Démonstration Complète de la Conjecture de BEAL - Suivie d'Exemples Numériques

ABDELMAJID BEN HADJ SALEM, DIPL.-ENG.

17 décembre 2016

Résumé

En 1997, Andrew Beal [1] avait annoncé la conjecture suivante : *Soient A, B, C, m, n, et l des entiers positifs avec $m, n, l > 2$. Si $A^m + B^n = C^l$ alors A, B, et C ont un facteur en commun.* Nous considérons le polynôme $P(x) = (x - A^m)(x - B^n)(x + C^l) = x^3 - px + q$ avec p, q des entiers qui dépendent de A^m, B^n et C^l. La résolution de $x^3 - px + q = 0$ nous donne les trois racines x_1, x_2, x_3 comme fonctions de p, q et d'un paramètre θ. Comme $A^m, B^n, -C^l$ sont les seules racines de $x^3 - px + q = 0$, nous discutons les conditions pour que x_1, x_2, x_3 soient des entiers. Quatre exemples numériques sont présentés.

Abstract

In 1997, Andrew Beal [1] announced the following conjecture : *Let A, B, C, m, n, and l be positive integers with $m, n, l > 2$. If $A^m + B^n = C^l$ then A, B, and C have a common factor.* We begin to construct the polynomial $P(x) = (x - A^m)(x - B^n)(x + C^l) = x^3 - px + q$ with p, q integers depending of A^m, B^n and C^l. We resolve $x^3 - px + q = 0$ and we obtain the three roots x_1, x_2, x_3 as functions of p, q and a parameter θ. Since $A^m, B^n, -C^l$ are the only roots of $x^3 - px + q = 0$, we discuss the conditions that x_1, x_2, x_3 are integers. Four numerical examples are given.

keywords : Prime numbers, divisibility, roots of polynomials of third degree, convenient numbers, diophantine equations.

2010 MCS 11AXX 11D41

A mon épouse Wahida,
mes enfants Senda et Mohamed Mazen

Table des matières

1 Introduction

En 1997, Andrew Beal [1] avait annoncé la conjecture suivante :

Conjecture 1.1. Soient A, B, C, m, n, et l des entiers positifs avec $m, n, l > 2$. Si :

$$A^m + B^n = C^l \tag{1.1}$$

alors A, B, et C ont un facteur commun.

Dans ce papier, nous allons donner une démonstration de la conjecture de Beal. Notre idée est de considérer un polynôme $P(x)$ de troisième degré ayant comme racines les nombres A^m, B^n et $-C^l$ en tenant compte de la condition (1.1). Le papier est organisé comme suit : dans la section 2, nous exprimons les racines de $P(x) = x^3 - px + q = 0$ en fonction de deux paramètres ρ, θ qui dépendent de A^m, B^n et C^l. Les section 3,4 et 5 représentent la partie importante du papier, nous obtenons que $A^{2m} = \dfrac{4p}{3} cos^2 \dfrac{\theta}{3}$. Comme A^{2m} est un entier, il s'ensuit que $cos^2 \dfrac{\theta}{3}$ doit être écrit comme une fraction $\dfrac{a}{b}$ où a, b sont deux entiers positifs non nuls copremiers. Nous discutons alors les conditions de divisibilité de p, a, b telles que l'expression de A^{2m} soit un entier et que a, b restent copremiers. Suivant les cas étudiés, nous obtenons que A, B, C aient ou non un facteur commun. Dans la section 6, quatre exemples numériques sont présentés et nous finissons par la conclusion en section 7.

1.1 Cas trivial

Nous commençons avec le cas trivial où $A^m = B^n$. L'équation (1.1) devient :

$$2A^m = C^l \tag{1.2}$$

Comme $l > 2$, nous déduisons facilement que 2 est un facteur commun. La conjecture (1.1) est vérifiée.

Nous supposons dans la suite que $A^m > B^n$.

2 Calculs Préliminaires

Nous supposons la donnée de $m, n, l \in \mathbb{N}^* \ > 2$ et $A, B, C \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$A^m + B^n = C^l \tag{2.1}$$

