-.

425 ** C-2-2-1-8- Cas $A^m \equiv 3(\text{mod } 6)$ et $B^n \equiv 2(\text{mod } 6)$, d'où B^n est pair, voir C-2-2-1-2-.

** C-2-2-1-9- Cas $A^m \equiv 3(\text{mod } 6)$ et $B^n \equiv 4(\text{mod } 6)$, par suite B^n est pair, voir C-2-2-1-2-.

430

** C-2-2-1-10- Cas $A^m \equiv 3(\text{mod } 6)$ et $B^n \equiv 5(\text{mod } 6)$, d'où $C^l \equiv 2(\text{mod } 6)$, donc $2|C^l$, voir C-2-2-1-2-.

435 ** C-2-2-1-11- Cas $A^m \equiv 4(\text{mod } 6) \implies 2|a'' \implies 2|a$, or $2|b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** C-2-2-1-12- Cas $A^m \equiv 5(\text{mod } 6)$ et $B^n \equiv 0(\text{mod } 6)$, par suite B^n est pair, voir C-2-2-1-2-.

440 ** C-2-2-1-13- Cas $A^m \equiv 5(\text{mod } 6)$ et $B^n \equiv 1(\text{mod } 6)$, d'où $C^l \equiv 0(\text{mod } 6)$,

donc $2|C^l$, voir C-2-2-1-2-.

** C-2-2-1-14- Cas $A^m \equiv 5 \pmod{6}$ et $B^n \equiv 3 \pmod{6}$, d'où $C^l \equiv 2 \pmod{6} \implies 2|C^l \implies C^l = 2C'$, p s'écrit $p = (C' - B^n)^2 + 3C'^2$, voir C-2-2-1-2-.

445

** C-2-2-1-15- Cas $A^m \equiv 5 \pmod{6}$ et $B^n \equiv 4 \pmod{6}$, par suite B^n est pair, voir C-2-2-1-2-.

450 Nous avons achevé l'étude de tous les cas du tableau 1 ayant tous des contradictions.

Alors le cas $k_3 = 1$ est impossible.

4.7. Cas $3|a$ et $b = 2p'$ $b \neq 2$ avec $p'|p$:

$3|a \implies a = 3a'$, $b = 2p'$ avec $p = k.p'$, d'où :

$$A^{2m} = \frac{4.p}{3} \cdot \frac{a}{b} = \frac{4.k.p'.3.a'}{6p'} = 2.k.a' \quad (94)$$

455 Calculons $B^n C^l$:

$$B^n C^l = \sqrt[3]{\rho^2} \left(3 \sin^2 \frac{\theta}{3} - \cos^2 \frac{\theta}{3} \right) = \sqrt[3]{\rho^2} \left(3 - 4 \cos^2 \frac{\theta}{3} \right) \quad (95)$$

mais $\sqrt[3]{\rho^2} = \frac{p}{3}$ d'où en utilisant $\cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{3.a'}{b}$:

$$B^n C^l = \sqrt[3]{\rho^2} \left(3 - 4 \cos^2 \frac{\theta}{3} \right) = \frac{p}{3} \left(3 - 4 \frac{3.a'}{b} \right) = p \cdot \left(1 - \frac{4.a'}{b} \right) = k(p' - 2a') \quad (96)$$

Comme $p = b.p'$, et $p' > 1$, nous avons alors :

$$B^n C^l = k(p' - 2a') \quad (97)$$

$$\text{et } A^{2m} = 2k.a' \quad (98)$$

** D-1- Nous supposons que k est premier.

460 ** D-1-1- Si $k = 2$, nous avons donc $p = 2p' = b \implies 2|b$, mais $A^{2m} = 4a' = (A^m)^2 \implies A^m = 2a''$ avec $a' = a''^2$, par suite $2|a'' \implies 2|(a = 3a''^2)$, il en résulte la contradiction avec a, b copremiers.

** D-1-2- Nous supposons $k \neq 2$. De $A^{2m} = 2k.a' = (A^m)^2 \implies k|a'$ et $2|a'$, d'où
 465 $a' = 2.k.a''^2 \implies A^m = 2.k.a''$. Par suite $k|A^m \implies k|A \implies A = k^i.A_1$ avec $i \geq 1$ et $k \nmid A_1$. $k^{im}A_1^m = 2ka'' \implies 2a'' = k^{im-1}A_1^m$. De $B^n C^l = k(p' - 2a') \implies k|(B^n C^l) \implies k|B^n$ ou $k|C^l$.

** D-1-2-1- Supposons que $k|B^n \implies k|B \implies B = k^j.B_1$ avec $j \geq 1$ et $k \nmid B_1$.
 470 Par suite $k^{nj-1}B_1^n C^l = p' - 2a' = p' - 4ka''^2$. Comme $n \geq 3 \implies nj - 1 \geq 2$, d'où $k|p'$ mais $k \neq 2 \implies k|(2p' = b)$, or $k|a' \implies k|(3a' = a)$. Il s'ensuit la contradiction avec a, b copremiers.

** D-1-2-2- Si $k|C^l$ Nous obtenons le même résultat.

475

** D-2- Nous supposons k est non premier. Soit ω un nombre premier tel que $k = \omega^s.k_1$, avec $s \geq 1$, $\omega \nmid k_1$. Les équations (97-98) deviennent :

$$B^n C^l = \omega^s.k_1(p' - 2a') \quad (99)$$

$$\text{et } A^{2m} = 2\omega^s.k_1.a' \quad (100)$$

** D-2-1- Supposons que $\omega = 2$, nous avons alors les équations :

$$A^{2m} = 2^{s+1}.k_1.a' \quad (101)$$

$$B^n C^l = 2^s.k_1(p' - 2a') \quad (102)$$

480 ** D-2-1-1- Cas : $2|a' \implies 2|a$, mais $2|b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** D-2-1-2- Cas : $2 \nmid a'$. Comme $2 \nmid k_1$, l'équation (101) donne $2|A^{2m} \implies A = 2^i A_1$, avec $i \geq 1$ et $2 \nmid A_1$. Nous déduisons que $2im = s + 1$.

485 ** D-2-1-2-1- Nous supposons que $2 \nmid (p' - 2a') \implies 2 \nmid p'$. De l'équation (102), nous obtenons que $2|B^n C^l \implies 2|B^n$ ou $2|C^l$:

** D-2-1-2-1-1- Nous supposons que $2|B^n \implies 2|B \implies B = 2^j B_1$ avec $2 \nmid B_1$ et $j \geq 1$, par suite $B_1^n C^l = 2^{s-jn} k_1 (p' - 2a')$:

490 - Si $s - jn \geq 1$, alors $2|C^l \implies 2|C$, pas de contradiction avec $C^l = 2^{im} A_1^m + 2^{jn} B_1^n$, et la conjecture (1) est vérifiée.

- Si $s - jn \leq 0$, de $B_1^n C^l = 2^{s-jn} k_1 (p' - 2a') \implies 2 \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = 2^{im} A_1^m + 2^{jn} B_1^n \implies 2|C^l$.

495 ** D-2-1-2-1-2- Nous obtenons les mêmes résultats si $2|C^l$.

** D-2-1-2-2- Nous supposons maintenant que $2|(p' - 2a') \implies p' - 2a' = 2^\mu \cdot \Omega$, avec $\mu \geq 1$ et $2 \nmid \Omega$. Nous rappelons que $2 \nmid a'$. L'équation (102) s'écrit :

$$B^n C^l = 2^{s+\mu} \cdot k_1 \cdot \Omega \quad (103)$$

Cette dernière équation implique que $2|(B^n C^l) \implies 2|B^n$ ou $2|C^l$.

500

** D-2-1-2-2-1- Supposons que $2|B^n \implies 2|B \implies B = 2^j B_1$ avec $j \geq 1$ et $2 \nmid B_1$. Par suite : $B_1^n C^l = 2^{s+\mu-jn} \cdot k_1 \cdot \Omega$:

- Si $s + \mu - jn \geq 1$, alors $2|C^l \implies 2|C$, pas de contradiction avec $C^l = 2^{im} A_1^m + 2^{jn} B_1^n$, et la conjecture (1) est vérifiée.

505 - Si $s + \mu - jn \leq 0$, de $B_1^n C^l = 2^{s+\mu-jn} k_1 \cdot \Omega \implies 2 \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = 2^{im} A_1^m + 2^{jn} B_1^n \implies 2|C^l$.

** D-2-1-2-2-2- Nous obtenons les mêmes résultats si $2|C^l$.

510 ** D-2-2- Nous supposons que $\omega \neq 2$. Nous avons alors les équations :

$$A^{2m} = 2\omega^s \cdot k_1 \cdot a' \quad (104)$$

$$B^n C^l = \omega^s \cdot k_1 \cdot (p' - 2a') \quad (105)$$

Comme $\omega \neq 2$, de l'équation (104), nous avons $2|(k_1.a')$. Si $2|a' \implies 2|a$, mais $2|b$ par suite la contradiction avec a, b copremiers.

** D-2-2-1- $2 \nmid a'$ et $2|k_1 \implies k_1 = 2^\mu.\Omega$ avec $\mu \geq 1$ et $2 \nmid \Omega$. De l'équation
515 (104), nous avons $2|A^{2m} \implies 2|A \implies A = 2^i A_1$ avec $i \geq 1$ et $2 \nmid A_1$, par suite
 $2im = 1 + \mu$. L'équation (105) devient :

$$B^n C^l = \omega^s . 2^\mu . \Omega . (p' - 2a') \quad (106)$$

De l'équation (106), nous obtenons $2|(B^n C^l) \implies 2|B^n$ ou $2|C^l$.

** D-2-2-1-1- Supposons $2|B^n \implies 2|B \implies B = 2^j B_1$, avec $j \in \mathbb{N}^*$ et $2 \nmid B_1$.

520

** D-2-2-1-1-1- Nous supposons que $2 \nmid (p' - 2a')$, alors nous avons $B_1^n C^l = \omega^s 2^{\mu-jn} \Omega (p' - 2a')$:

- Si $\mu - jn \geq 1 \implies 2|C^l \implies 2|C$, pas de contradiction avec $C^l = 2^{im} A_1^m + 2^{jn} B_1^n$ et la conjecture (1) est vérifiée.

525

- Si $\mu - jn \leq 0 \implies 2 \nmid C^l$ d'où la contradiction avec $C^l = 2^{im} A_1^m + 2^{jn} B_1^n$.

** D-2-2-1-1-2- Nous supposons que $2|(p' - 2a') \implies p' - 2a' = 2^\alpha . P$, avec $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et $2 \nmid P$. Il s'ensuit que $B_1^n C^l = \omega^s 2^{\mu+\alpha-jn} \Omega . P$:

530

- Si $\mu + \alpha - jn \geq 1 \implies 2|C^l \implies 2|C$, pas de contradiction avec $C^l = 2^{im} A_1^m + 2^{jn} B_1^n$ et la conjecture (1) est vérifiée.

- Si $\mu + \alpha - jn \leq 0 \implies 2 \nmid C^l$ d'où la contradiction avec $C^l = 2^{im} A_1^m + 2^{jn} B_1^n$.

** D-2-2-1-2- Nous supposons maintenant que $2|C^n \implies 2|C$. En utilisant la même méthode décrite ci-dessus, nous obtenons les mêmes résultats.

535

4.8. Cas $3|a$ et $b = 4p'$ $b \neq 2$ avec $p'|p$:

$3|a \implies a = 3a'$, $b = 4p'$ avec $p = k.p'$, $k \neq 1$ sinon $b = 4p$, ce cas a été étudié (voir paragraphe 4.6), alors nous avons :

$$A^{2m} = \frac{4.p}{3} \cdot \frac{a}{b} = \frac{4.k.p'.3.a'}{12p'} = k.a' \quad (107)$$

Calculons $B^n C^l$:

$$B^n C^l = \sqrt[3]{\rho^2} \left(3 \sin^2 \frac{\theta}{3} - \cos^2 \frac{\theta}{3} \right) = \sqrt[3]{\rho^2} \left(3 - 4 \cos^2 \frac{\theta}{3} \right) \quad (108)$$

mais $\sqrt[3]{\rho^2} = \frac{p}{3}$, d'où en utilisant $\cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{3.a'}{b}$:

$$B^n C^l = \sqrt[3]{\rho^2} \left(3 - 4 \cos^2 \frac{\theta}{3} \right) = \frac{p}{3} \left(3 - 4 \frac{3.a'}{b} \right) = p \cdot \left(1 - \frac{4.a'}{b} \right) = k(p' - a') \quad (109)$$

540 Comme $p = b.p'$, et $p' > 1$, nous avons :

$$B^n C^l = k(p' - a') \quad (110)$$

$$\text{et } A^{2m} = k.a' \quad (111)$$

** E-1- Nous supposons que k est premier. De $A^{2m} = k.a' = (A^m)^2 \implies k|a'$ et $a' = k.a'' \implies A^m = k.a''$. Par suite $k|A^m \implies k|A \implies A = k^i.A_1$ avec $i \geq 1$ et $k \nmid A_1$. $k^{mi} A_1^m = k.a'' \implies a'' = k^{mi-1} A_1^m$. De $B^n C^l = k(p' - a') \implies k|(B^n C^l) \implies k|B^n$ ou $k|C^l$.

545

** E-1-1- Supposons que $k|B^n \implies k|B \implies B = k^j.B_1$ avec $j \geq 1$ et $k \nmid B_1$. Par suite $k^{n.j-1} B_1^n C^l = p' - a'$. Comme $n.j - 1 \geq 2 \implies k|(p' - a')$. Or $k|a' \implies k|a$, d'où $k|p' \implies k|(4p' = b)$ et on arrive à la contradiction que a, b sont copremiers.

550 ** E-1-2- Supposons que $k|C^l$, nous obtenons le même résultat que si $k|B^n$.

** E-2- Nous supposons k est non premier.

555 ** E-2-1- Supposons que $k = 4 \implies p = 4p' = b$, c'est le cas 4.3 déjà étudié ci-dessus.

** E-2-2- Nous supposons que $k \geq 6$ non premier. Soit ω un nombre premier tel que $k = \omega^s.k_1$, avec $s \geq 1$, $\omega \nmid k_1$. Les équations (110-111) deviennent :

$$B^n C^l = \omega^s.k_1(p' - a') \quad (112)$$

$$\text{et } A^{2m} = \omega^s.k_1.a' \quad (113)$$

** E-2-2-1- Nous supposons que $\omega = 2$.

560

** E-2-2-1-1- Si $2|a' \implies 2|(3a' = a)$, mais $2|(4p' = b)$, par suite la contradiction avec a, b copremiers.

** E-2-2-1-2- Nous avons $2 \nmid a'$. De l'équation (113), il s'ensuit que $2|A^{2m} \implies 2|A \implies A = 2^i A_1$ avec $2 \nmid A_1$ et :

$$B^n C^l = 2^s k_1 (p' - a')$$

** E-2-2-1-2-1- Supposons que $2 \nmid (p' - a')$, de l'expression ci-dessus, nous avons
565 $2|(B^n C^l) \implies 2|B^n$ ou $2|C^l$.

** E-2-2-1-2-1-1- Si $2|B^n \implies 2|B \implies B = 2^j B_1$ avec $2 \nmid B_1$. Par suite $B_1^n C^l = 2^{2im-jn} k_1 (p' - a')$:

- Si $2im - jn \geq 1 \implies 2|C^l \implies 2|C$, il n'a pas de contradiction avec $C^l =$
570 $2^{im} A_1^m + 2^{jn} B_1^n$ et la conjecture (1) est vérifiée.

- Si $2im - jn \leq 0 \implies 2 \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = 2^{im} A_1^m + 2^{jn} B_1^n \implies 2|C^l$.

** E-2-2-1-2-1-2- Si $2|C^l \implies 2|C$, en utilisant la même méthode décrite ci-
575 dessus, nous obtenons les mêmes résultats.

** E-2-2-1-2-2- Supposons que $2|(p' - a')$. Comme $2 \nmid a' \implies 2 \nmid p'$. $2|(p' - a') \implies p' - a' = 2^\alpha . P$ avec $\alpha \geq 1$ et $2 \nmid P$. L'équation (112) s'écrit :

$$B^n C^l = 2^{s+\alpha} k_1 . P = 2^{2im+\alpha} k_1 . P \quad (114)$$

d'où $2|(B^n C^l) \implies 2|B^n$ ou $2|C^l$.

580

** E-2-2-1-2-2-1- Nous supposons que $2|B^n \implies 2|B \implies B = 2^j B_1$, avec $2 \nmid B_1$. L'équation (114) s'écrit $B_1^n C^l = 2^{2im+\alpha-jn} k_1 P$:

- Si $2im + \alpha - jn \geq 1 \implies 2|C^l \implies 2|C$, il n'a pas de contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n$ et la conjecture (1) est vérifiée.

585 - Si $2im + \alpha - jn \leq 0 \implies 2 \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n \implies 2|C^l$.

** E-2-2-1-2-2-2- Nous supposons que $2|C^l \implies 2|C$. Utilisant la même méthode décrite ci-dessus, nous obtenons les mêmes résultats.

590

** E-2-2-2- Nous supposons que $\omega \neq 2$. Rappelons les équations :

$$A^{2m} = \omega^s . k_1 . a' \quad (115)$$

$$B^n C^l = \omega^s . k_1 (p' - a') \quad (116)$$

** E-2-2-2-1- Nous supposons que ω, a' sont copremiers, donc $\omega \nmid a'$. De l'équation (115), nous avons $\omega|A^{2m} \implies \omega|A \implies A = \omega^i A_1$ avec $\omega \nmid A_1$ et $s = 2im$.

595 ** E-2-2-2-1-1- Supposons que $\omega \nmid (p' - a')$. De l'équation (116) ci-dessus, nous avons $\omega|(B^n C^l) \implies \omega|B^n$ ou $\omega|C^l$.

** E-2-2-2-1-1-1- Si $\omega|B^n \implies \omega|B \implies B = \omega^j B_1$ avec $\omega \nmid B_1$. Par suite $B_1^n C^l = 2^{2im-jn} k_1 (p' - a')$:

600 - Si $2im - jn \geq 1 \implies \omega|C^l \implies \omega|C$, il n'a pas de contradiction avec $C^l = \omega^{im}A_1^m + \omega^{jn}B_1^n$ et la conjecture (1) est vérifiée.