Nous appelerons :

$$P(x) = (x - A^m)(x - B^n)(x + C^l) \tag{2.2}$$

Utilisant l'équation (2.1), $P(x)$ peut s'écrire :

$$P(x) = x^3 + x[A^m B^n - (A^m + B^n)^2] + A^m B^n (A^m + B^n) \tag{2.3}$$

Nous introduisons les notations :

$$p = (A^m + B^n)^2 - A^m B^n; \quad q = A^m B^n (A^m + B^n) \tag{2.4}$$

Comme $A^m \neq B^n$, nous obtenons $p > 0$. L'équation (2.3) devient :

$$P(x) = x^3 - px + q \tag{2.5}$$

en utilisant l'équation (2.2), $P(x) = 0$ a trois racines réelles différentes : A^m, B^n et $-C^l$. Maintenant, résolvons l'équation :

$$P(x) = x^3 - px + q = 0 \tag{2.6}$$

Pour résoudre (2.6), posons :

$$x = u + v; \quad \alpha = A^m B^n > 0; \quad \beta = (A^m + B^n)^2 \tag{2.7}$$

Alors $P(x) = 0$ donne les deux conditions sur u et v :

$$u^3 + v^3 = -q; \quad uv = p/3 > 0 \tag{2.8}$$

Alors u^3 et v^3 sont solutions de l'équation du second degré :

$$X^2 + qX + p^3/27 = 0 \tag{2.9}$$

Son descriminant Δ s'écrit :

$$\Delta = q^2 - 4p^3/27 = \frac{27q^2 - 4p^3}{27} = \frac{\bar{\Delta}}{27}$$

avec :

$$\bar{\Delta} = 27q^2 - 4p^3 = 27\alpha^2\beta - 4(\beta - \alpha)^3$$

Comme $\alpha \neq 0$, nous pouvons aussi re-écrire l'équation précédente comme :

$$\bar{\Delta} = \alpha^3 \left(27\frac{\beta}{\alpha} - 4\left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right)^3 \right)$$

Nous appelons t le paramètre $\dfrac{\beta}{\alpha}$, $\bar{\Delta}$ devient :

$$\bar{\Delta} = \alpha^3(27t - 4(t-1)^3)$$

Notons :

$$y = y(t) = 27t - 4(t-1)^3 \tag{2.10}$$

Comme $\alpha > 0$, le signe de $\bar{\Delta}$ est aussi le signe de $y(t)$. L'étude du signe de la fonction y montre que $y < 0$ pour $t > 4$. Dans notre cas, nous sommes intéressés à $t > 0$. Pour $t = 4$, nous obtenons $y(4) = 0$ et pour $t \in]0, 4[$, $y > 0$. Comme nous avons $t = \frac{\beta}{\alpha} > 4$ parce que $A^m \neq B^n$:

$$(A^m - B^n)^2 > 0 \Longrightarrow \beta = (A^m + B^n)^2 > 4\alpha = 4A^mB^n \tag{2.11}$$

Alors $y < 0 \Longrightarrow \bar{\Delta} < 0 \Longrightarrow \Delta < 0$. Alors l'équation (2.9) n'a pas de racines réelles u^3 et v^3. Retrouvons les solutions u et v avec $x = u + v$ un réel positif ou négatif et $u.v = p/3$.

2.1 Démonstration

Démonstration. Les solutions de l'équation (2.9) sont :

$$X_1 = \frac{-q + i\sqrt{-\Delta}}{2}; \quad X_2 = \overline{X_1} = \frac{-q - i\sqrt{-\Delta}}{2}$$

Nous devons résoudre :

$$u^3 = \frac{-q + i\sqrt{-\Delta}}{2}; \quad v^3 = \frac{-q - i\sqrt{-\Delta}}{2}$$

Ecrivons X_1 sous la forme $X_1 = \rho e^{i\theta}$ avec :

$$\rho = \frac{\sqrt{q^2 - \Delta}}{2} = \frac{p\sqrt{p}}{3\sqrt{3}}; \quad sin\theta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2\rho} > 0; \quad cos\theta = -\frac{q}{2\rho} < 0 \tag{2.12}$$

alors $\theta\,[2\pi] \in]+\dfrac{\pi}{2}, +\pi[$, soit :

$$\boxed{\frac{\pi}{2} < \theta < +\pi \Rightarrow \frac{\pi}{6} < \frac{\theta}{3} < \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} < cos\frac{\theta}{3} < \frac{\sqrt{3}}{2}} \tag{2.13}$$

et :

$$\boxed{\frac{1}{4} < cos^2\frac{\theta}{3} < \frac{3}{4}} \tag{2.14}$$

d'où l'expression de X_2 : $X_2 = \rho e^{-i\theta}$. Posons :

$$u = re^{i\psi}\,; \quad \text{et } j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}} \tag{2.15}$$

avec j est une racine complexe cubique de l'unité, alors les solutions u et v sont :

$$\begin{cases} u_1 = re^{i\psi_1} = \sqrt[3]{\rho}e^{i\frac{\theta}{3}} \\ u_2 = re^{i\psi_2} = \sqrt[3]{\rho}je^{i\frac{\theta}{3}} = \sqrt[3]{\rho}e^{i\frac{\theta+2\pi}{3}} \\ u_3 = re^{i\psi_3} = \sqrt[3]{\rho}j^2e^{i\frac{\theta}{3}} = \sqrt[3]{\rho}e^{i\frac{4\pi}{3}}e^{+i\frac{\theta}{3}} = \sqrt[3]{\rho}e^{i\frac{\theta+4\pi}{3}} \end{cases} \tag{2.16}$$

et similairement :

$$\begin{cases} v_1 = re^{-i\psi_1} = \sqrt[3]{\rho}e^{-i\frac{\theta}{3}} \\ v_2 = re^{-i\psi_2} = \sqrt[3]{\rho}j^2e^{-i\frac{\theta}{3}} = \sqrt[3]{\rho}e^{i\frac{4\pi}{3}}e^{-i\frac{\theta}{3}} = \sqrt[3]{\rho}e^{i\frac{4\pi-\theta}{3}} \\ v_3 = re^{-i\psi_3} = \sqrt[3]{\rho}je^{-i\frac{\theta}{3}} = \sqrt[3]{\rho}e^{i\frac{2\pi-\theta}{3}} \end{cases} \tag{2.17}$$

Nous devons choisir u_k et v_h tels que $u_k + v_h$ soit réel. Dans ce cas, nous avons nécessairement :

$$v_1 = \overline{u_1}; \quad v_2 = \overline{u_2}; \quad v_3 = \overline{u_3}$$

Nous obtenons comme solutions réelles de l'équation (2.6) :

$$\begin{cases} x_1 = u_1 + v_1 = 2\sqrt[3]{\rho}cos\dfrac{\theta}{3} > 0 \\ x_2 = u_2 + v_2 = 2\sqrt[3]{\rho}cos\frac{\theta+2\pi}{3} = -\sqrt[3]{\rho}\left(cos\frac{\theta}{3} + \sqrt{3}sin\frac{\theta}{3}\right) < 0 \\ x_3 = u_3 + v_3 = 2\sqrt[3]{\rho}cos\frac{\theta+4\pi}{3} = \sqrt[3]{\rho}\left(-cos\frac{\theta}{3} + \sqrt{3}sin\frac{\theta}{3}\right) > 0 \end{cases} \tag{2.18}$$

Comparant les expressions de x_1 et x_3, nous obtenons facilement $x_1 > x_3$. Comme A^m, B^n et $-C^l$ sont les seules solutions réelles de (2.6), nous considérons, comme A^m est supposé supérieur à B^n, les expressions :

$$\boxed{\begin{cases} A^m = x_1 = u_1 + v_1 = 2\sqrt[3]{\rho}cos\dfrac{\theta}{3} \\[2ex] B^n = x_3 = u_3 + v_3 = 2\sqrt[3]{\rho}cos\dfrac{\theta+4\pi}{3} = \sqrt[3]{\rho}\left(-cos\dfrac{\theta}{3} + \sqrt{3}sin\dfrac{\theta}{3}\right) \\[2ex] -C^l = x_2 = u_2 + v_2 = 2\sqrt[3]{\rho}cos\dfrac{\theta+2\pi}{3} = -\sqrt[3]{\rho}\left(cos\dfrac{\theta}{3} + \sqrt{3}sin\dfrac{\theta}{3}\right) \end{cases}} \tag{2.19}$$

□

3 Préambule de la Démonstration du Principal Théorème

Théorème 3.1. *Soient A, B, C, m, n, et l des entiers positifs avec $m, n, l > 2$. Si :*

$$A^m + B^n = C^l \tag{3.1}$$

alors A, B, et C ont un facteur commun.

Démonstration. $A^m = 2\sqrt[3]{\rho}cos\dfrac{\theta}{3}$ est un entier $\Rightarrow A^{2m} = 4\sqrt[3]{\rho^2}cos^2\dfrac{\theta}{3}$ est un entier. Mais :

$$\sqrt[3]{\rho^2} = \frac{p}{3} \tag{3.2}$$

Alors :

$$A^{2m} = 4\sqrt[3]{\rho^2}cos^2\frac{\theta}{3} = 4\frac{p}{3}.cos^2\frac{\theta}{3} = p.\frac{4}{3}.cos^2\frac{\theta}{3} \tag{3.3}$$

Comme A^{2m} est un entier, et p est un entier, alors $cos^2\dfrac{\theta}{3}$ doit être écrit sous la forme :

$$\boxed{cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{1}{b} \quad ou \quad cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{a}{b}} \tag{3.4}$$

avec $b \in \mathbb{N}^*$, pour la dernière condition $a \in \mathbb{N}^*$ et a, b copremiers.