- Si $2im - jn \leq 0 \implies \omega \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = \omega^{im}A_1^m + \omega^{jn}B_1^n \implies \omega|C^l$.

605 ** E-2-2-2-1-1-2- Si $\omega|C^l \implies \omega|C$, en utilisant la même méthode décrite ci-dessus, nous obtenons les mêmes résultats.

** E-2-2-2-1-2- Supposons que $\omega|(p' - a') \implies \omega \nmid p'$ sinon $\omega|a'$. $\omega|(p' - a') \implies p' - a' = \omega^\alpha . P$ avec $\alpha \geq 1$ et $\omega \nmid P$. L'équation (116) s'écrit :

$$B^n C^l = \omega^{s+\alpha} k_1 . P = \omega^{2im+\alpha} k_1 . P \quad (117)$$

610 d'où $\omega|(B^n C^l) \implies \omega|B^n$ ou $\omega|C^l$.

** E-2-2-2-1-2-1- Nous supposons que $\omega|B^n \implies \omega|B \implies B = \omega^j B_1$, avec $\omega \nmid B_1$. L'équation (117) s'écrit $B_1^n C^l = 2^{2im+\alpha-jn} k_1 P$:

- Si $2im + \alpha - jn \geq 1 \implies \omega|C^l \implies \omega|C$, il n'a pas de contradiction avec
615 $C^l = \omega^{im} A_1^m + \omega^{jn} B_1^n$ et la conjecture (1) est vérifiée.

- Si $2im + \alpha - jn \leq 0 \implies \omega \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = \omega^{im} A_1^m + \omega^{jn} B_1^n \implies \omega|C^l$.

** E-2-2-2-1-2-2- Nous supposons que $\omega|C^l \implies \omega|C$. Utilisant la même méthode
620 décrite ci-dessus, nous obtenons les mêmes résultats.

** E-2-2-2-2- Nous supposons que ω, a' ne sont pas copremiers, donc $a' = \omega^\beta \cdot a''$ avec $\omega \nmid a''$. L'équation (115) devient :

$$A^{2m} = \omega^s k_1 a' = \omega^{s+\beta} k_1 a'' \quad (118)$$

Nous avons $\omega|A^{2m} \implies \omega|A \implies A = \omega^i A_1$ avec $\omega \nmid A_1$ et $s + \beta = 2im$.

625

** E-2-2-2-2-1- Supposons que $\omega \nmid (p' - a') \implies \omega \nmid p' \implies \omega \nmid (b = 4p')$. De l'équation (116), nous avons $\omega|(B^n C^l) \implies \omega|B^n$ ou $\omega|C^l$.

** E-2-2-2-2-1-1- Si $\omega|B^n \implies \omega|B \implies B = \omega^j B_1$ avec $\omega \nmid B_1$. Par suite
630 $B_1^n C^l = 2^{s-jn} k_1 (p' - a')$:

- Si $s - jn \geq 1 \implies \omega|C^l \implies \omega|C$, il n'a pas de contradiction avec $C^l = \omega^{im} A_1^m + \omega^{jn} B_1^n$ et la conjecture (1) est vérifiée.

- Si $s - jn \leq 0 \implies \omega \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = \omega^{im} A_1^m + \omega^{jn} B_1^n \implies \omega|C^l$.

635

** E-2-2-2-2-1-2- Si $\omega|C^l \implies \omega|C$, en utilisant la même méthode décrite ci-dessus, nous obtenons les mêmes résultats.

** E-2-2-2-2- Supposons que $\omega|(p' - a' = p' - \omega^\beta \cdot a^n) \implies \omega|p' \implies \omega|(4p' = b)$,
640 mais $\omega|a' \implies \omega|a$. D'où la contradiction avec a, b copremiers.

L'étude des cas du 4.8 est achevée.

4.9. Cas $3|a$ et $b|4p$:

$a = 3a'$ et $4p = k_1 b$. Comme $A^{2m} = \frac{4p}{3} \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3} \frac{3a'}{b} = k_1 a'$ et $B^n C^l$:

$$B^n C^l = \sqrt[3]{\rho^2} \left(3 \sin^2 \frac{\theta}{3} - \cos^2 \frac{\theta}{3} \right) = \frac{p}{3} \left(3 - 4 \cos^2 \frac{\theta}{3} \right) = \frac{p}{3} \left(3 - 4 \frac{3a'}{b} \right) = \frac{k_1}{4} (b - 4a')$$

(119)

645 Comme $B^n C^l$ est un entier, on doit avoir $4|k_1$, ou $4|(b - 4a')$ ou $(2|k_1$ et $2|(b - 4a'))$.

** F-1- Si $k_1 = 1 \implies b = 4p$: c'est le cas 4.6.

** F-2- Si $k_1 = 4 \implies p = b$: c'est le cas 4.3.

650

** F-3- Si $k_1 = 2$ et $2|(b - 4a')$: Dans ce cas, nous avons $A^{2m} = 2a' \implies 2|a' \implies 2|a$. $2|(b - 4a') \implies 2|b$ d'où la contradiction avec a, b copremiers. Donc ce cas est impossible.

655 ** F-4- Si $2|k_1$ et $2|(b - 4a')$: $2|(b - 4a') \implies 2|b \implies b = 2b'$ et $2|k_1 \implies k_1 = 2k'_1$ avec $k'_1 > 2$ et nous avons $A^{2m} = 2k'_1 a'$, $B^n C^l = k'_1 (b' - 2a')$:

** F-4-1- Si k'_1 est premier $\neq 2$, alors $A^{2m} = 2k'_1 a' \implies 2|a' \implies 2|a$, or $2|b$ d'où la contradiction avec a, b copremiers, ce cas est impossible.

660

** F-4-2- Si k'_1 est non premier. De $A^{2m} = 2k'_1 a' \implies 2|(k'_1 \cdot a')$. Si $2|a' \implies 2|a$ d'où la contradiction avec a, b copremiers, ce cas est impossible. Nous supposons que $2|k'_1$ et $2 \nmid a'$, de $B^n C^l = k'_1 (b' - 2a') \implies 2|(B^n C^l) \implies 2|B^n$ ou $2|C^l$.

665 ** F-4-2-1- Supposons que $2|B^n \implies 2|B$, comme $2|A$ par suite $2|C^l \implies 2|C$.
Alors la conjecture (1) est vérifiée.

** F-4-2-2- De même, si $2|C^l$, nous arrivons à $2|B^n \implies 2|B$ et nous obtenons
que la conjecture (1) est vérifiée.

670

** F-5- Nous supposons que $4|k_1$ avec $k_1 > 4 \implies k_1 = 4k'_2$, on a donc :

$$A^{2m} = 4k'_2 a' \quad (120)$$

$$B^n C^l = k'_2 (b - 4a') \quad (121)$$

** F-5-1- Nous supposons k'_2 est premier, de (120), nous avons $k'_2|a'$. De (121),
 $k'_2|(B^n C^l) \implies k'_2|B^n$ ou $k'_2|C^l$.

675 ** F-5-1-1- Supposons $k'_2|B^n \implies k'_2|B \implies B = k_2'^{\beta} . B_1$ avec $\beta \geq 1$ et $k'_2 \nmid B_1$.
Par suite, nous avons $k_2'^{n\beta-1} B_1^n = b - 4a' \implies k'_2|b$ d'où la contradiction avec
 a, b copremiers. Donc ce cas est impossible.

** F-5-1-2- Même résultat si nous supposons que $k'_2|C^l$.

680

** F-5-2- Nous supposons que k'_2 est non premier.

** F-5-2-1- Nous supposons que k'_2 et a' sont copremiers. De (120), k'_2 s'écrit sous
la forme $k'_2 = q_1^{2j} . q_2^2$ et $q_1 \nmid q_2$ et q_1 premier. $B^n C^l = q_1^{2j} . q_2^2 (b - 4a') \implies q_1|B^n$
685 ou $q_1|C^l$.

** F-5-2-1-1- Supposons que $q_1|B^n \implies q_1|B \implies B = q_1^f . B_1$ avec $q_1 \nmid B_1$. Nous
obtenons $B_1^n C^l = q_1^{2j-fn} q_2^2 (b - 4a')$:

- Si $2j - f.n \geq 1 \implies q_1|C^l \implies q_1|C$ mais $C^l = A^m + B^n$ donne aussi $q_1|C$.

690 - Si $2j - f.n = 0$, nous avons $B_1^n C^l = q_2^2 (b - 4a')$, mais $C^l = A^m + B^n$ donne
 $q_1|C$ par suite $q_1|(b - 4a')$. Comme q_1 et a' sont premiers alors $q_1 \nmid b$.

- Si $2j - f.n < 0 \implies q_1|(b - 4a') \implies q_1 \nmid b$ et $C^l = A^m + B^n$ donne $q_1|C$.

Dans les 3 cas précédents, la conjecture (1) est vérifiée.

695 ** F-5-2-1-2- Nous obtenons les mêmes résultats si $q_1|C^l$.

** F-5-2-2- Nous supposons que k'_2 et a' non copremiers. Soit q_1 premier tel que $q_1|k'_2$ et $q_1|a'$. Ecrivons k'_2 sous la forme $q_1^j \cdot q_2$ avec $q_1 \nmid q_2$. De $A^{2m} = 2k'_2 a' \implies q_1|A^{2m} \implies q_1|A$. Par suite de $B^n C^l = q_1^j q_2 (b - 4a')$ il s'ensuit que
700 $q_1|(B^n C^l) \implies q_1|B^n$ ou $q_1|C^l$.

** F-5-2-2-1- Supposons que $q_1|B^n \implies q_1|B \implies B = q_1^\beta \cdot B_1$ avec $\beta \geq 1$ et $q_1 \nmid B_1$. Par suite, nous avons $q_1^{n\beta} B_1^n C^l = q_1^j q_2 (b - 4a') \implies B_1 C^l = q_1^{j-n\beta} q_2 (b - 4a')$.
- Si $j - n\beta \geq 1$, alors $q_1|C^l \implies q_1|C$, mais $C^l = A^m + B^n$ donne $q_1|C$, donc la
705 conjecture (1) est vérifiée.

- Si $j - n\beta = 0$, nous obtenons $B_1 C^l = q_2 (b - 4a')$, et $q_1|(b - 4a') \implies q_1|b$ car $q_1|a' \implies q_1|a$ d'où la contradiction avec a, b copremiers.

- Si $j - n\beta < 0 \implies q_2|(b - 4a') \implies q_2|b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

710

** F-5-2-2-2- Nous obtenons les mêmes résultats si nous supposons que $q_1|C^l$.

** F-6- Si $4 \nmid (b - 4a')$ et $4 \nmid k_1$ c'est impossible. Nous supposons maintenant que $4|(b - 4a') \implies 4|b$, et $b - 4a' = 4^t \cdot g$ avec $4 \nmid g$, alors nous avons :

$$A^{2m} = k_1 a'$$

$$B^n C^l = k_1 \cdot 4^{t-1} \cdot g$$

715 ** F-6-1- Nous supposons que k_1 est premier. De $A^{2m} = k_1 a'$ il s'ensuit facilement que $k_1|a'$. De $B^n C^l = k_1 \cdot 4^{t-1} \cdot g$, nous obtenons que $k_1|(B^n C^l) \implies k_1|B^n$ ou $k_1|C^l$.

** F-6-1-1- Supposons que $k_1|B^n \implies k_1|B \implies B = k_1^j \cdot B_1$ avec $j > 0$ et
720 $k_1 \nmid B_1$. D'où $k_1^{n \cdot j} B_1^n C^l = k_1 \cdot 4^{t-1} \cdot g \implies k_1^{n \cdot j - 1} B_1^n C^l = 4^{t-1} \cdot g$. Or $n \geq 3$ et

$j \geq 1$ donc $n.j - 1 \geq 2$. Par suite comme $k_1 \neq 2$ alors $k_1|g \implies k_1|(b - 4a')$, mais $k_1|a' \implies k_1|b$ d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** F-6-1-2- Nous obtenons le même résultat si $k_1|C^l$.

725

** F-6-2- Nous supposons que k_1 est non premier, différent de 4 (cas déjà vu), avec $4 \nmid k_1$.

730

** F-6-2-1- Si $k_1 = 2k'$ avec k' impair > 1 . D'où $A^{2m} = 2k'a' \implies 2|a' \implies 2|a$ mais $4|b$ par suite la contradiction avec a, b copremiers.

** F-6-2-2- Nous supposons que k_1 est impair avec k_1 et a' copremiers. Ecrivons k_1 s'écrit sous la forme $k_1 = q_1^j.q_2$ avec $q_1 \nmid q_2$ et q_1 premier et $j \geq 1$. $B^n C^l = q_1^j.q_2 4^{t-1}g \implies q_1|B^n$ ou $q_1|C^l$.

735

** F-6-2-2-1- Supposons que $q_1|B^n \implies q_1|B \implies B = q_1^f.B_1$ avec $q_1 \nmid B_1$. Nous obtenons $B_1^n C^l = q_1^{j-f.n} q_2 4^{t-1}g$.

- Si $j - f.n \geq 1 \implies q_1|C^l \implies q_1|C$ mais $C^l = A^m + B^n$ donne aussi $q_1|C$.

- Si $j - f.n = 0$, nous avons $B_1^n C^l = q_2 4^{t-1}g$, mais $C^l = A^m + B^n$ donne $q_1|C$

740

par suite $q_1|(b - 4a')$. Comme q_1 et a' sont copremiers alors $q_1 \nmid b$.

- Si $j - f.n < 0 \implies q_1|(b - 4a') \implies q_1 \nmid b$ et $C^l = A^m + B^n$ donne $q_1|C$.

Dans les 3 cas précédents, la conjecture (1) est vérifiée.

** F-6-2-2-2- Nous obtenons le même résultat si $q_1|C^l$.

745

** F-6-2-3- Nous supposons que k_1 et a' non copremiers. Soit q_1 premier tel que $q_1|k_1$ et $q_1|a'$. Ecrivons k_1 sous la forme $q_1^j.q_2$ avec $q_1 \nmid q_2$. De $A^{2m} = k_1 a' \implies q_1|A^{2m} \implies q_1|A$. Par suite de $B^n C^l = q_1^j q_2 (b - 4a')$ il s'ensuit que $q_1|(B^n C^l) \implies q_1|B^n$ ou $q_1|C^l$.

750

** F-6-2-3-1- Supposons que $q_1|B^n \implies q_1|B \implies B = q_1^\beta.B_1$ avec $\beta \geq 1$ et $q_1 \nmid$

B_1 . Par suite, nous avons $q_1^{n\beta} B_1^n C^l = q_1^j q_2(b-4a') \implies B_1 C^l = q_1^{j-n\beta} q_2(b-4a') :$

- Si $j - n\beta \geq 1$, alors $q_1 | C^l \implies q_1 | C$, mais $C^l = A^m + B^n$ donne $q_1 | C$, donc la conjecture (1) est vérifiée.

755 - Si $j - n\beta = 0$, nous obtenons $B_1 C^l = q_2(b - 4a')$, or $q_1 | A$ et $q_1 | B$ donc $q_1 | C$ et par suite $q_1 | (b - 4a') \implies q_1 | b$ car $q_1 | a' \implies q_1 | a$ d'où la contradiction avec a, b copremiers.

- Si $j - n\beta < 0 \implies q_1 | (b - 4a') \implies q_1 | b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

760

** F-6-2-3-2- Nous obtenons les mêmes résultats si nous supposons que $q_1 | C^l$.

5. Hypothèse : $\{3|p \text{ et } b|4p\}$

5.1. Cas $b = 2$ et $3|p$:

$3|p \implies p = 3p'$ avec $p' \neq 1$ parce que $3 \ll p$, et $b = 2$, nous obtenons :

$$A^{2m} = \frac{4p.a}{3b} = \frac{4.3p'.a}{3b} = \frac{4.p'.a}{2} = 2.p'.a \quad (122)$$

765 Comme :

$$\frac{1}{4} < \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{a}{b} = \frac{a}{2} < \frac{3}{4} \implies a < 2 \implies a = 1 \quad (123)$$

mais $a > 1$, alors le cas $b = 2$ et $3|p$ est impossible.

5.2. Cas $b = 4$ et $3|p$:

Nous avons $3|p \implies p = 3p'$ avec $p' \in \mathbb{N}^*$, il s'ensuit :

$$A^{2m} = \frac{4p.a}{3b} = \frac{4.3p'.a}{3 \times 4} = p'.a \quad (124)$$

et :

$$\frac{1}{4} < \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{a}{b} = \frac{a}{4} < \frac{3}{4} \implies 1 < a < 3 \implies a = 2 \quad (125)$$

770 mais a, b sont copremiers, alors le cas $b = 4$ et $3|p$ est impossible.

5.3. Cas : $b \neq 2, b \neq 4, b|p$ et $3|p$:

Comme $3|p$, alors $p = 3p'$ et :

$$A^{2m} = \frac{4p}{3} \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3} \frac{a}{b} = \frac{4 \times 3p'}{3} \frac{a}{b} = \frac{4p'a}{b} \quad (126)$$

Nous considérons le cas : $b|p' \implies p' = bp''$ et $p'' \neq 1$ (si $p'' = 1$, alors $p = 3b$, voir paragraphe 5.8 Cas $k' = 1$). Finalement, nous obtenons :

$$A^{2m} = \frac{4bp''a}{b} = 4ap''; \quad B^n C^l = p'' \cdot (3b - 4a) \quad (127)$$

775 ** G-1- Supposons que p'' est premier, d'où $A^{2m} = 4ap'' = (A^m)^2 \implies p''|a$. Or $B^n C^l = p''(3b - 4a) \implies p''|B^n$ ou $p''|C^l$.

** G-1-1- Si $p''|B^n \implies p''|B \implies B = p''B_1$ avec $B_1 \in \mathbb{N}^*$. Par suite : $p''^{n-1}B_1^n C^l = 3b - 4a$. Or $n > 2$, alors $(n-1) > 1$ et $p''|a$, d'où $p''|3b \implies p'' = 3$
780 ou $p''|b$.