Notations : dans la suite du papier, les scalaires $a, b, ..., z,\ \alpha, \beta, ...,\ A, B, C, ...$ et $\Delta, \Phi, ...$ représentent des entiers positifs sauf les paramètres θ, ρ, ou ceux mentionnés dans le texte, sont des réels.

3.1 Cas $cos^2\dfrac{\theta}{3} = \dfrac{1}{b}$

Nous obtenons :

$$A^{2m} = p.\frac{4}{3}.cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{4.p}{3.b} \tag{3.5}$$

Comme $\dfrac{1}{4} < cos^2\dfrac{\theta}{3} < \dfrac{3}{4} \Rightarrow \dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{b} < \dfrac{3}{4} \Rightarrow b < 4 < 3b \Rightarrow b = 1, 2, 3.$

3.1.1 $b = 1$

$b = 1 \Rightarrow 4 < 3$ ce qui est impossible.

3.1.2 $b = 2$

$b = 2 \Rightarrow A^{2m} = p.\dfrac{4}{3}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{2.p}{3} \Rightarrow 3|p \Rightarrow p = 3p'$ avec $p' \neq 1$ parce que $3 \ll p$, nous obtenons :

$$A^{2m} = (A^m)^2 = \frac{2p}{3} = 2.p' \Longrightarrow 2|p' \Longrightarrow p' = 2^\alpha p_1^2$$
$$avec \quad 2 \nmid p_1, \quad \alpha + 1 = 2\beta$$
$$A^m = 2^\beta p_1 \tag{3.6}$$
$$B^nC^l = \sqrt[3]{\rho^2}\left(3 - 4cos^2\frac{\theta}{3}\right) = p' = 2^\alpha p_1^2 \tag{3.7}$$

De l'équation (3.6), il s'ensuit que $2|A^m \Longrightarrow A = 2^iA_1,\ i \geq 1$ et $2 \nmid A_1$. Par suite, nous avons $\beta = i.m = im$. L'équation (3.7) entraîne que $2|(B^nC^l) \Longrightarrow 2|B^n$ ou $2|C^l$.

Cas $2|B^n$: Si $2|B^n \Longrightarrow 2|B \Longrightarrow B = 2^j B_1$ avec $2 \nmid B_1$. L'expression de $B^n C^l$ devient :

$$B_1^n C^l = 2^{2im-1-jn} p_1^2$$

- Si $2im - 1 - jn \geq 1$, $2|C^l \Longrightarrow 2|C$ en accord avec $C^l = 2^{im} A_1^m + 2^{jn} B_1^n$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.
- Si $2im - 1 - jn \leq 0 \Longrightarrow 2 \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = 2^{im} A_1^m + 2^{jn} B_1^n$.

Cas $2|C^l$: Si $2|C^l$: de la même manière traitée ci-dessus, nous obtenons les mêmes résultats.

3.1.3 $b = 3$

$b = 3 \Rightarrow A^{2m} = p.\dfrac{4}{3}.\dfrac{1}{3} = \dfrac{4p}{9} \Rightarrow 9|p \Rightarrow p = 9p'$ avec $p' \neq 1$ comme $9 \ll p$ alors $A^{2m} = 4p'$. Si p' est premier c'est impossible. Nous supposons que p' est non premier, comme $m \geq 3$, il s'ensuit que $2|p'$, d'où $2|A^m$. Or $B^n C^l = 5p'$ et $2|(B^n C^l)$. En utilisant la manière traitée du cas $b = 2$, nous obtenons les mêmes résultats.

3.2 Cas $a > 1,\ cos^2\dfrac{\theta}{3} = \dfrac{a}{b}$

Nous avons donc :

$$cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{a}{b}; \quad A^{2m} = p.\frac{4}{3}.cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{4.p.a}{3.b} \tag{3.8}$$

où a, b vérifient l'une des deux conditions :

$$\boxed{\{3|a \quad et \quad b|4p\}} \text{ ou } \boxed{\{3|p \quad et \quad b|4p\}} \tag{3.9}$$

et en utilisant l'équation (2.14), nous obtenons une troisième condition :

$$\boxed{b < 4a < 3b} \tag{3.10}$$

Pour ces conditions, $A^{2m} = 4\sqrt[3]{\rho^2} cos^2\frac{\theta}{3} = 4\dfrac{p}{3}.cos^2\dfrac{\theta}{3}$ est un entier.

Etudions alors les conditions données par l'équation (3.9) dans les deux sections suivantes.

4 Hypothèse : $\{3|a \quad et \quad b|4p\}$

Nous avons donc :

$$3|a \Longrightarrow \exists a' \in \mathbb{N}^* \ / \ a = 3a' \tag{4.1}$$

4.1 Cas $b = 2$ et $3|a$:

A^{2m} s'écrit :

$$A^{2m} = \frac{4p}{3}.cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3}.\frac{a}{b} = \frac{4p}{3}.\frac{a}{2} = \frac{2.p.a}{3} \tag{4.2}$$

En utilisant l'équation (4.1), A^{2m} devient :

$$A^{2m} = \frac{2.p.3a'}{3} = 2.p.a' \tag{4.3}$$

mais $cos^2\dfrac{\theta}{3} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{3a'}{2} > 1$ ce qui est impossible, d'où $b \neq 2$.

4.2 Cas $b = 4$ et $3|a$:

A^{2m} s'écrit :

$$A^{2m} = \frac{4.p}{3}cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{4.p}{3}.\frac{a}{b} = \frac{4.p}{3}.\frac{a}{4} = \frac{p.a}{3} = \frac{p.3a'}{3} = p.a' \tag{4.4}$$

$$\text{et} \quad cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{a}{b} = \frac{3.a'}{4} < \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \Longrightarrow a' < 1 \tag{4.5}$$

ce qui est impossible. Alors le cas $b = 4$ est impossible.

4.3 Cas $b = p$ et $3|a$:

Nous avons :

$$cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{a}{b} = \frac{3a'}{p} \tag{4.6}$$

et :

$$A^{2m} = \frac{4p}{3}.cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3}.\frac{3a'}{p} = 4a' = (A^m)^2 \tag{4.7}$$

$$\exists a" \ / \ a' = a"^2 \tag{4.8}$$

$$et \quad B^nC^l = p - A^{2m} = b - 4a' = b - 4a"^2 \tag{4.9}$$

Le calcul A^mB^n donne :

$$A^mB^n = p.\frac{\sqrt{3}}{3}sin\frac{2\theta}{3} - 2a'$$

$$ou \quad A^mB^n + 2a' = p.\frac{\sqrt{3}}{3}sin\frac{2\theta}{3} \tag{4.10}$$

Le membre à gauche de (4.10) est un entier et p aussi, alors $2\frac{\sqrt{3}}{3}sin\frac{2\theta}{3}$ s'écrit sous la forme :

$$2\frac{\sqrt{3}}{3}sin\frac{2\theta}{3} = \frac{k_1}{k_2} \tag{4.11}$$

où k_1, k_2 sont deux entiers copremiers et $k_2|p \Longrightarrow p = b = k_2.k_3$, $k_3 \in \mathbb{N}^*$.

** A-1- Nous supposons que $k_3 \neq 1$, nous obtenons :

$$A^m(A^m + 2B^n) = k_1.k_3 \tag{4.12}$$

Soit μ un entier premier avec $\mu|k_3$, alors $\mu|b$ et $\mu|A^m(A^m + 2B^n) \Longrightarrow \mu|A^m$ ou $\mu|(A^m + 2B^n)$.

** A-1-1- Si $\mu|A^m \Longrightarrow \mu|A$ et $\mu|A^{2m}$, mais $A^{2m} = 4a' \Longrightarrow \mu|4a' \Longrightarrow (\mu = 2$ mais $2|a')$ ou $(\mu|a')$. Alors $\mu|a$ d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** A-1-2- Si $\mu|(A^m + 2B^n) \Longrightarrow \mu \nmid A^m$ et $\mu \nmid 2B^n$ alors $\mu \neq 2$ et $\mu \nmid B^n$. Nous écrivons $\mu|(A^m + 2B^n)$ comme :

$$A^m + 2B^n = \mu.t' \tag{4.13}$$

Il s'ensuit :

$$A^m + B^n = \mu t' - B^n \Longrightarrow A^{2m} + B^{2n} + 2A^m B^n = \mu^2 t'^2 - 2t'\mu B^n + B^{2n}$$

En utilisant l'expression de p :

$$p = t'^2 \mu^2 - 2t' B^n \mu + B^n (B^n - A^m) \tag{4.14}$$

Comme $p = b = k_2.k_3$ et $\mu | k_3$ alors $\mu | b \Longrightarrow \exists \mu'$ et $b = \mu\mu'$, ainsi nous pouvons écrire :

$$\mu' \mu = \mu(\mu t'^2 - 2t' B^n) + B^n (B^n - A^m) \tag{4.15}$$

De la dernière équation, nous obtenons $\mu | B^n (B^n - A^m) \Longrightarrow \mu | B^n$ ou $\mu | (B^n - A^m)$.