** G-1-1-1- Si $p'' = 3 \implies 3|a$, avec a s'écrit sous la forme $a = 3a'^2$. Or $A^m = 6a' \implies 3|A^m \implies 3|A \implies A = 3A_1$. D'où $3^{m-1}A_1^m = 2a' \implies 3|a' \implies a' = 3a''$. Mais $p''^{n-1}B_1^n C^l = 3^{n-1}B_1^n C^l = 3b - 4a \implies 3^{n-2}B_1^n C^l = b - 36a''^2$.
785 Comme $n > 2 \implies n-2 \geq 1$, donc $3|b$ d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** G-1-1-2- Nous supposons maintenant que $p''|b$, mais $p''|a$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

790 ** G-1-2- De la même façon, si $p''|C^l$ nous arrivons à des contradictions.

** G-2- Nous considérons que p'' n'est pas premier.

** G-2-1- p'', a copremiers : $A^{2m} = 4ap'' \implies A^m = 2a' \cdot p_1$ avec $a = a'^2$ et
795 $p'' = p_1^2$, donc a', p_1 sont aussi copremiers. Comme $A^m = 2a' \cdot p_1$, alors $2|a'$ ou $2|p_1$.

** G-2-1-1- 2|a', alors 2|a' \implies 2 \nmid p₁. Or p'' = p₁².

800 ** G-2-1-1-1- Si p₁ est premier, c'est impossible avec A^m = 2a'.p₁.

** G-2-1-1-2- Donc p₁ est non premier et il s'écrit p₁ = ω^m \implies p'' = ω^{2m}. Par suite BⁿC^l = ω^{2m}(3b - 4a).

805 ** G-2-1-1-2-1- Si ω est premier, il est différent de 2, alors ω|(BⁿC^l) \implies ω|Bⁿ ou ω|C^l.

** G-2-1-1-2-1-1- Si ω|Bⁿ \implies ω|B \implies B = ω^jB₁ avec ω \nmid B₁, d'où B₁ⁿ.C^l = ω^{2m-nj}(3b - 4a).

810

** G-2-1-1-2-1-1-1- Si 2m - n.j = 0, nous obtenons B₁ⁿ.C^l = 3b - 4a. Comme C^l = A^m + Bⁿ \implies ω|C^l \implies ω|C, et ω|(3b - 4a). Or ω ≠ 2 et ω est premier avec a' donc premier avec a, par suite ω \nmid (3b), donc ω ≠ 3 et ω \nmid b. La conjecture (1) est vérifiée.

815

** G-2-1-1-2-1-1-2- Si 2m - nj ≥ 1, là aussi, avec le même raisonnement, nous avons ω|C^l \implies ω|C et ω|(3b - 4a) et ω \nmid a et ω ≠ 3 et ω \nmid b. La conjecture (1) est vérifiée.

820

** G-2-1-1-2-1-1-3- Si 2m - nj < 0 \implies ω^{n.j-2m}B₁ⁿ.C^l = 3b - 4a. Comme ω|C utilisant C^l = A^m + Bⁿ d'où C = ω^h.C₁ \implies ω^{n.j-2m+h.l}B₁ⁿ.C₁^l = 3b - 4a. Si n.j - 2m + h.l < 0 \implies ω|B₁ⁿC₁^l par suite la contradiction avec ω \nmid B₁ ou ω \nmid C₁. Donc n.j - 2m + h.l > 0 et ω|(3b - 4a) avec ω, a, b copremiers et la conjecture est vérifiée.

825

** G-2-1-1-2-1-2- Nous obtenons les mêmes résultats si ω|C^l.

** G-2-1-1-2-2- Maintenant, p'' = ω^{2m} et ω non premier, nous écrivons ω = ω₁^f.Ω

avec ω_1 premier $\nmid \Omega$ et $f \geq 1$ un entier, et $\omega_1 | A$. D'où $B^n C^l = \omega_1^{2f.m} \Omega^{2m} (3b -$
830 $4a) \implies \omega_1 | (B^n C^l) \implies \omega_1 | B^n$ ou $\omega_1 | C^l$.

** G-2-1-1-2-2-1- Si $\omega_1 | B^n \implies \omega_1 | B \implies B = \omega_1^j B_1$ avec $\omega_1 \nmid B_1$, d'où
 $B_1^n . C^l = \omega_1^{2.m-n.j} \Omega^{2m} (3b - 4a)$:

835 ** G-2-1-1-2-2-1-1- Si $2f.m - n.j = 0$, nous obtenons $B_1^n . C^l = \Omega^{2m} (3b - 4a)$.
Comme $C^l = A^m + B^n \implies \omega_1 | C^l \implies \omega_1 | C$, et $\omega_1 | (3b - 4a)$. Or $\omega_1 \neq 2$ et ω_1 est
premier avec a' donc premier avec a , par suite $\omega_1 \nmid (3b)$, donc $\omega_1 \neq 3$ et $\omega_1 \nmid b$.
La conjecture (1) est vérifiée.

840 ** G-2-1-1-2-2-1-2- Si $2f.m - n.j \geq 1$, là aussi, avec le même raisonnement, nous
avons $\omega_1 | C^l \implies \omega_1 | C$ et $\omega_1 | (3b - 4a)$ et $\omega_1 \nmid a$ et $\omega_1 \neq 3$ et $\omega_1 \nmid b$. La conjecture
(1) est vérifiée.

** G-2-1-1-2-2-1-3- Si $2f.m - n.j < 0 \implies \omega_1^{n.j-2m.f} B_1^n . C^l = \Omega^{2m} (3b - 4a)$.
845 Comme $\omega_1 | C$ utilisant $C^l = A^m + B^n$ d'où $C = \omega_1^h . C_1 \implies \omega_1^{n.j-2m.f+h.l} B_1^n . C_1^l =$
 $\Omega^{2m} (3b - 4a)$. Si $n.j - 2m.f + h.l < 0 \implies \omega_1 | B_1^n C_1^l$ par suite la contradiction
avec $\omega_1 \nmid B_1$ et $\omega_1 \nmid C_1$. Donc $n.j - 2m.f + h.l > 0$ et $\omega_1 | (3b - 4a)$ avec ω_1, a, b
coprimiers et la conjecture (1) est vérifiée.

850 ** G-2-1-1-2-2-2- Nous obtenons les mêmes résultats si $\omega_1 | C^l$.

** G-2-1-2- Si $2|p_1$: alors $2|p_1 \implies 2 \nmid a' \implies 2 \nmid a$. Or $p'' = p_1^2$.

** G-2-1-2-1- Si p_1 est premier égal à 2, nous obtenons $A^m = 4a' \implies 2|a'$, d'où
855 la contradiction avec a, b coprimiers.

** G-2-1-2-2- Donc p_1 est non premier et $2|p_1$. Comme $A^m = 2a'p_1$, p_1 s'écrit
sous la forme $p_1 = 2^{m-1} \omega^m \implies p'' = 2^{2m-2} \omega^{2m}$. Par suite $B^n C^l = 2^{2m-2} \omega^{2m} (3b -$
 $4a) \implies 2|B^n$ ou $2|C^l$.

** G-2-1-2-2-1- Si $2|B^n \implies 2|B$, comme $2|A$, par suite $2|C$. De $B^n C^l = 2^{2m-2}\omega^{2m}(3b-4a)$ s'ensuit que si $2|(3b-4a) \implies 2|b$ mais comme $2 \nmid a$, il n'y aura pas de contradiction avec a, b copremiers et la conjecture (1) est vérifiée.

865 ** G-2-1-2-2-2- Si $2|C^l$, nous obtenons les mêmes résultats.

** G-2-2- p^n, a non copremiers : soit ω un nombre premier tel que $\omega|a$ et $\omega|p^n$.

** G-2-2-1- Supposons que $\omega = 3$. Comme $A^{2m} = 4ap^n \implies 3|A$, or $3|p$,
 870 comme $p = A^{2m} + B^{2n} + A^m B^n \implies 3|B^{2n} \implies 3|B$, par suite $3|C^l \implies 3|C$.
 Nous écrivons $A = 3^i A_1, B = 3^j B_1, C = 3^h C_1$ avec 3 est copremier avec
 A_1, B_1 et C_1 et $p = 3^{2im} A_1^{2m} + 3^{2nj} B_1^{2n} + 3^{im+jn} A_1^m B_1^n = 3^k .g$ avec $k =$
 $\min(2im, 2jn, im + jn)$ et $3 \nmid g$. Nous avons aussi $(\omega = 3)|a$ et $(\omega = 3)|p^n$ ce
 qui donne $a = 3^\alpha a_1, 3 \nmid a_1$ et $p^n = 3^\mu p_1, 3 \nmid p_1$ avec $A^{2m} = 4ap^n = 3^{2im} A_1^{2m} =$
 875 $4 \times 3^{\alpha+\mu} .a_1 .p_1 \implies \alpha + \mu = 2im$. Comme $p = 3p' = 3b .p^n = 3b .3^\mu p_1 = 3^{\mu+1} .b .p_1$.
 L'exposant du facteur 3 de p est k , l'exposant du facteur 3 du membre à
 gauche de l'équation précédente est $\mu + 1$ ajouté de l'exposant β de 3 du
 facteur b , avec $\beta \geq 0$, soit $\min(2im, 2jn, im + jn) = \mu + 1 + \beta$ en rappelant
 que $\alpha + \mu = 2im$. Mais $B^n C^l = p^n (4b - 3a)$ ce qui donne $3^{(nj+hl)} B_1^n C_1^l =$
 880 $3^{\mu+1} p_1 (b - 4 \times 3^{(\alpha-1)} a_1) = 3^{\mu+1} p_1 (3^\beta b_1 - 4 \times 3^{(\alpha-1)} a_1), 3 \nmid b_1$. Nous avons aussi
 $A^m + B^n = C^l$ donne $3^{im} A_1^m + 3^{jn} B_1^n = 3^{hl} C_1^l$. Posons $\epsilon = \min(im, jn)$, nous
 avons $\epsilon = hl = \min(im, jn)$. Nous avons les conditions :

$$k = \min(2im, 2jn, im + jn) = \mu + 1 + \beta \quad (128)$$

$$\alpha + \mu = 2im \quad (129)$$

$$\epsilon = hl = \min(im, jn) \quad (130)$$

$$3^{(nj+hl)} B_1^n C_1^l = 3^{\mu+1} p_1 (3^\beta b_1 - 4 \times 3^{(\alpha-1)} a_1) \quad (131)$$

** G-2-2-1-1- $\alpha = 1 \implies a = 3a_1$ et $3 \nmid a_1$, l'équation (129) devient :

$$1 + \mu = 2im \quad (132)$$

et la première équation (128) s'écrit :

$$k = \min(2im, 2jn, im + jn) = 2im + \beta \quad (133)$$

885 - Si $k = 2im \implies \beta = 0$ soit $3 \nmid b$. Nous obtenons $2im \leq 2jn \implies im \leq jn$, et $2im \leq im + jn \implies im \leq jn$. La troisième équation donne $hl = im$. La dernière équation donne $nj + hl = \mu + 1 = 2im \implies im = nj$, par suite $im = nj = hl$ et $B_1^n C_1^l = p_1(b - 4a_1)$. Si a, b sont copremiers, la conjecture (1) est vérifiée.

- Si $k = 2in$ ou $k = im + in$, nous obtenons $\beta = 0$, $im = jn = hl$ et
890 $B_1^n C_1^l = p_1(b - 4a_1)$. Si a, b sont copremiers, la conjecture (1) est vérifiée.

** G-2-2-1-2- $\alpha > 1 \implies \alpha \geq 2$.

- Si $k = 2im \implies 2im = \mu + 1 + \beta$, or $\mu = 2im - \alpha$ ce qui donne $\alpha = 1 + \beta \geq 2 \implies \beta \neq 0 \implies 3|b$, mais $3|a$ c'est la contradiction avec a, b copremiers.

895 - Si $k = 2jn = \mu + 1 + \beta \leq 2im \implies \mu + 1 + \beta \leq \mu + \alpha \implies 1 + \beta \leq \alpha \implies \beta = 0$ ou $\beta = 1$. Si $\beta = 1 \implies 3|b$ or $3|a$, d'où la contradiction avec a, b copremiers. Si $\beta = 0 \implies 3 \nmid b$. Nous obtenons $jn = hl < im$ car $\alpha > 1$, par suite la conjecture (1) est vérifiée.

- Si $k = im + jn \implies im + jn \leq 2im \implies jn \leq im$, et $im + jn \leq 2jn \implies im \leq jn$, par suite $im = jn$. Comme $k = im + jn = 2im = 1 + \mu + \beta$ et $\alpha + \mu = 2im$ qui donne $\alpha = 1 + \beta \geq 2 \implies \beta \geq 1 \implies 3|b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** G-2-2-2- Nous supposons que $\omega \neq 3$. Nous écrivons $a = \omega^\alpha a_1$ avec $\omega \nmid a_1$ et
905 $p'' = \omega^\mu p_1$ avec $\omega \nmid p_1$. Comme $A^{2m} = 4ap'' = 4\omega^{\alpha+\mu} a_1 p_1 \implies \omega|A \implies A = \omega^i A_1$, $\omega \nmid A_1$. Or $B^n C^l = p''(3b - 4a) = \omega^\mu p_1(3b - 4a) \implies \omega|B^n C^l \implies \omega|B^n$ ou $\omega|C^l$.

** G-2-2-2-1- $\omega|B^n \implies \omega|B \implies B = \omega^j B_1$ et $\omega \nmid B_1$. De $A^m + B^n =$
910 $C^l \implies \omega|C^l \implies \omega|C$. Comme $p = bp' = 3bp'' = 3\omega^\mu b p_1 = \omega^k (\omega^{2im-k} A_1^{2m} + \omega^{2jn-k} B_1^{2n} + \omega^{im+jn-k} A_1^m B_1^n)$ avec $k = \min(2im, 2jn, im + jn)$. Par suite :

- Si $\mu = k$, alors $\omega \nmid b$ et la conjecture (1) est vraie.

- Si $k > \mu$, alors $\omega|b$, or $\omega|a$ d'où la contradiction avec a, b copremiers.
- Si $k < \mu$, il s'ensuit de :

$$3\omega^\mu b p_1 = \omega^k (\omega^{2im-k} A_1^{2m} + \omega^{2jn-k} B_1^{2n} + \omega^{im+jn-k} A_1^m B_1^n)$$

que $\omega|A_1$ ou $\omega|B_1$ ce qui en contradiction avec les hypothèses.

915

** G-2-2-2-2- Si $\omega|C^l \implies \omega|C \implies C = \omega^h C_1$ avec $\omega \nmid C_1$. De $A^m + B^n = C^l \implies \omega|(C^l - A^m) \implies \omega|B$. Par suite, nous obtenons les mêmes résultats de G-3-2-1- ci-dessus.

5.4. Cas $b = 3$ et $3|p$:

920 Comme $3|p \implies p = 3p'$, nous écrivons :

$$A^{2m} = \frac{4p}{3} \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3} \frac{a}{b} = \frac{4 \times 3p'}{3} \frac{a}{3} = \frac{4p'a}{3} \quad (134)$$

Comme A^{2m} est un entier et que a et b sont copremiers et $\cos^2 \frac{\theta}{3}$ ne peut pas prendre la valeur 1 en référence à l'équation (15), alors nous avons nécessairement $3|p' \implies p' = 3p''$ avec $p'' \neq 1$, sinon $p = 3p' = 3 \times 3p'' = 9$ mais $9 \ll (p = A^{2m} + B^{2n} + A^m B^n)$, l'hypothèse $p'' = 1$ est impossible, alors $p'' > 1$. D'où :

$$A^{2m} = \frac{4p'a}{3} = \frac{4 \times 3p'' a}{3} = 4p'' a; \quad B^n C^l = p'' \cdot (9 - 4a) \quad (135)$$

925 Comme $\frac{1}{4} < \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{a}{b} = \frac{a}{3} < \frac{3}{4} \implies 3 < 4a < 9 \implies$ comme $a > 1$, $a = 2$ et nous obtenons :

$$A^{2m} = 4p'' a = 8p''; \quad B^n C^l = \frac{3p''(9 - 4a)}{3} = p'' \quad (136)$$

Les 2 dernières équations ci-dessus impliquent que p'' n'est pas premier. Soit l'écriture de p'' en facteurs premiers : $p'' = \prod_{i \in I} p_i^{\alpha_i}$ où les p_i sont des entiers premiers et I un ensemble fini d'indices. Nous pouvons écrire $p'' = p_1^{\alpha_1} \cdot q_1$ avec
930 $p_1 \nmid q_1$. De (136), nous avons $p_1|A$ et $p_1|B^n C^l \implies p_1|B^n$ ou $p_1|C^l$.

** H-1- Supposons que $p_1|B^n \implies B = p_1^{\beta_1} \cdot B_1$ avec $p_1 \nmid B_1$ et $\beta_1 \geq 1$. Par suite, nous obtenons $B_1^n C^l = p_1^{\alpha_1 - n\beta_1} \cdot q_1$ avec les cas suivants :

- Si $\alpha_1 - n\beta_1 \geq 1 \implies p_1|C^l \implies p_1|C$, il s'ensuit que la conjecture (1) est vraie.

- Si $\alpha_1 - n\beta_1 = 0 \implies \alpha_1 = n\beta_1 \implies B_1C^l = q_1 \implies p_1 \nmid C^l$ ce qui en contradiction avec $p_1|(A^m - B^n)$ soit $p_1|C^l$. Donc ce cas est impossible.

- Si $\alpha_1 - n\beta_1 < 0$, nous obtenons $p_1^{n\beta_1 - \alpha_1} B_1^n C^l = q_1 \implies p_1|q_1$ ce qui en contradiction avec $p_1 \nmid q_1$. Donc ce cas est impossible.

940

** H-2- Supposons maintenant que $p_1|C^l \implies p_1|C \implies C = p_1^{\gamma_1} \cdot C_1$ avec $p_1 \nmid C_1$ et $\gamma_1 \geq 1$. Par suite, nous obtenons $B^n C_1^l = p_1^{\alpha_1 - l\gamma_1} \cdot q_1$ avec les cas suivants :

- Si $\alpha_1 - l\gamma_1 \geq 1 \implies p_1|B^n \implies p_1|B$, il s'ensuit que la conjecture (1) est vraie.

945

- Si $\alpha_1 - l\gamma_1 = 0 \implies \alpha_1 = l\gamma_1 \implies B^n C_1^l = q_1 \implies p_1 \nmid B^n$ ce qui en contradiction avec $p_1|(C^l - A^m)$ soit $p_1|B^n$. Donc ce cas est impossible.