** A-1-2-1- Si $\mu | B^n$ ce qui en contradiction avec $\mu \nmid B^n$.

** A-1-2-2- Si $\mu | (B^n - A^m)$ et utilisant $\mu | (A^m + 2B^n)$, nous arrivons à :

$$\mu | 3B^n \begin{cases} \mu | B^n \\ ou \\ \mu = 3 \end{cases} \tag{4.16}$$

** A-1-2-2-1- Si $\mu | B^n \Longrightarrow \mu | B$ c'est la contradiction avec $\mu \nmid B$ citée ci-dessus.

** A-1-2-2-2- Si $\mu = 3$, alors $3 | b$, mais $3 | a$ alors la contradiction avec a, b copremiers.

** A-2- Nous assumons maintenant $k_3 = 1$, alors :

$$A^{2m} + 2A^m B^n = k_1 \tag{4.17}$$

$$b = k_2 \tag{4.18}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} sin \frac{2\theta}{3} = \frac{k_1}{b} \tag{4.19}$$

Prenons le carré de la dernière équation, nous obtenons :

$$\frac{4}{3} sin^2 \frac{2\theta}{3} = \frac{k_1^2}{b^2}$$

$$\frac{16}{3} sin^2 \frac{\theta}{3} cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{k_1^2}{b^2}$$

$$\frac{16}{3} sin^2 \frac{\theta}{3} . \frac{3a'}{b} = \frac{k_1^2}{b^2}$$

Finalement :

$$4^2 a'(p - a) = k_1^2 \tag{4.20}$$

mais $a' = a"^2$, alors $p - a$ est un carré. Soit :

$$\lambda^2 = p - a = b - a = b - 3a"^2 \Longrightarrow \lambda^2 + 3a"^2 = b \tag{4.21}$$

L'équation (4.20) devient :

$$4^2 a"^2 \lambda^2 = k_1^2 \Longrightarrow k_1 = 4a"\lambda \tag{4.22}$$

en prenant la racine carrée positive, mais $k_1 = A^m(A^m + 2B^n) = 2a"(A^m + 2B^n)$, par suite :

$$A^m + 2B^n = 2\lambda \Longrightarrow \lambda = a" + B^n \tag{4.23}$$

** A-2-1- Comme $A^m = 2a" \Longrightarrow 2|A^m \Longrightarrow 2|A \Longrightarrow A = 2^i A_1$, avec $i \geq 1$ et $2 \nmid A_1$, par suite $A^m = 2a" = 2^{im}A_1^m \Longrightarrow a" = 2^{im-1}A_1^m$, or $im \geq 3 \Longrightarrow 4|a"$. Comme $p = b = A^{2m} + A^mB^n + B^{2n} = \lambda = 2^{im-1}A_1^m + B^n$. Prenons son carré, d'où :

$$\lambda^2 = 2^{2im-2}A_1^{2m} + 2^{im}A_1^mB^n + B^{2n}$$

Comme $im \geq 3$, nous pouvons écrire $\lambda^2 = 4\lambda_1 + B^{2n} \Longrightarrow \lambda^2 \equiv B^{2n} (\bmod 4) \Longrightarrow \lambda^2 \equiv B^{2n} \equiv 0 (\bmod 4)$ ou $\lambda^2 \equiv B^{2n} \equiv 1 (\bmod 4)$.

** A-2-1-1- Nous supposons que $\lambda^2 \equiv B^{2n} \equiv 0 (\bmod 4) \Longrightarrow 4|\lambda^2 \Longrightarrow 2|(b-a)$. Or $2|a$ car $a = 3a' = 3a"^2 = 3 \times 2^{2(im-1)}A_1^{2m}$ et $im \geq 3$. Par suite $2|b$, il en résulte la contradiction avec a, b copremiers.

** A-2-1-2- Nous supposons maintenant que $\lambda^2 \equiv B^{2n} \equiv 1 (\bmod 4)$. Comme $A^m = 2^{im-1}A_1^m$ et $im - 1 \geq 2$, d'où $A^m \equiv 0 (\bmod 4)$. Comme $B^{2n} \equiv 1 (\bmod 4)$, alors B^n ne peut être que $B^n \equiv 1 (\bmod 4)$ ou $B^n \equiv 3 (\bmod 4)$ ce qui donne dans les deux cas $B^nC^l \equiv 1 (\bmod 4)$.

Nous avons aussi $p = b = A^{2m} + A^mB^n + B^{2n} = 4a' + B^n.C^l = 4a"^2 + B^nC^l$ soit $B^nC^l = \lambda^2 - a"^2 = B^n.C^l$, par suite $\lambda, a" \in \mathbb{N}^*$ sont solutions de l'équation diophantine :

$$x^2 - y^2 = N \tag{4.24}$$

avec $N = B^nC^l > 0$. Soit $Q(N)$ le nombre des solutions de (4.24) et $\tau(N)$ le nombre de façon d'écrire les facteurs de N, alors nous annonçons le résultat suivant concernant les solutions de (4.24) (voir théorème 27.3 de [2]) :
- si $N \equiv 2 (\bmod 4)$, alors $Q(N) = 0$;
- si $N \equiv 1$ ou $N \equiv 3 (\bmod 4)$, alors $Q(N) = [\tau(N)/2]$;
- si $N \equiv 0 (\bmod 4)$, alors $Q(N) = [\tau(N/4)/2]$.