- Si $\alpha_1 - l\gamma_1 < 0$, nous obtenons $p_1^{l\gamma_1 - \alpha_1} B^n C_1^l = q_1 \implies p_1|q_1$ ce qui en contradiction avec $p_1 \nmid q_1$. Donc ce cas est impossible.

5.5. Cas $3|p$ et $b = p$:

950 Nous avons $\cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{a}{b} = \frac{a}{p}$ et :

$$A^{2m} = \frac{4p}{3} \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3} \cdot \frac{a}{p} = \frac{4a}{3} \quad (137)$$

Comme A^{2m} est un entier, ce-ci implique que $3|a$, mais $3|p \implies 3|b$. Comme a et b sont copremiers, d'où la contradiction. Alors le cas $3|p$ et $b = p$ est impossible.

5.6. Cas $3|p$ et $b = 4p$:

$3|p \implies p = 3p'$, $p' \neq 1$ car $3 \ll p$, par suite $b = 4p = 12p'$.

$$A^{2m} = \frac{4p}{3} \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3} \frac{a}{b} = \frac{a}{3} \implies 3|a \quad (138)$$

955 car A^{2m} est un entier. Mais $3|p \implies 3|[(4p) = b]$, ce qui en contradiction avec l'hypothèse a, b copremiers. Alors le cas $b = 4p$ est impossible.

5.7. Cas $3|p$ et $b = 2p$:

$3|p \implies p = 3p'$, $p' \neq 1$ car $3 \ll p$, d'où $b = 2p = 6p'$.

$$A^{2m} = \frac{4p}{3} \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3} \frac{a}{b} = \frac{2a}{3} \implies 3|a \quad (139)$$

960 car A^{2m} est un entier, mais $3|p \implies 3|(2p) \implies 3|b$, ce qui en contradiction avec l'hypothèse a, b sont copremiers. Alors le cas $b = 2p$ est impossible.

5.8. Cas $3|p$ et $b \neq 3$ est un diviseur de p :

Nous avons $b = p' \neq 3$, et p s'écrit $p = kp'$ avec $3|k \implies k = 3k'$ et :

$$A^{2m} = \frac{4p}{3} \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3} \cdot \frac{a}{b} = 4ak' \quad (140)$$

$$B^n C^l = \frac{p}{3} \cdot \left(3 - 4 \cos^2 \frac{\theta}{3}\right) = k'(3p' - 4a) = k'(3b - 4a) \quad (141)$$

** I-1- $k' \neq 1$:

965

** I-1-1- Nous supposons que k' est premier, d'où $A^{2m} = 4ak' = (A^m)^2 \implies k'|a$.

Or $B^n C^l = k'(3b - 4a) \implies k'|B^n$ ou $k'|C^l$.

** I-1-1-1- Si $k'|B^n \implies k'|B \implies B = k'B_1$ avec $B_1 \in \mathbb{N}^*$. Par suite $k'^{n-1}B_1^n C^l =$
970 $3b - 4a$. Or $n > 2$, alors $(n-1) > 1$ et $k'|a$, d'où $k'|3b \implies k' = 3$ ou $k'|b$.

** I-1-1-1-1- Si $k' = 3 \implies 3|a$, avec a s'écrit sous la forme $a = 3a'^2$. Or
 $A^m = 6a' \implies 3|A^m \implies 3|A \implies A = 3A_1$ avec $A_1 \in \mathbb{N}^*$. D'où $3^{m-1}A_1^m =$
 $2a' \implies 3|a' \implies a' = 3a''$. Mais $k'^{n-1}B_1^n C^l = 3^{n-1}B_1^n C^l = 3b - 4a \implies$
975 $3^{n-2}B_1^n C^l = b - 36a''^2$. Comme $n > 2 \implies n-2 \geq 1$, donc $3|b$ d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** I-1-1-1-2- Nous supposons maintenant que $k'|b$, mais $k'|a$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

980

** I-1-1-2- De la même façon si $k'|C^l$, nous arrivons à des contradictions.

** I-1-2- On considère que k' n'est pas premier.

985 ** I-1-2-1- Nous supposons que k', a copremiers : $A^{2m} = 4ak' \implies A^m = 2a'.p_1$
avec $a = a'^2$ et $k' = p_1^2$, donc a', p_1 sont aussi copremiers. Comme $A^m = 2a'.p_1$
alors $2|a'$ ou $2|p_1$.

** I-1-2-1-1- $2|a'$, alors $2|a' \implies 2 \nmid p_1$. Or $k' = p_1^2$.

990

** I-1-2-1-1-1- Si p_1 est premier c'est impossible avec $A^m = 2a'.p_1$.

** I-1-2-1-1-2- Donc p_1 est supposé non premier et il s'écrit $p_1 = \omega^m \implies k' = \omega^{2m}$. Par suite $B^n C^l = \omega^{2m}(3b - 4a)$.

995

** I-1-2-1-1-2-1- Si ω est premier, il est différent de 2, alors $\omega|(B^n C^l) \implies \omega|B^n$
ou $\omega|C^l$.

** I-1-2-1-1-2-1-1- Si $\omega|B^n \implies \omega|B \implies B = \omega^j B_1$ avec $\omega \nmid B_1$, d'où $B_1^n . C^l =$
1000 $\omega^{2m-nj}(3b - 4a)$.

- Si $2m - nj = 0$, nous obtenons $B_1^n . C^l = 3b - 4a$, comme $C^l = A^m + B^n \implies$
 $\omega|C^l \implies \omega|C$, et $\omega|(3b - 4a)$. Or $\omega \neq 2$ et ω est premier avec a' donc premier
avec a , par suite $\omega \nmid (3b)$, donc $\omega \neq 3$ et $\omega \nmid b$. La conjecture (1) est vérifiée.

- Si $2m - nj \geq 1$, là aussi, avec le même raisonnement, nous avons $\omega|C^l \implies$
1005 $\omega|C$ et $\omega|(3b - 4a)$ et $\omega \nmid a$ et $\omega \neq 3$ et $\omega \nmid b$. La conjecture (1) est vérifiée.

- Si $2m - nj < 0 \implies \omega^{n.j-2m} B_1^n . C^l = 3b - 4a$. Comme $\omega|C$, utilisant
 $C^l = A^m + B^n$, d'où $C = \omega^h . C_1 \implies \omega^{n.j-2m+h.l} B_1^n . C_1^l = 3b - 4a$. Si $n.j - 2m +$
 $h.l < 0 \implies \omega|B_1^n C_1^l$, par suite la contradiction avec $\omega \nmid B_1$ ou $\omega \nmid C_1$. Donc
 $n.j - 2m + h.l > 0$ et $\omega|(3b - 4a)$ avec ω, a, b copremiers et la conjecture (1) est

1010 vérifiée.

** I-1-2-1-1-2-1-2- Si $\omega|C^l$, nous obtenons les mêmes résultats.

** I-1-2-1-1-2-2- Maintenant, $k' = \omega^{2m}$ et ω non premier, nous écrivons $\omega =$
1015 $\omega_1^f \cdot \Omega$ avec ω_1 premier $\nmid \Omega$ et $f \geq 1$ un entier, et $\omega_1 | A$. D'où $B^n C^l = \omega_1^{2f \cdot m} \Omega^{2m} (3b -$
 $4a) \implies \omega_1 | (B^n C^l) \implies \omega_1 | B^n$ ou $\omega_1 | C^l$.

** I-1-2-1-1-2-2-1- Si $\omega_1 | B^n \implies \omega_1 | B \implies B = \omega_1^j B_1$ avec $\omega_1 \nmid B_1$, d'où $B_1^n \cdot C^l =$
 $\omega_1^{2 \cdot m - n \cdot j} \Omega^{2m} (3b - 4a)$.

1020 - Si $2f \cdot m - n \cdot j = 0$, nous obtenons $B_1^n \cdot C^l = \Omega^{2m} (3b - 4a)$. Comme $C^l =$
 $A^m + B^n \implies \omega_1 | C^l \implies \omega_1 | C$, et $\omega_1 | (3b - 4a)$. Or $\omega_1 \neq 2$ et ω_1 est premier avec
 a' donc premier avec a , par suite $\omega_1 \nmid (3b)$, donc $\omega_1 \neq 3$ et $\omega_1 \nmid b$. La conjecture
(1) est vérifiée.

- Si $2f \cdot m - n \cdot j \geq 1$, là aussi, avec le même raisonnement, nous avons
1025 $\omega_1 | C^l \implies \omega_1 | C$ et $\omega_1 | (3b - 4a)$ et $\omega_1 \nmid a$ et $\omega_1 \neq 3$ et $\omega_1 \nmid b$. La conjecture
(1) est vérifiée.

- Si $2f \cdot m - n \cdot j < 0 \implies \omega_1^{n \cdot j - 2m \cdot f} B_1^n \cdot C^l = \Omega^{2m} (3b - 4a)$. Comme $\omega_1 | C$ utili-
sant $C^l = A^m + B^n$, d'où $C = \omega_1^h \cdot C_1 \implies \omega_1^{n \cdot j - 2m \cdot f + h \cdot l} B_1^n \cdot C_1^l = \Omega^{2m} (3b - 4a)$.
Si $n \cdot j - 2m \cdot f + h \cdot l < 0 \implies \omega_1 | B_1^n C_1^l$, par suite la contradiction avec $\omega_1 \nmid B_1$ et
1030 $\omega_1 \nmid C_1$. Donc $n \cdot j - 2m \cdot f + h \cdot l > 0$ et $\omega_1 | (3b - 4a)$ avec ω_1, a, b coprimiers et la
conjecture (1) est vérifiée.

** I-1-2-1-1-2-2-2- Nous obtenons les mêmes résultats si $\omega_1 | C^l$.

1035 ** I-1-2-1-2- Si $2|p_1$: alors $2|p_1 \implies 2 \nmid a' \implies 2 \nmid a$. Or $k' = p_1^2$.

** I-1-2-1-2-1- Si p_1 est premier égal à 2, nous obtenons $A^m = 4a' \implies 2|a'$, d'où
la contradiction.

1040 ** I-1-2-1-2-2- Donc p_1 est non premier et $2|p_1$. Comme $A^m = 2a' p_1$, p_1 s'écrit
sous la forme $p_1 = 2^{m-1} \omega^m \implies p_1^2 = 2^{2m-2} \omega^{2m}$. Par suite $B^n C^l = k' (3b - 4a) =$
 $2^{2m-2} \omega^{2m} (3b - 4a) \implies 2|B^n$ ou $2|C^l$.

** I-1-2-1-2-2-1- Si $2|B^n \implies 2|B$, comme $2|A$, par suite $2|C$. De $B^n C^l =$

1045 $2^{2m-2}\omega^{2m}(3b-4a)$ il s'ensuit que si $2|(3b-4a) \implies 2|b$ mais comme $2 \nmid a$,
il n'y aura pas de contradiction avec a, b copremiers et la conjecture (1) est
vérifiée.

** I-1-2-1-2-2-2- Même résultat si $2|C^l$.

1050

** I-1-2-2- Nous supposons k', a non copremiers : soit ω un nombre premier tel
que $\omega|a$ et $\omega|p_1^2$.

** I-1-2-2-1- Supposons que $\omega = 3$. Comme $A^{2m} = 4ak' \implies 3|A$, or $3|p$, comme
1055 $p = A^{2m} + B^{2n} + A^m B^n \implies 3|B^{2n} \implies 3|B$, par suite $3|C^l \implies 3|C$. Nous
écrivons $A = 3^i A_1$, $B = 3^j B_1$, $C = 3^h C_1$ avec 3 est copremier avec A_1, B_1 et C_1
et $p = 3^{2im} A_1^{2m} + 3^{2nj} B_1^{2n} + 3^{im+jn} A_1^m B_1^n = 3^s \cdot g$ avec $s = \min(2im, 2jn, im +$
 $jn)$ et $3 \nmid g$. Nous avons aussi $(\omega = 3)|a$ et $(\omega = 3)|k'$ ce qui donne $a = 3^\alpha a_1$,
 $3 \nmid a_1$ et $k' = 3^\mu p_2$, $3 \nmid p_2$ avec $A^{2m} = 4ak' = 3^{2im} A_1^{2m} = 4 \times 3^{\alpha+\mu} \cdot a_1 \cdot p_2 \implies$
1060 $\alpha + \mu = 2im$. Comme $p = 3p' = 3b \cdot k' = 3b \cdot 3^\mu p_2 = 3^{\mu+1} \cdot b \cdot p_2$. L'exposant du
facteur 3 de p est s , l'exposant du facteur 3 du membre à gauche de l'équation
précédente est $\mu + 1$ ajouté de l'exposant β de 3 du facteur b , avec $\beta \geq 0$,
soit $\min(2im, 2jn, im + jn) = \mu + 1 + \beta$ en rappelant que $\alpha + \mu = 2im$. Mais
 $B^n C^l = k'(4b - 3a)$ ce qui donne $3^{(nj+hl)} B_1^n C_1^l = 3^{\mu+1} p_2 (b - 4 \times 3^{(\alpha-1)} a_1) =$
1065 $3^{\mu+1} p_2 (3^\beta b_1 - 4 \times 3^{(\alpha-1)} a_1)$, $3 \nmid b_1$. Nous avons aussi $A^m + B^n = C^l$ donne
 $3^{im} A_1^m + 3^{jn} B_1^n = 3^{hl} C_1^l$. Posons $\epsilon = \min(im, jn)$, nous obtenons $\epsilon = hl =$
 $\min(im, jn)$. Nous avons alors les conditions :

$$s = \min(2im, 2jn, im + jn) = \mu + 1 + \beta \quad (142)$$

$$\alpha + \mu = 2im \quad (143)$$

$$\epsilon = hl = \min(im, jn) \quad (144)$$

$$3^{(nj+hl)} B_1^n C_1^l = 3^{\mu+1} p_2 (3^\beta b_1 - 4 \times 3^{(\alpha-1)} a_1) \quad (145)$$

** I-1-2-2-1-1- $\alpha = 1 \implies a = 3a_1$ et $3 \nmid a_1$, l'équation (143) devient :

$$1 + \mu = 2im \quad (146)$$

et la première équation (142) s'écrit :

$$s = \min(2im, 2jn, im + jn) = 2im + \beta \quad (147)$$

1070 - Si $s = 2im \implies \beta = 0$ soit $3 \nmid b$. Nous obtenons $2im \leq 2jn \implies im \leq jn$, et $2im \leq im + jn \implies im \leq jn$. La troisième équation (144) donne $hl = im$. La dernière équation (145) donne $nj + hl = \mu + 1 = 2im \implies im = jn$, par suite $im = jn = hl$ et $B_1^n C_1^l = p_2(b - 4a_1)$. Si a, b sont copremiers, la conjecture (1) est vérifiée.

1075 - Si $s = 2jn$ ou $s = im + jn$, nous obtenons $\beta = 0$, $im = jn = hl$ et $B_1^n C_1^l = p_2(b - 4a_1)$. Là aussi, si a, b sont copremiers, la conjecture (1) est vérifiée.

** I-1-2-2-1-2- $\alpha > 1 \implies \alpha \geq 2$.

1080 - Si $s = 2im \implies 2im = \mu + 1 + \beta$, or $\mu = 2im - \alpha$ ce qui donne $\alpha = 1 + \beta \geq 2 \implies \beta \neq 0 \implies 3|b$, mais $3|a$ c'est la contradiction avec a, b copremiers.

- Si $s = 2jn = \mu + 1 + \beta \leq 2im \implies \mu + 1 + \beta \leq \mu + \alpha \implies 1 + \beta \leq \alpha \implies \beta = 0$ ou $\beta = 1$. Si $\beta = 1 \implies 3|b$ or $3|a$, d'où la contradiction avec a, b copremiers et la conjecture (1) est non vérifiée. Si $\beta = 0 \implies 3 \nmid b$. Nous obtenons $jn = hl < im$
1085 car $\alpha > 1$, par suite la conjecture (1) est vérifiée.

- Si $s = im + jn \implies im + jn \leq 2im \implies jn \leq im$, et $im + jn \leq 2jn \implies im \leq jn$, par suite $im = jn$. Comme $s = im + jn = 2im = 1 + \mu + \beta$ et $\alpha + \mu = 2im$ qui donne $\alpha = 1 + \beta \geq 2 \implies \beta \geq 1 \implies 3|b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

1090

** I-1-2-2-2- Nous supposons que $\omega \neq 3$. Nous écrivons $a = \omega^\alpha a_1$ avec $\omega \nmid a_1$ et $k' = \omega^\mu p_2$ avec $\omega \nmid p_2$. Comme $A^{2m} = 4ak' = 4\omega^{\alpha+\mu} \cdot a_1 \cdot p_2 \implies \omega|A \implies A = \omega^i A_1$, $\omega \nmid A_1$. Or $B^n C^l = k'(3b - 4a) = \omega^\mu p_2(3b - 4a) \implies \omega|B^n C^l \implies \omega|B^n$ ou $\omega|C^l$.

1095

** I-1-2-2-2-1- $\omega|B^n \implies \omega|B \implies \omega^j B_1$ et $\omega \nmid B_1$. De $A^m + B^n = C^l \implies \omega|C^l \implies \omega|C$. Comme $p = bp' = 3bk' = 3\omega^\mu bp_2 = \omega^s (\omega^{2im-s} A_1^{2m} + \omega^{2jn-s} B_1^{2n} +$

$\omega^{im+jn-s} A_1^m B_1^n$) avec $s = \min(2im, 2jn, im + jn)$. Par suite :

- Si $\mu = s$, alors $\omega \nmid b$ et la conjecture (1) est vraie.
- 1100 - Si $s > \mu$, alors $\omega | b$, or $\omega | a$ d'où la contradiction avec a, b copremiers.
- Si $s < \mu$, il s'ensuit de :

$$3\omega^\mu b p_1 = \omega^s (\omega^{2im-s} A_1^{2m} + \omega^{2jn-s} B_1^{2n} + \omega^{im+jn-s} A_1^m B_1^n)$$

que $\omega | A_1$ ou $\omega | B_1$ ce qui en contradiction avec les hypothèses.