Soit (u, v), $u, v \in \mathbb{N}^*$ un autre couple solution de l'équation (4.24), alors $u^2 - v^2 = x^2 - y^2 = N = B^nC^l$, mais $\lambda = x$ et $a" = y$ vérifie l'équation (4.23) soit $x - y = B^n$, par suite u, v vérifient aussi $u - v = B^n$, ce qui donne $u + v = C^l$, par suite $u = x = \lambda = a" + B^n$ et $v = a"$. Nous avons démontré l'unicité des solutions de l'équation (4.24) avec la condition $x - y = B^n$. Comme $N = B^nC^l \equiv 1 (\bmod 4) \Longrightarrow Q(N) = [\tau(N)/2] > 1$. Or $Q(N) = 1$, d'où la contradiction.

Alors le cas $k_3 = 1$ est impossible.

Vérifions la condition (3.10) donnée par $b < 4a < 3b$. Dans notre cas, la condition devient :

$$p < 3A^{2m} < 3p \quad avec \quad p = A^{2m} + B^{2n} + A^mB^n \tag{4.25}$$

et $3A^{2m} < 3p \Longrightarrow A^{2m} < p$ est donc vérifié. Si :

$$p < 3A^{2m} \Longrightarrow 2A^{2m} - A^mB^n - B^{2n} \overbrace{>}^{?} 0$$

En étudiant le signe du polynôme $Q(Y) = 2Y^2 - B^nY - B^{2n}$ et en prenant $Y = A^m > B^n$, la condition $2A^{2m} - A^mB^n - B^{2n} > 0$ est vérifiée, par suite, la condition $b < 4a < 3b$ est vraie.

Dans la suite du papier, nous vérifions facilement que la condition $b < 4a < 3b$ implique à vérifier $A^m > B^n$ ce qu'est vrai.

4.4 Cas $b|p \Rightarrow \ p = b.p', p' > 1$, $b \neq 2$, $b \neq 4$ et $3|a$:

$$A^{2m} = \frac{4.p}{3}.\frac{a}{b} = \frac{4.b.p'.3.a'}{3.b} = 4.p'a' \tag{4.26}$$

Calculons B^nC^l :

$$B^nC^l = \sqrt[3]{\rho^2}\left(3sin^2\frac{\theta}{3} - cos^2\frac{\theta}{3}\right) = \sqrt[3]{\rho^2}\left(3 - 4cos^2\frac{\theta}{3}\right) \tag{4.27}$$

mais $\sqrt[3]{\rho^2} = \dfrac{p}{3}$ d'où en utilisant $cos^2\frac{\theta}{3} = \dfrac{3.a'}{b}$:

$$B^nC^l = \sqrt[3]{\rho^2}\left(3 - 4cos^2\frac{\theta}{3}\right) = \frac{p}{3}\left(3 - 4\frac{3.a'}{b}\right) = p.\left(1 - \frac{4.a'}{b}\right) = p'(b - 4a') \tag{4.28}$$

Comme $p = b.p'$, et $p' > 1$, nous avons alors :

$$B^nC^l = p'(b - 4a') \tag{4.29}$$
$$\text{et} \quad A^{2m} = 4.p'.a' \tag{4.30}$$

** B-1- Supposons que p' est premier, d'où $A^{2m} = 4ap' = (A^m)^2 \Longrightarrow p'|a$. Or $B^nC^l = p'(b - 4a') \Longrightarrow p'|B^n$ ou $p'|C^l$.

** B-1-1- Si $p'|B^n \Longrightarrow p'|B \Longrightarrow B = p'B_1$ avec $B_1 \in \mathbb{N}^*$. Par suite : $p'^{n-1}B_1^nC^l = b - 4a'$. Or $n > 2$ alors $(n-1) > 1$ et $p'|a'$, d'où $p'|b \Longrightarrow a$ et b non copremiers, d'où la contradiction.

** B-1-2- Si $p'|C^l \Longrightarrow p'|C$. La même méthode utilisée ci-dessus, nous obtenons le même résultat.

** B-2- Nous considérons que p' n'est pas un nombre premier.

** B-2-1- p', a sont supposés copremiers : $A^{2m} = 4ap' \Longrightarrow A^m = 2a'.p_1$ avec $a = a'^2$ et $p' = p_1^2$, donc a', p_1 sont aussi copremiers. Comme $A^m = 2a'.p_1$ alors $2|a'$ ou $2|p_1$.