** I-1-2-2-2- Si $\omega | C^l \implies \omega | C \implies C = \omega^h C_1$ avec $\omega \nmid C_1$. De $A^m + B^n = C^l \implies \omega | (C^l - A^m) \implies \omega | B$. Par suite, nous obtenons les mêmes résultats de

1105 I-1-2-2-2-1- ci-dessus.

** I-2- $k' = 1$: par suite $k' = 1 \implies p = 3b$, alors nous avons $A^{2m} = 4a = (2a')^2 \implies A^m = 2a'$, par suite $a = a'^2$ est pair et :

$$A^m B^n = 2 \sqrt[3]{\rho} \cos \frac{\theta}{3} \cdot \sqrt[3]{\rho} \left(\sqrt{3} \sin \frac{\theta}{3} - \cos \frac{\theta}{3} \right) = \frac{p\sqrt{3}}{3} \sin \frac{2\theta}{3} - 2a$$

ou encore :

$$A^{2m} + 2A^m B^n = \frac{2p\sqrt{3}}{3} \sin \frac{2\theta}{3} = 2b\sqrt{3} \sin \frac{2\theta}{3} \quad (148)$$

Le membre à gauche de (148) est un entier et b aussi, alors $2\sqrt{3} \sin \frac{2\theta}{3}$ peut être écrit sous la forme :

$$2\sqrt{3} \sin \frac{2\theta}{3} = \frac{k_1}{k_2} \quad (149)$$

1110 où k_1, k_2 sont deux entiers copremiers et $k_2 | b \implies b = k_2 \cdot k_3$.

** I-2-1- $k' = 1$ et $k_3 \neq 1$: alors $A^{2m} + 2A^m B^n = k_3 \cdot k_1$. Soit μ un entier premier tel que $\mu | k_3$. Si $\mu = 2 \implies 2 | b$, mais $2 | a$, ce-ci est en contradiction avec a, b copremiers. Nous supposons donc $\mu \neq 2$ et $\mu | k_3$, alors $\mu | A^m (A^m + 2B^n) \implies \mu | A^m$
1115 ou $\mu | (A^m + 2B^n)$.

** I-2-1-1- $\mu | A^m$: Si $\mu | A^m \implies \mu | A^{2m} \implies \mu | 4a \implies \mu | a$. Comme $\mu | k_3 \implies \mu | b$ et que a, b sont copremiers d'où la contradiction.

** I-2-1-2- $\mu|(A^m + 2B^n)$: Si $\mu|(A^m + 2B^n) \implies \mu \nmid A^m$ et $\mu \nmid 2B^n$ alors $\mu \neq 2$ et $\mu \nmid B^n$. $\mu|(A^m + 2B^n)$, nous pouvons écrire $A^m + 2B^n = \mu.t'$. Il s'ensuit :

$$A^m + B^n = \mu t' - B^n \implies A^{2m} + B^{2n} + 2A^m B^n = \mu^2 t'^2 - 2t' \mu B^n + B^{2n}$$

En utilisant l'expression de p , nous obtenons :

$$p = t'^2 \mu^2 - 2t' B^n \mu + B^n (B^n - A^m)$$

Comme $p = 3b = 3k_2.k_3$ et $\mu|k_3$ d'où $\mu|p \implies p = \mu\mu'$, alors nous avons :

$$\mu' \mu = \mu(\mu t'^2 - 2t' B^n) + B^n (B^n - A^m)$$

1120 et $\mu|B^n(B^n - A^m) \implies \mu|B^n$ ou $\mu|(B^n - A^m)$.

** I-2-1-2-1- $\mu|B^n$: Si $\mu|B^n \implies \mu|B$ ce qui est en contradiction avec I-2-1-2-.

1125 ** I-2-1-2-2- $\mu|(B^n - A^m)$: Si $\mu|(B^n - A^m)$ et utilisant $\mu|(A^m + 2B^n)$, nous obtenons :

$$\mu|3B^n \implies \begin{cases} \mu|B^n \implies \mu|B \\ \text{ou} \\ \mu = 3 \end{cases} \quad (150)$$

** I-2-1-2-2-1- $\mu|B^n$: Si $\mu|B^n \implies \mu|B$ ce qui est en contradiction avec I-2-1-2-ci-dessus.

** I-2-1-2-2-2- $\mu = 3$: Si $\mu = 3 \implies 3|k_3 \implies k_3 = 3k'_3$, et nous avons $b = k_2 k_3 = 3k_2 k'_3$, il s'ensuit $p = 3b = 9k_2 k'_3$ alors $9|p$, mais $p = (A^m - B^n)^2 + 3A^m B^n$ alors :

$$9k_2 k'_3 - 3A^m B^n = (A^m - B^n)^2$$

que nous écrivons :

$$3(3k_2 k'_3 - A^m B^n) = (A^m - B^n)^2 \quad (151)$$

d'où :

$$3|(3k_2 k'_3 - A^m B^n) \implies 3|A^m B^n \implies 3|A^m \text{ ou } 3|B^n$$

1130 ** I-2-1-2-2-2-1- $3|A^m$: Si $3|A^m \implies 3|A$ et nous avons aussi $3|A^{2m}$, mais
 $A^{2m} = 4a \implies 3|4a \implies 3|a$. Comme $b = 3k_2k'_3$ alors $3|b$, mais a, b sont co-
premiers d'où la contradiction. Alors $3 \nmid A$.

1135 ** I-2-1-2-2-2-2- $3|B^m$: Si $3|B^n \implies 3|B$, or l'équation (151) implique $3|(A^m -$
 $B^n)^2 \implies 3|(A^m - B^n) \implies 3|A^m \implies 3|A$. Mais en utilisant le résultat du cas
précédent, nous obtenons $3 \nmid A$.

Alors l'hypothèse $k_3 \neq 1$ est impossible.

1140 ** I-2-2- Maintenant, nous supposons que $k_3 = 1 \implies b = k_2$ et $p = 3b = 3k_2$.
Nous avons alors :

$$2\sqrt{3}\sin\frac{2\theta}{3} = \frac{k_1}{b} \quad (152)$$

avec k_1, b copremiers, nous écrivons (152) comme :

$$4\sqrt{3}\sin\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{3} = \frac{k_1}{b}$$

Prenons le carré des deux membres et en remplaçant $\cos^2\frac{\theta}{3}$ par $\frac{a}{b}$, nous obtenons :

$$3 \times 4^2 .a(b - a) = k_1^2 \implies k_1^2 = 3 \times 4^2 .a'^2(b - a) \quad (153)$$

ce qui implique que :

$$b - a = 3\alpha^2 \implies b = a'^2 + 3\alpha^2 \implies k_1 = 12a'\alpha \quad (154)$$

1145 Comme :

$$k_1 = 12a'\alpha = A^m(A^m + 2B^n) \implies 3\alpha = a' + B^n \quad (155)$$

Considérons maintenant que $3|(b - a)$ avec $b = a'^2 + 3\alpha^2$. Le cas $\alpha = 1$ donne
 $a' + B^n = 3$ ce qui impossible. Nous supposons que $\alpha > 1$. Alors le couple (a', α)
est solution de l'équation diophantine :

$$X^2 + 3Y^2 = b \quad (156)$$

avec $X = a'$ et $Y = \alpha$. Or d'après un théorème sur les solutions de l'équation
 1150 donnée par (156), b s'écrit (voir théorème 37.4 de [2]) :

$$b = 2^{2s} \times 3^t \cdot p_1^{t_1} \cdots p_g^{t_g} q_1^{2s_1} \cdots q_r^{2s_r} \quad (157)$$

où les p_i sont des nombres premiers vérifiant $p_i \equiv 1 \pmod{6}$, les q_j sont aussi des nombres premiers tels que $q_j \equiv 5 \pmod{6}$. Alors :

- si $s \geq 1 \implies 2|b$, comme $2|a$, d'où la contradiction avec a, b copremiers ;
- si $t \geq 1 \implies 3|b$, or $3|(b-a) \implies 3|a$, d'où la contradiction avec a, b copre-

1155 miers.

** I-2-2-1- Donc nous supposons que b s'écrit sous la forme :

$$b = p_1^{t_1} \cdots p_g^{t_g} q_1^{2s_1} \cdots q_r^{2s_r} \quad (158)$$

avec $p_i \equiv 1 \pmod{6}$ et $q_j \equiv 5 \pmod{6}$. Finalement nous obtenons que $b \equiv 1 \pmod{6}$. Vérifions alors cette condition.

1160

** I-2-2-1-1- Nous allons présenter le tableau des valeurs modulo 6 de $A^m + B^n = C^l$ en fonction des valeurs de $A^m, B^n \pmod{6}$. Nous obtenons le tableau ci-dessous après avoir retiré les lignes (respectivement les colonnes) de $A^m \equiv 0 \pmod{6}$ et $A^m \equiv 3 \pmod{6}$ (respectivement de $B^n \equiv 0 \pmod{6}$ et $B^n \equiv 3 \pmod{6}$),

1165 car ils présentent des cas contradictoires :

A^m, B^n	1	2	4	5
1	2	3	5	0
2	3	4	0	1
4	5	0	2	3
5	0	1	3	4

TABLE 2: Tableau de $C^l \pmod{6}$

** I-2-2-1-1-1- Pour les cas $C^l \equiv 0 \pmod{6}$ et $C^l \equiv 3 \pmod{6}$, nous déduisons que $3|C^l \implies 3|C \implies C = 3^h C_1$, avec $h \geq 1$ et $3 \nmid C_1$. Il en résulte que

$p - B^n C^l = 3b - 3^{lh} C_1^l B^n = A^{2m} \implies 3|(A^{2m} = 4a) \implies 3|a \implies 3|b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

1170

** I-2-2-1-1-2- Pour les cas $C^l \equiv 0(\text{mod } 6)$, $C^l \equiv 2(\text{mod } 6)$ et $C^l \equiv 4(\text{mod } 6)$, nous déduisons que $2|C^l \implies 2|C \implies C = 2^h C_1$, avec $h \geq 1$ et $2 \nmid C_1$. Il en résulte que $p = 3b = A^{2m} + B^n C^l = 4a + 2^{lh} C_1^l B^n \implies 2|3b \implies 2|b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

1175

** I-2-2-1-1-3- Nous considérons les cas $A^m \equiv 1(\text{mod } 6)$ et $B^n \equiv 4(\text{mod } 6)$ (respectivement $B^n \equiv 2(\text{mod } 6)$) : d'où $2|B^n \implies 2|B \implies B = 2^j B_1$ avec $j \geq 1$ et $2 \nmid B_1$. Il en résulte de $3b = A^{2m} + B^n C^l = 4a + 2^{jn} B_1^n C^l$, par suite $2|b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

1180

** I-2-2-1-1-4- Nous considérons le cas $A^m \equiv 5(\text{mod } 6)$ et $B^n \equiv 2(\text{mod } 6)$: d'où $2|B^n \implies 2|B \implies B = 2^j B_1$ avec $j \geq 1$ et $2 \nmid B_1$. Il en résulte de $3b = A^{2m} + B^n C^l = 4a + 2^{jn} B_1^n C^l$, par suite $2|b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

1185

** I-2-2-1-1-5- Nous considérons le cas $A^m \equiv 2(\text{mod } 6)$ et $B^n \equiv 5(\text{mod } 6)$: comme $A^m \equiv 2(\text{mod } 6) \implies A^m \equiv 2(\text{mod } 3)$, donc A^m n'est pas un carré, de même pour B^n . Par suite, A^m et B^n s'écrivent sous la forme suivante :

$$A^m = a_0 \cdot \mathcal{A}^2 \tag{159}$$

$$B^n = b_0 \mathcal{B}^2 \tag{160}$$

où a_0 (respectivement b_0) regroupe le produit de nombres premiers d'exposants 1 de A^m (respectivement de B^n) sans que nécessairement $(a_0, \mathcal{A}) = 1$ et $(b_0, \mathcal{B}) = 1$. Nous avons aussi $p = 3b = A^{2m} + A^m B^n + B^{2n} = (A^m - B^n)^2 + 3A^m B^n \implies 3|(b - A^m B^n) \implies A^m B^n \equiv b(\text{mod } 3)$ or $b = a + 3a^2 \implies b \equiv a \equiv a'^2(\text{mod } 3)$, par suite $A^m B^n \equiv a'^2(\text{mod } 3)$. Mais $A^m \equiv 2(\text{mod } 6) \implies 2a' \equiv 2(\text{mod } 6) \implies 4a'^2 \equiv 4(\text{mod } 6) \implies a'^2 \equiv 1(\text{mod } 3)$. Il en résulte que $A^m B^n$ est un carré, soit $A^m B^n = \mathcal{N}^2 = \mathcal{A}^2 \cdot \mathcal{B}^2 \cdot a_0 \cdot b_0$. Notons par $\mathcal{N}_1^2 = a_0 \cdot b_0$. Soit p_1 un nombre premier

1195

qui divise $a_0 \implies a_0 = p_1 \cdot a_1$ avec $p_1 \nmid a_1$. $p_1 | \mathcal{N}_1^2 \implies p_1 | \mathcal{N}_1 \implies \mathcal{N}_1 = p_1^t \mathcal{N}'_1$ avec $t \geq 1$ et $p_1 \nmid \mathcal{N}'_1$, d'où $p_1^{2t-1} \mathcal{N}'_1{}^2 = a_1 \cdot b_0$. Comme $2t \geq 2 \implies 2t - 1 \geq 1 \implies p_1 | a_1 \cdot b_0$ mais $(p_1, a_1) = 1$, d'où $p_1 | b_0 \implies p_1 | B^n \implies p_1 | B$. Or $p_1 | (A^m = 2a')$. p_1 est différent de 2 car $p_1 | B^n$ et B^n est impair, d'où la contradiction. Par suite, $p_1 | a' \implies p_1 | a$. Si $p_1 = 3$, de $3 | (b - a) \implies 3 | b$ d'où la contradiction avec a, b premiers. Donc $p_1 > 3$ premier divise A^m et B^n , par suite $p_1 | (p = 3b) \implies p_1 | b$, il en résulte la contradiction avec a, b premiers, sachant que $p = 3b \equiv 3 \pmod{6}$ et en choisissant le cas qui nous intéresse à savoir $b \equiv 1 \pmod{6}$.

** I-2-2-1-1-6- Nous considérons le dernier cas du tableau précédent $A^m \equiv 4 \pmod{6}$ et $B^n \equiv 1 \pmod{6}$. Revenons à l'équation (156) que vérifie b :

$$b = X^2 + 3Y^2 \quad (161)$$

$$\text{avec } X = a'; \quad Y = \alpha$$

$$\text{et } 3\alpha = a' + B^n \quad (162)$$

Supposons qu'il existe une autre solution de (161) :

$$b = X^2 + 3Y^3 = u^2 + 3v^2 \implies 2u \neq A^m, 3v \neq a' + B^n \quad (163)$$

Or $B^n = \frac{6\alpha - A^m}{2} = 3\alpha - a'$ et b vérifie aussi : $3b = p = A^{2m} + A^m B^n + B^{2n}$, il est impossible que u, v vérifie :

$$6v = 2u + 2B^n \quad (164)$$

$$3b = 4u^2 + 2uB^n + B^{2n} \quad (165)$$

Considérons que : $6v - 2u = 6\alpha - 2a' \implies u = 3v - 3\alpha + a'$. D'où $b = u^2 + 3v^2 = (3v - 3\alpha + a')^2 + 3v^2$ ce qui donne :

$$\begin{aligned} 2v^2 - B^n v + \alpha^2 - a' \alpha &= 0 \\ 2v^2 - B^n v - \frac{(a' + B^n)(A^m - B^n)}{9} &= 0 \end{aligned} \quad (166)$$

La résolution de la dernière équation donne en prenant la racine positive (car $A^m > B^n$), $v_1 = \alpha$, par suite $u = a'$. Il en résulte que b dans (161) a une

représentation unique sous la forme $X^2 + 3Y^2$ avec $X, 3Y$ copremiers. Comme
 1215 b est un nombre entier impair, nous appliquons l'un des théorèmes d'Euler sur
 les nombres convenables "numerus idoneus" (voir [4],[5]) à savoir : *Si $n > 1$ est
 un entier impair qui est représenté de façon unique telle que $n = x^2 + 3y^2$ avec
 $x, y \in \mathbb{N}$ et x et $3y$ sont relativement premiers, alors n est premier.* Il en résulte
 que b est premier.

1220

Nous avons aussi $p = 3b = A^{2m} + A^m B^n + B^{2n} = 4a'^2 + B^n \cdot C^l$ soit $9a^2 - a'^2 =$
 $B^n \cdot C^l$, par suite $3a, a' \in \mathbb{N}^*$ sont solutions de l'équation diophantine :

$$x^2 - y^2 = N \tag{167}$$

avec $N = B^n C^l > 0$. Soit $Q(N)$ le nombre des solutions de (167) et $\tau(N)$ le
 nombre de façon d'écrire les facteurs de N , alors nous annonçons le résultat
 1225 suivant concernant les solutions de (167) (voir théorème 27.3 de [2]) :

- si $N \equiv 2 \pmod{4}$, alors $Q(N) = 0$;
- si $N \equiv 1$ ou $N \equiv 3 \pmod{4}$, alors $Q(N) = [\tau(N)/2]$;
- si $N \equiv 0 \pmod{4}$, alors $Q(N) = [\tau(N/4)/2]$.

1230 Rappelons que $A^m \equiv 0 \pmod{4}$. Concernant B^n , pour $B^n \equiv 0 \pmod{4}$ ou $B^n \equiv$
 $2 \pmod{4}$, nous trouvons que $2|B^n \implies 2|\alpha \implies 2|b$, par suite la contradiction
 avec a, b copremiers. Il reste le cas $B^n \equiv 3 \pmod{4} \implies C^l \equiv 3 \pmod{4} \implies$
 $N = B^n C^l \equiv 1 \pmod{4} \implies Q(N) = [\tau(N)/2] > 1$. Or $Q(N) = 1$, puisque les
 inconnues de (167) sont aussi les inconnues de (161) et nous avons une unique
 1235 solution des deux équations diophantines, d'où la contradiction.

Il en résulte que la condition $3|(b - a)$ est contradictoire.

L'étude du cas 5.8 est donc achevée.

1240 **5.9. Cas $3|p$ et $b|4p$:**

Les cas suivants ont été déjà étudiés :

* $3|p, b = 2 \implies b|4p$: cas 5.1

* $3|p, b = 4 \implies b|4p$: cas 5.2

* $3|p \implies p = 3p', b|p' \implies p' = bp'', p'' \neq 1$: cas 5.3

1245 * $3|p, b = 3 \implies b|4p$: cas 5.4

* $3|p \implies p = 3p', b = p' \implies b|4p$: cas 5.8

** J-1- Cas particulier : $b = 12$. En effet $3|p \implies p = 3p'$ et $4p = 12p'$. En prenant $b = 12$, nous avons $b|4p$. Or $b < 4a < 3b$, ce qui donne $12 < 4a <$

1250 $36 \implies 3 < a < 9$. Comme $2|b$ et $3|b$, les valeurs possibles de a sont 5 et 7.

** J-1-1- $a = 5$ et $b = 12 \implies 4p = 12p' = bp'$. Or $A^{2m} = \frac{4p}{3} \cdot \frac{a}{b} = \frac{5bp'}{3b} = \frac{5p'}{3} \implies 3|p' \implies p' = 3p''$ avec $p'' \in \mathbb{N}^*$, alors $p = 9p''$. Nous avons :

$$A^{2m} = 5p'' \quad (168)$$

$$B^n C^l = \frac{4p}{3} \left(3 - 4\cos^2 \frac{\theta}{3} \right) = 4p'' \quad (169)$$

Si p'' est premier : c'est impossible. Nous supposons que p'' est non premier,

1255 il s'écrit $p'' = \omega^s p_1, s \geq 1, s \nmid p_1$. L'équation (168) devient $A^{2m} = 5\omega^s p_1 \implies \omega|A^{2m} \implies \omega|A$. L'équation (169) donne $B^n C^l = 4\omega^s p_1 \implies \omega|B^n$ ou $\omega|C^l$.

Si $\omega|B^n \implies \omega|B$. Comme $C^l = A^m + B^n$, par suite $\omega|C^l \implies \omega|C$. a, b sont copremiers, par suite, la conjecture (1) est vérifiée.

1260 De même, si $\omega|C^l \implies \omega|B$, et la conjecture (1) est vérifiée.

** J-1-2- $a = 7$ et $b = 12 \implies 4p = 12p' = bp'$. Or $A^{2m} = \frac{4p}{3} \cdot \frac{a}{b} = \frac{12p'}{3} \cdot \frac{7}{12} = \frac{7p'}{3} \implies 3|p' \implies p' = 3p''$. Nous avons :

$$A^{2m} = 7p'' \quad (170)$$

$$B^n C^l = \frac{4p}{3} \left(3 - 4\cos^2 \frac{\theta}{3} \right) = 8p'' \quad (171)$$

En utilisant la même méthode utilisée en J-1-1- ci-dessus, nous obtenons que la

1265 conjecture (1) est vérifiée.

Passons maintenant au cas général. Comme $3|p \Rightarrow p = 3p'$ et $b|4p \Rightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N}^*$ et $4p = 12p' = k_1 b$.

1270 ** J-2- $k_1 = 1$: Si $k_1 = 1$ donc $b = 12p'$, ($p' \neq 1$ sinon $p = 3 \ll A^{2m} + B^{2n} + A^m B^n$). Mais $A^{2m} = \frac{4p}{3} \cdot \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{12p' a}{3} = \frac{4p' a}{12p'} = \frac{a}{3} \Rightarrow 3|a$ car A^{2m} est un entier, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

1275 ** J-3- $k_1 = 3$: Si $k_1 = 3$, d'où $b = 4p'$ et $A^{2m} = \frac{4p}{3} \cdot \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{k_1 a}{3} = a = (A^m)^2 = a'^2 \Rightarrow A^m = a'$. Le calcul de $A^m B^n$ donne $A^m B^n = \frac{p\sqrt{3}}{3} \sin \frac{2\theta}{3} - \frac{a}{2}$, soit :

$$A^{2m} + 2A^m B^n = \frac{2p\sqrt{3}}{3} \sin \frac{2\theta}{3} = 2p'\sqrt{3} \sin \frac{2\theta}{3} \quad (172)$$

Le membre à gauche de (172) est un entier et p' aussi, alors $2\sqrt{3} \sin \frac{2\theta}{3}$ peut être écrit sous la forme :

$$2\sqrt{3} \sin \frac{2\theta}{3} = \frac{k_2}{k_3} \quad (173)$$

où k_2, k_3 sont deux entiers copremiers et $k_3|p' \Rightarrow p' = k_3 k_4$.

1280

** J-3-1- $k_4 \neq 1$: Nous supposons $k_4 \neq 1$, alors :

$$A^{2m} + 2A^m B^n = k_2 k_4 \quad (174)$$

Soit μ un entier premier tel que $\mu|k_4$. Alors $\mu|A^m(A^m + 2B^n) \Rightarrow \mu|A^m$ ou $\mu|(A^m + 2B^n)$.

1285 ** J-3-1-1- $\mu|A^m$: Si $\mu|A^m \Rightarrow \mu|A^{2m} \Rightarrow \mu|a$. Comme $\mu|k_4 \Rightarrow \mu|p' \Rightarrow \mu|(4p' = b)$. Or a, b sont copremiers d'où la contradiction.

** J-3-1-2- $\mu|(A^m + 2B^n)$: Si $\mu|(A^m + 2B^n) \Rightarrow \mu \nmid A^m$ et $\mu \nmid 2B^n$ alors $\mu \neq 2$ et $\mu \nmid B^n$. $\mu|(A^m + 2B^n)$, nous pouvons écrire $A^m + 2B^n = \mu t'$. Il s'ensuit :

$$A^m + B^n = \mu t' - B^n \Rightarrow A^{2m} + B^{2n} + 2A^m B^n = \mu^2 t'^2 - 2t' \mu B^n + B^{2n}$$

Utilisant l'expression de p , nous obtenons $p = t'^2\mu^2 - 2t'B^n\mu + B^n(B^n - A^m)$.
Comme $p = 3p'$ et $\mu|p' \Rightarrow \mu|(3p') \Rightarrow \mu|p$, nous pouvons écrire : $\exists\mu'$ et $p = \mu\mu'$,
alors nous arrivons à :

$$\mu'\mu = \mu(\mu t'^2 - 2t'B^n) + B^n(B^n - A^m)$$

et $\mu|B^n(B^n - A^m) \Rightarrow \mu|B^n$ ou $\mu|(B^n - A^m)$.

1290 ** J-3-1-2-1- $\mu|B^n$: Si $\mu|B^n \Rightarrow \mu|B$ ce qui est en contradiction avec J-3-1-2-.

** J-3-1-2-2- $\mu|(B^n - A^m)$: Si $\mu|(B^n - A^m)$ et utilisant $\mu|(A^m + 2B^n)$, nous
obtenons :

$$\mu|3B^n \Rightarrow \begin{cases} \mu|B^n \\ \text{ou} \\ \mu = 3 \end{cases} \quad (175)$$

** J-3-1-2-2-1- $\mu|B^n$: Si $\mu|B^n \Rightarrow \mu|B$ ce qui est en contradiction avec J-3-1-2-.

1295

** J-3-1-2-2-2- $\mu = 3$: Si $\mu = 3 \Rightarrow 3|k_4 \Rightarrow k_4 = 3k'_4$, et nous avons $p' = k_3k_4 =$
 $3k_3k'_4$, il s'ensuit $p = 3p' = 9k_3k'_4$, alors $9|p$, mais $p = (A^m - B^n)^2 + 3A^mB^n$, il
en résulte :

$$9k_3k'_4 - 3A^mB^n = (A^m - B^n)^2$$

que nous écrivons : $3(3k_3k'_4 - A^mB^n) = (A^m - B^n)^2$, d'où : $3|(3k_3k'_4 - A^mB^n) \Rightarrow$
 $3|A^mB^n \Rightarrow 3|A^m$ ou $3|B^n$.

** J-3-1-2-2-2-1- $3|A^m$: Si $3|A^m \Rightarrow 3|A^{2m} \Rightarrow 3|a$, mais $3|p' \Rightarrow 3|(4p')$ soit $3|b$
1300 d'où la contradiction avec a, b copremiers. Alors $3 \nmid A$.

** J-3-1-2-2-2-2- $3|B^n$: Si $3|B^n$ or $A^m = \mu t' - 2B^n = 3t' - 2B^n \Rightarrow 3|A^m$, ce
qui est contradictoire. Alors l'hypothèse $k_4 \neq 1$ est impossible.

1305 ** J-3-2- $k_4 = 1$: Maintenant, nous supposons que $k_4 = 1 \Rightarrow p' = k_3k_4 = k_3$.

Nous avons alors :

$$2\sqrt{3}\sin\frac{2\theta}{3} = \frac{k_2}{p'} \quad (176)$$

avec k_2, p' copremiers, nous écrivons (176) comme :

$$4\sqrt{3}\sin\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{3} = \frac{k_2}{p'}$$

Prenons le carré des deux membres et en remplaçant $\cos^2\frac{\theta}{3}$ par $\frac{a}{b}$ et $b = 4p'$, nous obtenons :

$$3.a(b-a) = k_2^2 \quad (177)$$

Comme $A^{2m} = a = a'^2$, ce qui implique que :

$$3|(b-a), \quad \text{et} \quad b-a = b-a'^2 = 3\alpha^2$$

Comme $k_2 = A^m(A^m + 2B^n)$ d'après l'équation (174) et que $3|k_2 \implies 3|A^m(A^m + 2B^n) \implies 3|A^m$ ou $3|(A^m + 2B^n)$.

** J-3-2-1- $3|A^m$: Si $3|A^m \implies 3|A^{2m} \implies 3|a$, mais $3|(b-a) \implies 3|b$ d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** J-3-2-2- $3|(A^m + 2B^n) \implies 3 \nmid A^m$ et $3 \nmid B^n$. Comme d'une part $k_2^2 = 9a\alpha^2 = 9a'^2\alpha^2 \implies k_2 = 3a'\alpha = A^m(A^m + 2B^n)$, par suite :

$$3\alpha = A^m + 2B^n \quad (178)$$

Comme b s'écrit sous la forme $b = a'^2 + 3\alpha^2$, donc le couple (a', α) est une solution de l'équation diophantine :

$$x^2 + 3y^2 = b \quad (179)$$

Comme $b = 4p'$, par suite :

1320

** J-3-2-2-1- Si x, y sont pairs, d'où $2|a' \implies 2|a$, il en résulte la contradiction avec a, b copremiers.

1325 ** J-3-2-2-2- Si x, y sont impairs, soit a', α impairs, c'est-à-dire $A^m = a' \equiv 1(\text{mod } 4)$ ou $A^m \equiv 3(\text{mod } 4)$. Si u, v vérifient (179), soit $b = u^2 + 3v^2$, avec $u \neq a'$ et $v \neq \alpha$, alors u, v ne vérifie pas (178), soit $3v \neq u + 2B^n$, sinon $u = 3v - 2B^n \implies b = (3v - 2B^n)^2 + 3v^2 = a'^2 + 3\alpha$, la résolution de l'équation du second degré obtenue en v donne la racine positive $v_1 = \alpha$, par suite $u = 3\alpha - 2B^n = a'$, d'où l'unicité de l'écriture de b représentée par (179).

1330

** J-3-2-2-2-1- Nous supposons $A^m \equiv 1(\text{mod } 4)$ et $B^n \equiv 0(\text{mod } 4)$, d'où B^n est pair et $B^n = 2B'$. L'expression de p devient :

$$\begin{aligned} p &= a'^2 + 2a'B' + 4B'^2 = (a' + B')^2 + 3B'^2 = 3p' \implies 3|(a' + B') \implies a' + B' = 3B'' \\ p' &= B'^2 + 3B''^2 \implies b = 4p' = (2B')^2 + 3(2B'')^2 = a'^2 + 3\alpha^2 \end{aligned} \quad (180)$$

Soit $2B' = B^n = a' = A^m$, d'où la contradiction.

1335 ** J-3-2-2-2-2- Nous supposons $A^m \equiv 1(\text{mod } 4)$ et $B^n \equiv 1(\text{mod } 4)$, d'où C^l est pair et $C^l = 2C'$. L'expression de p devient :

$$\begin{aligned} p &= C'^{2l} - C^l B^n + B^{2n} = 4C'^2 - 2C' B^n + B^{2n} = (C' - B^n)^2 + 3C'^2 = 3p' \\ &\implies 3|(C' - B^n) \implies C' - B^n = 3C'' \\ p' &= C'^2 + 3C''^2 \implies b = 4p' = (2C')^2 + 3(2C'')^2 = a'^2 + 3\alpha^2 \end{aligned} \quad (181)$$

Soit $2C' = C^l = a' = A^m$, d'où la contradiction.

1340 ** J-3-2-2-2-3- Nous supposons $A^m \equiv 1(\text{mod } 4)$ et $B^n \equiv 2(\text{mod } 4)$, d'où B^n est pair, voir J-3-2-2-2-1-.

** J-3-2-2-2-4- Nous supposons $A^m \equiv 1(\text{mod } 4)$ et $B^n \equiv 3(\text{mod } 4)$, d'où C^l est pair, voir J-3-2-2-2-2-.

1345 ** J-3-2-2-2-5- Nous supposons $A^m \equiv 3(\text{mod } 4)$ et $B^n \equiv 0(\text{mod } 4)$, d'où B^n est pair, voir J-3-2-2-2-1-.

** J-3-2-2-2-6- Nous supposons $A^m \equiv 3 \pmod{4}$ et $B^n \equiv 1 \pmod{4}$, d'où C^l est pair, voir J-3-2-2-2-2-.

1350

** J-3-2-2-2-7- Nous supposons $A^m \equiv 3 \pmod{4}$ et $B^n \equiv 2 \pmod{4}$, d'où B^n est pair, voir J-3-2-2-2-1-.

1355

** J-3-2-2-2-8- Nous supposons $A^m \equiv 3 \pmod{4}$ et $B^n \equiv 3 \pmod{4}$, d'où C^l est pair, voir J-3-2-2-2-2-.

Nous avons achevé donc l'étude de J-3-2-2- qui a mené à des contradictions.

** J-4- Nous supposons $k_1 \neq 3$ et $3|k_1 \implies k_1 = 3k'_1$ avec $k'_1 \neq 1$, alors $4p =$
 1360 $12p' = k_1b = 3k'_1b \implies 4p' = k'_1b$. A^{2m} s'écrit $A^{2m} = \frac{4p}{3} \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{3k'_1b}{3} \frac{a}{b} = k'_1a$ et
 $B^n C^l = \frac{p}{3} \left(3 - 4\cos^2 \frac{\theta}{3} \right) = \frac{k'_1}{4} (3b - 4a)$. Comme $B^n C^l$ est un entier, on doit
 avoir $4|(3b - 4a)$ ou $4|k'_1$ ou $[2|k'_1$ et $2|(3b - 4a)]$.

** J-4-1- Nous supposons que $4|(3b - 4a)$.

1365

** J-4-1-1- On suppose que $3b - 4a = 4 \implies 4|b \implies 2|b$. Nous avons alors :

$$A^{2m} = k'_1 a$$

$$B^n C^l = k'_1$$

** J-4-1-1-1- Si k'_1 est premier, de $B^n C^l = k'_1$, c'est impossible.

** J-4-1-1-2- Nous supposons que $k'_1 > 1$ est non premier. Soit ω un nombre
 1370 premier tel que $\omega|k'_1$.

** J-4-1-1-2-1- Nous supposons que $k'_1 = \omega^s$, avec $s \geq 6$. Nous avons donc :

$$A^{2m} = \omega^s . a \tag{182}$$

$$B^n C^l = \omega^s \tag{183}$$

** J-4-1-1-2-1-1- Supposons $\omega = 2$, si a, k'_1 sont non copremiers alors $2|a$, comme $2|b$, c'est la contradiction avec a, b copremiers.

1375

** J-4-1-1-2-1-2- Supposons $\omega = 2$ et a, k'_1 sont copremiers donc $2 \nmid a$. De (183), nous en déduisons que $B = C = 2$ et $n + l = s$, et $A^{2m} = 2^s . a$, mais $A^m = 2^l - 2^n \implies A^{2m} = (2^l - 2^n)^2 = 2^{2l} + 2^{2n} - 2(2^{l+n}) = 2^{2l} + 2^{2n} - 2 \times 2^s = 2^s . a \implies 2^{2l} + 2^{2n} = 2^s (a + 2)$. Si $l = n$, nous obtenons $a = 0$ d'où la contradiction. Si $l \neq n$, comme $A^m = 2^l - 2^n > 0 \implies n < l \implies 2n < s$, d'où $2^{2n}(1 + 2^{2l-2n} - 2^{s+1-2n}) = 2^n 2^l . a$. Posons $l = n + n_1 \implies 1 + 2^{2l-2n} - 2^{s+1-2n} = 2^{n_1} . a$, or le terme à gauche est impair et le membre à droite est pair d'où la contradiction. Donc le cas $\omega = 2$ est impossible.

1385 ** J-4-1-1-2-1-3- Supposons maintenant que $k'_1 = \omega^s$ avec $\omega \neq 2$:

** J-4-1-1-2-1-3-1- Supposons que a, k'_1 sont non copremiers, alors $\omega|a \implies a = \omega^t . a_1$ et $t \nmid a_1$. Nous avons donc :

$$A^{2m} = \omega^{s+t} . a_1 \quad (184)$$

$$B^n C^l = \omega^s \quad (185)$$

De (193), nous déduisons que $B^n = \omega^n$, $C^l = \omega^l$ et $s = n + l$. Et $A^m = \omega^l - \omega^n > 0 \implies l > n$. De plus, $A^{2m} = \omega^{s+t} . a_1 = (\omega^l - \omega^n)^2 = \omega^{2l} + \omega^{2n} - 2 \times \omega^s$. Comme $\omega \neq 2 \implies \omega$ est impair, par suite $A^{2m} = \omega^{s+t} . a_1 = (\omega^l - \omega^n)^2$ est pair, donc $2|a_1 \implies 2|a$ ce qui est en contradiction avec a, b copremiers, alors ce cas est impossible.

1395 ** J-4-1-1-2-1-3-2- Supposons que a, k'_1 sont copremiers, avec :

$$A^{2m} = \omega^s . a \quad (186)$$

$$B^n C^l = \omega^s \quad (187)$$

De (195), nous déduisons que $B^n = \omega^n$ et $C^l = \omega^l$ et $s = n + l$. Comme $\omega \neq 2 \implies \omega$ est impair et $A^{2m} = \omega^s . a = (\omega^l - \omega^n)^2$ est pair, d'où $2|a$. Par suite

la contradiction avec a, b copremiers, donc ce cas est impossible.

1400 ** J-4-1-1-2-2- Nous supposons que $k'_1 = \omega^s . k_2$, avec $s \geq 6$, $\omega \nmid k_2$. Nous avons donc :

$$A^{2m} = \omega^s . k_2 . a \quad (188)$$

$$B^n C^l = \omega^s . k_2 \quad (189)$$

** J-4-1-1-2-2-1- Si k_2 est premier, de la dernière équation ci-dessus, $\omega = k_2$, c'est en contradiction avec $\omega \nmid k_2$. Donc ce cas est impossible.

1405 ** J-4-1-1-2-2-2- Nous supposons que $k'_1 = \omega^s . k_2$, avec $s \geq 6$, $\omega \nmid k_2$ et k_2 non premier. Nous avons donc :

$$A^{2m} = \omega^s . k_2 . a \quad (190)$$

$$B^n C^l = \omega^s . k_2 \quad (191)$$

** J-4-1-1-2-2-2-1- Nous supposons ω, a copremiers

** J-4-1-1-2-2-2-1-1- Supposons $\omega = 2$, si a, k_2 sont non copremiers alors $2|a$,
 1410 comme $2|b$, c'est la contradiction avec a, b copremiers. Si a, k_2 sont copremiers donc $2 \nmid a$. De (183), nous en déduisons que $B = C = 2$ et $n + l = s$, et $A^{2m} = 2^s . a$, mais $A^m = 2^l - 2^n \implies A^{2m} = (2^l - 2^n)^2 = 2^{2l} + 2^{2n} - 2(2^{l+n}) = 2^{2l} + 2^{2n} - 2 \times 2^s = 2^s . a \implies 2^{2l} + 2^{2n} = 2^s(a + 2)$. Si $l = n$, nous obtenons $a = 0$ d'où la contradiction. Si $l \neq n$, comme $A^m = 2^l - 2^n > 0 \implies n < l \implies 2n < s$,
 1415 d'où $2^{2n}(1 + 2^{2l-2n} - 2^{s+1-2n}) = 2^n 2^l . a$. Posons $l = n + n_1 \implies 1 + 2^{2l-2n} - 2^{s+1-2n} = 2^{n_1} . a$, or le terme à gauche est impair et le membre à droite est pair d'où la contradiction. Donc le cas $\omega = 2$ est impossible.

** J-4-1-1-2-2-2-1-2- Supposons maintenant que $\omega \neq 2$.

1420

** J-4-1-1-2-2-2-1-2-1- Supposons que a, k'_1 sont non copremiers, alors $\omega|a \implies$

$a = \omega^t . a_1$ et $t \nmid a_1$. Nous avons donc :

$$A^{2m} = \omega^{s+t} . a_1 \quad (192)$$

$$B^n C^l = \omega^s \quad (193)$$

De (193), nous déduisons que $B^n = \omega^n$, $C^l = \omega^l$ et $s = n+l$. Et $A^m = \omega^l - \omega^n > 0 \implies l > n$. De plus, $A^{2m} = \omega^{s+t} . a_1 = (\omega^l - \omega^n)^2 = \omega^{2l} + \omega^{2n} - 2 \times \omega^s$. Comme
1425 $\omega \neq 2 \implies \omega$ est impair, par suite $A^{2m} = \omega^{s+t} . a_1 = (\omega^l - \omega^n)^2$ est pair, donc $2|a_1 \implies 2|a$ ce qui est en contradiction avec a, b copremiers, ce cas est impossible.

** J-4-1-1-2-2-2-1-2-2- Supposons que a, k'_1 non copremiers, avec :

$$A^{2m} = \omega^s . a \quad (194)$$

$$B^n C^l = \omega^s \quad (195)$$

1430 De (195), nous déduisons que $B^n = \omega^n$ et $C^l = \omega^l$ et $s = n + l$. Comme $\omega \neq 2 \implies \omega$ est impair et $A^{2m} = \omega^s . a = (\omega^l - \omega^n)^2$ est pair, d'où $2|a$. Par suite la contradiction avec a, b copremiers, donc ce cas est impossible.

** J-4-1-2- $3b - 4a \neq 4$ et $4|(3b - 4a) \implies 3b - 4a = 4^s \Omega$ avec $s \geq 1$ et $4 \nmid \Omega$.

1435 Nous avons :

$$A^{2m} = k'_1 a \quad (196)$$

$$B^n C^l = 4^{s-1} k'_1 \Omega \quad (197)$$

** J-4-1-2-1- Supposons $k'_1 = 2$, de (196) nous déduisons que $2|a$. Comme $4|(3b - 4a) \implies 2|b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers. Donc ce cas est impossible.

1440 ** J-4-1-2-2- Supposons que $k'_1 = 3$, de (196) nous déduisons que $3^3|A^{2m}$. De (197), nous déduisons que $3^3|B^n$ ou $3^3|C^l$. Dans les deux cas précédents, nous aurons $3^3|p$. Mais $4p = 3k'_1 b = 9b$, or $27|p$ ce qui donne $3|b$, d'où la contradiction

avec a, b copremiers. Donc ce cas est impossible.

1445 ** J-4-1-2-3- Supposons que k'_1 est un nombre premier ≥ 5 :

** J-4-1-2-3-1- Supposons k'_1 et a copremiers. L'équation (196) donne $(A^m)^2 = k'_1 \cdot a$ ce qui est impossible avec $k'_1 \nmid a$. Donc ce cas est impossible.

1450 ** J-4-1-2-3-2- Supposons k'_1 et a sont non copremiers, soit $k'_1 | a \implies a = k'^{\alpha}_1 a_1$ avec $\alpha \geq 1$ et $k'_1 \nmid a_1$. L'équation (196) s'écrit :

$$A^{2m} = k'_1 a = k'^{\alpha+1}_1 a_1 \quad (198)$$

La dernière équation donne $k'_1 | A^{2m} \implies k'_1 | A \implies A = k'^i_1 \cdot A_1$, avec $k'_1 \nmid A_1$. Si $2i \cdot m \neq (\alpha + 1)$ c'est impossible. Nous supposons que $2i \cdot m = \alpha + 1$, par suite $k'_1 | A^m$. Revenons à l'équation (197). Si k'_1 et Ω sont copremiers, c'est impossible.

1455 Nous supposons donc que k'_1 et Ω ne sont pas copremiers c'est-à-dire que $k'_1 | \Omega$ et que l'exposant de k'_1 dans Ω est tel que l'équation (197) soit satisfaite. Nous déduisons facilement que $k'_1 | B^n$. Par suite $k'^2_1 | (p = A^{2m} + B^{2n} + A^m B^n)$, mais $4p = 3k'_1 b \implies k'_1 | b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

1460 ** J-4-1-2-4- Supposons que $k'_1 \geq 4$ non premier.

** J-4-1-2-4-1- Supposons que $k'_1 = 4$. Nous avons alors : $A^{2m} = 4a$ et $B^n C^l = 3b - 4a = 3p' - 4a$. Ce cas a été traité dans le paragraphe 5.8 cas ** I-2-.

1465 ** J-4-1-2-4-2- Nous supposons que $k'_1 > 4$ non premier.

** J-4-1-2-4-2-1- Nous supposons que a, k'_1 sont copremiers. De l'expression $A^{2m} = k'_1 \cdot a$ nous déduisons que $a = a_1^2$ et $k'_1 = k''^2_1$. Ce qui donne :

$$A^m = a_1 \cdot k''_1 \quad (199)$$

$$B^n C^l = 4^{s-1} k''^2_1 \cdot \Omega \quad (200)$$

Soit ω un nombre premier tel que $\omega|k^n_1$, soit $k^n_1 = \omega^t.k^n_2$ avec $\omega \nmid k^n_2$. Les
1470 deux équations précédentes deviennent :

$$A^m = a_1.\omega^t.k^n_2 \quad (201)$$

$$B^n.C^l = 4^{s-1}.\omega^{2t}.k^n_2.\Omega \quad (202)$$

De (201) $\omega|A^m \implies \omega|A \implies A = \omega^i.A_1$ avec $\omega \nmid A_1$ et $im = t$. De (202), nous
avons $\omega|B^n.C^l \implies \omega|B^n$ ou $\omega|C^l$.

** J-4-1-2-4-2-1-1- $\omega|B^n \implies \omega|B \implies B = \omega^j.B_1$, avec $\omega \nmid B_1$. De (201),
1475 nous avons $B^n.C^l = \omega^{2t-j.n}4^{s-1}.k^n_2.\Omega$. Si $\omega = 2$ et $2 \nmid \Omega$, nous avons $B^n.C^l = 2^{2t+2s-j.n-2}k^n_2$:

- Si $2t + 2s - jn - 2 \leq 0$ alors $2 \nmid C^l$ ce qui est en contradiction avec
 $C^l = \omega^{im}A_1^m + \omega^{jn}B_1^n$.

- Si $2t + 2s - jn - 2 \geq 1 \implies 2|C^l \implies 2|C$ et la conjecture (1) est vérifiée.

1480

(Mêmes résultats si $2|\Omega \implies \Omega = 2^\mu.\Omega_1$, on remplace $2t + 2s - jn - 2$ par
 $2t + 2s + \mu - jn - 2$). Si $\omega \neq 2$, nous avons $B^n.C^l = \omega^{2t-jn}4^{s-1}k^n_2.\Omega$.

là aussi, si $\omega \nmid \Omega$:

-Si $2t - jn \leq 0 \implies \omega \nmid C^l$ ce qui est en contradiction avec $C^l = \omega^{im}A_1^m +$
1485 $\omega^{jn}B_1^n$.

-Si $2t - jn \geq 1 \implies \omega|C^l$ et la conjecture (1) est vérifiée.

Mêmes résultats si $2|\Omega \implies \Omega = 2^\mu.\Omega_1$, on remplace $2t - jn$ par $2t + \mu - jn$.

** J-4-1-2-4-2-1-2- $\omega|C^l \implies \omega|C \implies C = \omega^h.C_1$, avec $\omega \nmid C_1$. En utilisant les
1490 mêmes méthodes en J-4-1-2-4-2-1-1 ci-dessus, nous obtenons les mêmes résultats
suivants les cas.

** J-4-1-2-4-2-2- Nous supposons que a, k'_1 sont non copremiers. Soit ω un
1495 nombre premier tel que $\omega|a$ et $\omega|k'_1$. Nous écrivons :

$$a = \omega^\alpha.a_1 \quad (203)$$

$$k'_1 = \omega^\mu . k''_1 \quad (204)$$

avec a_1, k''_1 copremiers. L'expression de A^{2m} devient $A^{2m} = \omega^{\alpha+\mu} . a_1 . k''_1$. Le terme $B^n C^l$ devient :

$$B^n C^l = 4^{s-1} . \omega^\mu . k''_1 . \Omega \quad (205)$$

** J-4-1-2-4-2-2-1- Si $\omega = 2 \implies 2|a$, mais $2 \nmid b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers. Ce cas est donc impossible.

1500

** J-4-1-2-4-2-2-2- Si $\omega \geq 3$. Nous avons $\omega|a$. Si $\omega|b$ c'est la contradiction avec a, b copremiers. Nous supposons que $\omega \nmid b$. De l'expression de A^{2m} , nous obtenons $\omega|A^{2m} \implies \omega|A \implies A = \omega^i . A_1$ avec $\omega \nmid A_1$, $i \geq 1$ et $2i.m = \alpha + \mu$. De (205), nous déduisons que $\omega|B^n$ ou $\omega|C^l$.

1505

** J-4-1-2-4-2-2-2-1- Nous supposons que $\omega|B^n \implies \omega|B \implies B = \omega^j B_1$ avec $\omega \nmid B_1$ et $j \geq 1$. Par suite, $B_1^n C^l = 4^{s-1} \omega^{\mu-jn} . k''_1 . \Omega$:

* $\omega \nmid \Omega$:

1510

- Si $\mu - jn \geq 1$ nous avons $\omega|C^l \implies \omega|C$, pas de contradiction avec $C^l = \omega^{im} A_1^m + \omega^{jn} B_1^n$ et la conjecture (1) est vérifiée.

- Si $\mu - jn \leq 0$ avec $\omega \nmid \Omega$, alors $\omega \nmid C^l$ et c'est la contradiction avec $C^l = \omega^{im} A_1^m + \omega^{jn} B_1^n$. Donc ce cas est impossible.

1515

* $\omega|\Omega$: soit $\Omega = \omega^\beta . \Omega_1$ avec $\beta \geq 1$ et $\omega \nmid \Omega_1$. Comme $3b - 4a = 4^s . \Omega = 4^s . \omega^\beta . \Omega_1 \implies 3b = 4a + 4^s . \omega^\beta . \Omega_1 = 4\omega^\alpha . a_1 + 4^s . \omega^\beta . \Omega_1 \implies 3b = 4\omega(\omega^{\alpha-1} . a_1 + 4^{s-1} . \omega^{\beta-1} . \Omega_1)$. Si $\omega = 3$ et $\beta = 1$, nous obtenons $b = 4(3^{\alpha-1} a_1 + 4^{s-1} \Omega_1)$ et $B_1^n C^l = 4^{s-1} 3^{\mu+1-jn} . k''_1 . \Omega_1$.

- Si $\mu - jn + 1 \geq 1$, alors $3|C^l$ et la conjecture (1) est vérifiée.

1520

- Si $\mu - jn + 1 \leq 0$, alors $3 \nmid C^l$ et c'est la contradiction avec $C^l = 3^{im} A_1^m + 3^{jn} B_1^n$.

Maintenant, si $\beta \geq 2$ et $\alpha = im \geq 3$, nous aurons $3b = 4\omega^2(\omega^{\alpha-2} a_1 +$

$4^{s-1}\omega^{\beta-2}\Omega_1$). Si $\omega = 3$ ou non, alors $\omega|b$, mais $\omega|a$, d'où la contradiction avec
1525 a, b copremiers.

** J-4-1-2-4-2-2-2-2- Nous supposons que $\omega|C^l \implies \omega|C \implies C = \omega^h C_1$ avec $\omega \nmid C_1$ et $h \geq 1$. Par suite, $B^n C_1^l = 4^{s-1}\omega^{\mu-hl} \cdot k''_1 \cdot \Omega$. En utilisant la méthodologie ci-dessus, nous obtenons les résultats analogues.

1530

** J-4-2- Nous supposons que $4|k'_1$.

** J-4-2-1- $k'_1 = 4 \implies 4p = 3k'_1 b = 12b \implies p = 3b = 3p'$, c'est le cas déjà étudié au I-2- paragraphe 5.8.

1535

** J-4-2-2- $k'_1 > 4$ avec $4|k'_1 \implies k'_1 = 4^s k''_1$ avec $s \geq 1$ et $4 \nmid k''_1$. Nous avons donc :

$$A^{2m} = 4^s k''_1 a = 2^{2s} k''_1 a \quad (206)$$

$$B^n C^l = 4^{s-1} k''_1 (3b - 4a) = 2^{2s-2} k''_1 (3b - 4a) \quad (207)$$

** J-4-2-2-1- Nous supposons $s = 1$ et $k'_1 = 4k''_1$ avec $k''_1 > 1$, soit $p = 3p'$ et $p' = k''_1 b$ c'est le cas 5.3 déjà étudié.

1540

** J-4-2-2-2- Nous supposons $s > 1$, par suite $k'_1 = 4^s k''_1 \implies 4p = 3 \times 4^s k''_1 b$ et nous avons :

$$A^{2m} = 4^s k''_1 a \quad (208)$$

$$B^n C^l = 4^{s-1} k''_1 (3b - 4a) \quad (209)$$

** J-4-2-2-2-1- Nous supposons que $2 \nmid (k''_1 \cdot a) \implies 2 \nmid k''_1$ et $2 \nmid a$. Comme $(A^m)^2 = (2^s)^2 \cdot (k''_1 \cdot a)$, posons $d^2 = k''_1 \cdot a$, par suite $A^m = 2^s \cdot d \implies 2|A^m \implies$
1545 $2|A \implies A = 2^i A_1$ avec $2 \nmid A_1$ et $i \geq 1$. D'où : $2^{im} A_1^m = 2^s \cdot d \implies s = im$. De l'équation (209), nous avons $2|(B^n C^l) \implies 2|B^n$ ou $2|C^l$.

** J-4-2-2-2-1-1- Nous supposons que $2|B^n \implies 2|B \implies B = 2^j.B_1$, avec $j \geq 1$ et $2 \nmid B_1$. L'équation (209) devient :

$$B_1^n C^l = 2^{2s-jn-2} k''_1 (3b-4a) = 2^{2im-jn-2} k''_1 (3b-4a) \quad (210)$$

1550 * Nous supposons que $2 \nmid (3b-4a)$:

- Si $2im - jn - 2 \geq 1$, alors $2|C^l$, pas de contradiction avec $C^l = 2^{im} A_1^m + 2^{jn} B_1^n$ et la conjecture (1) est vérifiée.

- Si $2im - jn - 2 \leq 0$, alors $2 \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = 2^{im} A_1^m + 2^{jn} B_1^n$.

1555

* Nous supposons que $2^\mu | (3b-4a)$, $\mu \geq 1$ et que a, b restent copremiers :

- Si $2im + \mu - jn - 2 \geq 1$, alors $2|C^l$, pas de contradiction avec $C^l = 2^{im} A_1^m + 2^{jn} B_1^n$ et la conjecture (1) est vérifiée.

1560 - Si $2im + \mu - jn - 2 \leq 0$, alors $2 \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = 2^{im} A_1^m + 2^{jn} B_1^n$.

** J-4-2-2-2-1-2- Nous supposons que $2|C^l \implies 2|C \implies C = 2^h.C_1$, avec $h \geq 1$ et $2 \nmid C_1$. De la même manière traitée ci-dessus, nous obtenons les mêmes résultats.

1565

** J-4-2-2-2-2- Nous supposons que $2|(k''_1.a)$:

** J-4-2-2-2-2-1- Nous supposons que k''_1 et a sont copremiers :

1570 ** J-4-2-2-2-2-1-1- Nous supposons que $2 \nmid a$ et $2|k''_1 \implies k''_1 = 2^{2\mu}.k''_2$ et $a = a_1^2$. Alors les équations (208-209) deviennent :

$$A^{2m} = 4^s . 2^{2\mu} k''_2 a_1^2 \implies A^m = 2^{s+\mu} . k''_2 . a_1 \quad (211)$$

$$B^n C^l = 4^{s-1} 2^{2\mu} k''_2 (3b-4a) = 2^{2s+2\mu-2} k''_2 (3b-4a) \quad (212)$$

L'équation (211) donne $2|A^m \implies 2|A \implies A = 2^i.A_1$ avec $2 \nmid A_1$, $i \geq 1$ et $im = s + \mu$. De l'équation (212), nous avons $2|(B^n C^l) \implies 2|B^n$ ou $2|C^l$.

1575 ** J-4-2-2-2-2-1-1-1- Nous supposons que $2|B^n \implies 2|B \implies B = 2^j \cdot B_1$, $2 \nmid B_1$
et $j \geq 1$. Par suite $B_1^n C^l = 2^{2s+2\mu-jn-2} k''_2^2 (3b-4a)$:

* Nous supposons que $2 \nmid (3b-4a)$:

- Si $2im + 2\mu - jn - 2 \geq 1$, alors $2|C^l$, pas de contradiction avec $C^l =$
1580 $2^{im} A_1^m + 2^{jn} B_1^n$ et la conjecture (1) est vérifiée.

- Si $2im + 2\mu - jn - 2 \leq 0$, alors $2 \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l =$
 $2^{im} A_1^m + 2^{jn} B_1^n$.

* Nous supposons que $2^\alpha | (3b-4a)$, $\alpha \geq 1$ et que a, b restent copremiers :

1585 - Si $2im + 2\mu + \alpha - jn - 2 \geq 1$, alors $2|C^l$, pas de contradiction avec $C^l =$
 $2^{im} A_1^m + 2^{jn} B_1^n$ et la conjecture (1) est vérifiée.

- Si $2im + 2\mu + \alpha - jn - 2 \leq 0$, alors $2 \nmid C^l$, d'où la contradiction avec
 $C^l = 2^{im} A_1^m + 2^{jn} B_1^n$.

1590 ** J-4-2-2-2-2-1-1-2- Nous supposons que $2|C^l \implies 2|C \implies C = 2^h \cdot C_1$, avec
 $h \geq 1$ et $2 \nmid C_1$. De la même manière traitée ci-dessus, nous obtenons les mêmes
résultats.

** J-4-2-2-2-2-1-2- Nous supposons que $2 \nmid k''_1$ et $2|a \implies a = 2^{2\mu} \cdot a_1^2$ et $k''_1 =$
1595 k''_2^2 . Alors les équations (208-209) deviennent :

$$A^{2m} = 4^s \cdot 2^{2\mu} a_1^2 k''_2^2 \implies A^m = 2^{s+\mu} \cdot a_1 \cdot k''_2. \quad (213)$$

$$B^n C^l = 4^{s-1} k''_2^2 (3b-4a) = 2^{2s-2} k''_2^2 (3b-4a) \quad (214)$$

L'équation (213) donne $2|A^m \implies 2|A \implies A = 2^i \cdot A_1$ avec $2 \nmid A_1$, $i \geq 1$ et
 $im = s + \mu$. De l'équation (214), nous avons $2|(B^n C^l) \implies 2|B^n$ ou $2|C^l$.

** J-4-2-2-2-2-1-2-1- Nous supposons que $2|B^n \implies 2|B \implies B = 2^j \cdot B_1$, $2 \nmid B_1$
1600 et $j \geq 1$. Par suite $B_1^n C^l = 2^{2s-jn-2} k''_2^2 (3b-4a)$:

* Nous supposons que $2 \nmid (3b - 4a) \implies 2 \nmid b$:

- Si $2im - jn - 2 \geq 1$, alors $2 \mid C^l$, pas de contradiction avec $C^l = 2^{im} A_1^m + 2^{jn} B_1^n$.

1605 - Si $2im - jn - 2 \leq 0$, alors $2 \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = 2^{im} A_1^m + 2^{jn} B_1^n$.

* Nous supposons que $2^\alpha \mid (3b - 4a)$, $\alpha \geq 1$, dans ce cas a, b sont non copremiers, c'est la contradiction.

1610

** J-4-2-2-2-2-1-2-2- Nous supposons que $2 \mid C^l \implies 2 \mid C \implies C = 2^h . C_1$, avec $h \geq 1$ et $2 \nmid C_1$. De la même manière traitée ci-dessus, nous obtenons les mêmes résultats.

1615

** J-4-2-2-2-2-2- Nous supposons k''_1 et a sont non copremiers avec $2 \mid a$ et $2 \mid k''_1$. Soit $a = 2^t . a_1$ et $k''_1 = 2^\mu k''_2$ et $2 \nmid a_1$ et $2 \nmid k''_2$. De (208), nous avons $\mu + t = 2\lambda$ et $a_1 . k''_2 = \omega^2$. Les équations (208-209) deviennent :

$$A^{2m} = 4^s k''_1 a = 2^{2s} . 2^\mu k''_2 . 2^t . a_1 = 2^{2s+2\lambda} . \omega^2 \implies A^m = 2^{s+\lambda} . \omega \quad (215)$$

$$B^n C^l = 4^{s-1} 2^\mu k''_2 (3b - 4a) = 2^{2s+\mu-2} k''_2 (3b - 4a) \quad (216)$$

De (215) nous avons $2 \mid A^m \implies 2 \mid A \implies A = 2^i A_1, i \geq 1$ et $2 \nmid A_1$. De (216), $2s + \mu - 2 \geq 1$, nous déduisons $2 \mid (B^n C^l) \implies 2 \mid B^n$ ou $2 \mid C^l$.

1620

** J-4-2-2-2-2-2-1- Nous supposons $2 \mid B^n \implies 2 \mid B \implies B = 2^j . B_1, 2 \nmid B_1$ et $j \geq 1$. Par suite $B_1^n C^l = 2^{2s+\mu-jn-2} k''_2 (3b - 4a)$:

* Nous supposons que $2 \nmid (3b - 4a)$:

1625

- Si $2s + \mu - jn - 2 \geq 1$, alors $2 \mid C^l$, pas de contradiction avec $C^l = 2^{im} A_1^m + 2^{jn} B_1^n$ et la conjecture (1) est vérifiée.

- Si $2s + \mu - jn - 2 \leq 0$, alors $2 \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = 2^{im} A_1^m + 2^{jn} B_1^n$.

* Nous supposons que $2^\alpha | (3b - 4a)$, pour une valeur $\alpha \geq 1$. Comme $2|a$, alors $2^\alpha | (3b - 4a) \implies 2|(3b - 4a) \implies 2|(3b) \implies 2|b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

1635 ** J-4-2-2-2-2-2- Nous supposons que $2|C^l \implies 2|C \implies C = 2^h.C_1$, avec $h \geq 1$ et $2 \nmid C_1$. De la même manière traitée ci-dessus, nous obtenons les mêmes résultats.

** J-4-3- $2|k'_1$ et $2|(3b - 4a)$: Alors nous obtenons $2|k'_1 \implies k'_1 = 2^t.k''_1$ avec
1640 $t \geq 1$ et $2 \nmid k''_1$. $2|(3b - 4a) \implies 3b - 4a = 2^\mu.d$ avec $\mu \geq 1$ et $2 \nmid d$. Nous avons aussi $2|b$. Si $2|a$, c'est la contradiction avec a, b copremiers. Nous supposons dans la suite de cette section que $2 \nmid a$. Les équations (208-209) deviennent :

$$A^{2m} = 2^t.k''_1.a = (A^m)^2 \quad (217)$$

$$B^n C^l = 2^{t-1}k''_1.2^{\mu-1}d = 2^{t+\mu-2}k''_1.d \quad (218)$$

De (217), nous déduisons que t est un exposant pair, soit $t = 2\lambda$. Par suite, nous posons $\omega^2 = k''_1.a$ ce qui donne $A^m = 2^\lambda.\omega \implies 2|A^m \implies 2|A \implies A = 2^i.A_1$
1645 avec $i \geq 1$ et $2 \nmid A_1$. De (218), nous avons $2\lambda + \mu - 2 \geq 1$, par suite $2|(B^n C^l) \implies 2|B^n$ ou $2|C^l$:

** J-4-3-1- Nous supposons que $2|B^n \implies 2|B \implies B = 2^j B_1$, avec $j \geq 1$ et $2 \nmid B_1$. Il s'ensuit que $B_1^n C^l = 2^{2\lambda+\mu-jn-2}.k''_1.d$.

1650 - Si $2\lambda + \mu - jn - 2 \geq 1$, nous avons $2|C^l \implies 2|C$, il n'y a pas de contradiction avec $C^l = 2^{im} A_1^m + 2^{jn} B_1^n$ et la conjecture (1) est vérifiée.

- Si $2s + t + \mu - jn - 2 \leq 0$, il s'ensuit que $2 \nmid C$, d'où la contradiction avec $C^l = 2^{im} A_1^m + 2^{jn} B_1^n$.

1655 ** J-4-3-2- Nous supposons que $2|C^l \implies 2|C$. En utilisant la même méthode ci-dessus, nous obtenons les mêmes résultats.

Le Principal Théorème est démontré.

6. Exemples Numériques

6.1. Exemple 1 :

1660 Soit l'exemple : $6^3 + 3^3 = 3^5$ avec $A^m = 6^3$, $B^n = 3^3$ et $C^l = 3^5$. Avec les notations utilisées dans le papier, nous obtenons :

$$p = 3^6 \times 73, \quad q = 8 \times 3^{11}, \quad \bar{\Delta} = 4 \times 3^{18}(3^7 \times 4^2 - 73^3) < 0 \quad (219)$$

$$\rho = \frac{3^8 \times 73\sqrt{73}}{\sqrt{3}}, \quad \cos\theta = -\frac{4 \times 3^3 \times \sqrt{3}}{73\sqrt{73}} \quad (220)$$

Comme $A^{2m} = \frac{4p}{3} \cdot \cos^2 \frac{\theta}{3} \implies \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{3A^{2m}}{4p} = \frac{3 \times 2^4}{73} = \frac{a}{b} \implies a = 3 \times 2^4$, $b = 73$; alors :

$$\cos \frac{\theta}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{73}}, \quad p = 3^6 \cdot b \quad (221)$$

On vérifie facilement l'équation (220) utilisant (221). Pour cet exemple, nous 1665 pouvons utiliser les deux conditions de (30) comme $3|a, b|4p$ et $3|p$. Les cas 4.4 et 5.3 sont respectivement utilisés. Pour le cas 4.4, c'est le sous-cas B-2-2-1- qui est a été utilisé et la conjecture (1) est vérifiée. Concernant le cas 5.3, c'est le sous-cas G-2-2-1- qui a été appliqué et la conjecture (1) est vérifiée. Nous 1670 trouvons pour les deux cas que A^m, B^n et C^l de l'exemple 1 ont un facteur commun ce qui est vrai.

6.2. Exemple 2 :

Soit le deuxième exemple : $7^4 + 7^3 = 14^3$. Nous prenons $A^m = 7^4$, $B^n = 7^3$ et $C^l = 14^3$. Nous obtenons $p = 57 \times 7^6 = 3 \times 19 \times 7^6$, $q = 8 \times 7^{10}$, $\bar{\Delta} = 27q^2 - 4p^3 = 27 \times 4 \times 7^{18}(16 \times 49 - 19^3) = -27 \times 4 \times 7^{18} \times 6075 < 0$, $\rho = 19 \times 7^9 \times \sqrt{19}$, $\cos\theta = -\frac{4 \times 7}{19\sqrt{19}}$. Comme $A^{2m} = \frac{4p}{3} \cdot \cos^2 \frac{\theta}{3} \implies \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{3A^{2m}}{4p} = \frac{7^2}{4 \times 19} = \frac{a}{b} \implies a = 7^2$, $b = 4 \times 19$, alors $\cos \frac{\theta}{3} = \frac{7}{2\sqrt{19}}$ et nous avons le cas $3|p$ et $b|(4p)$. Le calcul de $\cos\theta$ à partir de l'expression de $\cos \frac{\theta}{3}$ confirme la valeur ci-dessous :

$$\cos\theta = \cos 3(\theta/3) = 4\cos^3 \frac{\theta}{3} - 3\cos \frac{\theta}{3} = 4 \left(\frac{7}{2\sqrt{19}} \right)^3 - 3 \frac{7}{2\sqrt{19}} = -\frac{4 \times 7}{19\sqrt{19}}$$

Nous obtenons donc $3|p \Rightarrow p = 3p'$, $b|(4p)$ avec $b \neq 2, 4$ alors $12p' = k_1 b = 3 \times 7^6 b$. Ceci concerne le paragraphe 5.9 de la deuxième hypothèse. Comme $k_1 = 3 \times 7^6 = 3k'_1$ avec $k'_1 = 7^6 \neq 1$. C'est le sous-cas J-4-1-2-4-2-2- avec la condition $4|(3b - 4a)$. Vérifions alors :

$$3b - 4a = 3 \times 4 \times 19 - 4 \times 7^2 = 32 \implies 4|(3b - 4a) \quad (222)$$

avec $A^{2m} = 7^8 = 7^6 \times 7^2 = k'_1 \cdot a$ et k'_1 non premier, avec a et k'_1 non copremiers avec $\omega = 7 \nmid \Omega (= 2)$. Nous retrouvons bien que la conjecture (1) est vérifiée avec un facteur commun à savoir le nombre premier 7 un diviseur de $k'_1 = 7^6$.

6.3. Exemple 3 :

Soit le troisième exemple : $19^4 + 38^3 = 57^3$. Nous prenons $A^m = 19^4$, $B^n = 38^3$ et $C^l = 57^3$. Nous obtenons $p = 19^6 \times 577$, $q = 8 \times 27 \times 19^{10}$, $\bar{\Delta} = 27q^2 - 4p^3 = 4 \times 19^{18}(27^3 \times 16 \times 19^2 - 577^3) < 0$, $\rho = \frac{19^9 \times 577 \sqrt{577}}{3\sqrt{3}}$, $\cos\theta = -\frac{4 \times 3^4 \times 19\sqrt{3}}{577\sqrt{577}}$. Comme $A^{2m} = \frac{4p}{3} \cdot \cos^2 \frac{\theta}{3} \implies \cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{3A^{2m}}{4p} = \frac{3 \times 19^2}{4 \times 577} = \frac{a}{b} \implies a = 3 \times 19^2$, $b = 4 \times 577$, alors $\cos \frac{\theta}{3} = \frac{19\sqrt{3}}{2\sqrt{577}}$ et nous avons le cas $3|a$ et $b|(4p)$. Le calcul de $\cos\theta$ à partir de l'expression de $\cos \frac{\theta}{3}$ confirme la valeur ci-dessus :

$$\cos\theta = \cos 3(\theta/3) = 4\cos^3 \frac{\theta}{3} - 3\cos \frac{\theta}{3} = 4 \left(\frac{19\sqrt{3}}{2\sqrt{577}} \right)^3 - 3 \frac{19\sqrt{3}}{2\sqrt{577}} = -\frac{4 \times 3^4 \times 19\sqrt{3}}{577\sqrt{577}}$$

Nous obtenons donc $3|a \Rightarrow a = 3a' = 3 \times 19^2$, $b|(4p)$ avec $b \neq 2, 4$ et $b = 4p'$ avec $p = kp'$ soit $p' = 577$ et $k = 19^6$. Ceci concerne le paragraphe 4.8 de la première hypothèse. C'est le sous-cas E-2-2-2-2-1- avec $\omega = 19$, a', ω non copremiers et $\omega = 19 \nmid (p' - a') = (577 - 19^2)$ avec $s - jn = 6 - 1 \times 3 = 3 \geq 1$, et la conjecture (1) est vérifiée.

6.4. Exemple 4 :

Enfin soit l'exemple $7^2 + 2^5 = 3^4$, avec $A^m = 7^2$; $B^n = 2^5$; $C^l = 3^4$. Nous obtenons $p = 4999$ un nombre premier, $q = 2^5 \times 7^2 \times 3^4 = 127008$. Par suite, nous

trouvons que $\bar{\Delta} = 27q^2 - 4p^3 = -62\,365\,072\,900 < 0$ et $\rho = \frac{p\sqrt{p}}{3\sqrt{3}} = \frac{4993\sqrt{4933}}{3\sqrt{3}}$,
 $\cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{3A^{2m}}{4p} = \frac{3 \times 7^4}{4 \times 4993} = \frac{a}{b} \implies a = 3 \times 7^4$ et $b = 4 \times 4993 = 4p$. Nous
1690 sommes dans la première hypothèse $3|a$ et $b|4p$. C'est le cas 4.6 avec $3|a$ et
 $b = 4p$, mais pour ce cas, c'est impossible et c'est vérifié car $7^2, 2^5$ et 3^4 sont
premiers entre eux. En plus, nous avons aussi un exposant égal à 2 contraire au
fait que les exposants m, n et l sont > 2 .

7. Conclusion

1695 La méthode utilisée pour prouver que la conjecture de Beal est certes vraie
du niveau du premier cycle universitaire scientifique, a demandé l'étude de plu-
sieurs cas possibles. Nous avons confirmé la méthode par les quatre exemples
numériques présentés. En conclusion, nous annoncerions le théorème :

Théorème 2. (*A. Ben Hadj Salem, A. Beal, 2016*) : Soient $A, B, C, m, n,$
1700 *et l des entiers positifs avec $m, n, l > 2$. Si :*

$$A^m + B^n = C^l \tag{223}$$

alors A, B, et C ont un facteur en commun.

Remerciements : Je remercie Professeur Thong Nguyen Quang Do de m'avoir
indiqué l'ouvrage de D.A. Cox cité en références ci-dessous.

Références

- 1705 [1] R. DANIEL MAULDIN. *A Generalization of Fermat's Last Theorem : The
Beal Conjecture et Prize Problem*. Notice of AMS, Vol 44, n°11, 1997, pp
1436-1437.
- [2] B.M. STEWART. *Theory of Numbers*. Second edition. The Macmillan
1710 Compagny, New York. 1964. 390 pages.

- [3] E.D. BOLKER. *Elementary Number Theory : An Algebraic Approach*. W.A. Benjamin, Inc., New York. 1970. 195 pages.
- 1715 [4] D.A. COX. *Primes of the form $x^2 + ny^2$, Fermat, class field theory and complex multiplication*. A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons Inc., New York. 1989. 363 pages.
- 1720 [5] G. FREI. *Leonhard Euler's convenient numbers*. The Mathematical Intelligencer, Vol. 7, n°3 (1985), pp.55-58 and 64.