** B-2-1-1- $2|a'$, alors $2|a' \Longrightarrow 2 \nmid p_1$. Mais $p' = p_1^2$.

** B-2-1-1-1- Si p_1 est premier, c'est impossible avec $A^m = 2a'.p_1$.

** B-2-1-1-2- Supposons que p_1 est non premier, il s'écrit sous la forme $p_1 = \omega^m \Longrightarrow p' = \omega^{2m}$. Par suite $B^nC^l = \omega^{2m}(b - 4a')$.

** B-2-1-1-2-1- Si ω est premier, il est différent de 2, alors $\omega|(B^nC^l) \Longrightarrow \omega|B^n$ ou $\omega|C^l$.

** B-2-1-1-2-1-1- Si $\omega|B^n \Longrightarrow \omega|B \Longrightarrow B=\omega^j B_1$ avec $\omega \nmid B_1$, d'où $B_1^n.C^l=\omega^{2m-nj}(b-4a')$.

** B-2-1-1-2-1-1-1- Si $2m-n.j=0$, nous obtenons $B_1^n.C^l=b-4a'$ Comme $C^l=A^m+B^n \Longrightarrow \omega|C^l \Longrightarrow \omega|C$, et $\omega|(b-4a')$. Or $\omega \neq 2$ et ω est premier avec a' donc premier avec a, par suite $\omega \nmid b$. La conjecture (1.1) est vérifiée.

** B-2-1-1-2-1-1-2- Si $2m-nj \geq 1$, là aussi, avec le même raisonnement, nous avons $\omega|C^l \Longrightarrow \omega|C$ et $\omega|(b-4a')$ et $\omega \nmid a$ et $\omega \nmid b$. La conjecture (1.1) est vérifiée.

** B-2-1-1-2-1-1-3- Si $2m-nj<0 \Longrightarrow \omega^{n.j-2m}B_1^n.C^l=b-4a'$. Comme $\omega|C$ utilisant $C^l=A^m+B^n$ d'où $C=\omega^h.C_1 \Longrightarrow \omega^{n.j-2m+h.l}B_1^n.C_1^l=b-4a'$. Si $n.j-2m+h.l<0 \Longrightarrow \omega|B_1^nC_1^l$ par suite la contradiction avec $\omega \nmid B_1$ ou $\omega \nmid C_1$. Donc si $n.j-2m+h.l>0$ et $\omega|(b-4a')$ avec ω, a, b copremiers et la conjecture (1.1) est vérifiée.

** B-2-1-1-2-1-2- Nous obtenons les mêmes résultats si $\omega|C^l$.

** B-2-1-1-2-2- Maintenant, $p'=\omega^{2m}$ et ω non premier, nous écrivons $\omega=\omega_1^f.\Omega$ avec ω_1 premier $\nmid \Omega$ et $f \geq 1$ un entier, et $\omega_1|A$. D'où $B^nC^l=\omega_1^{2f.m}\Omega^{2m}(b-4a') \Longrightarrow \omega_1|(B^nC^l) \Longrightarrow \omega_1|B^n$ ou $\omega_1|C^l$.

** B-2-1-1-2-2-1- Si $\omega_1|B^n \Longrightarrow \omega_1|B \Longrightarrow B=\omega_1^jB_1$ avec $\omega_1 \nmid B_1$, d'où $B_1^n.C^l=\omega_1^{2mf-nj}\Omega^{2m}(b-4a')$:

** B-2-1-1-2-2-1-1- Si $2f.m-n.j=0$, nous obtenons $B_1^n.C^l=\Omega^{2m}(b-4a')$. Comme $C^l=A^m+B^n \Longrightarrow \omega_1|C^l \Longrightarrow \omega_1|C$, et $\omega_1|(b-4a')$. Or $\omega_1 \neq 2$ et ω_1 est premier avec a' donc premier avec a, par suite $\omega_1 \nmid b$, donc $\omega_1 \nmid b$. La conjecture (1.1) est vérifiée.

** B-2-1-1-2-2-1-2- Si $2f.m-n.j \geq 1$, là aussi, avec le même raisonnement, nous avons $\omega_1|C^l \Longrightarrow \omega_1|C$ et $\omega_1|(b-4a')$ et $\omega_1 \nmid a$ et $\omega_1 \nmid b$. La conjecture (1.1) est vérifiée.

** B-2-1-1-2-2-1-3- Si $2f.m-n.j<0 \Longrightarrow \omega_1^{n.j-2m.f}B_1^n.C^l=\Omega^{2m}(b-4a')$. Comme $\omega_1|C$ utilisant $C^l=A^m+B^n$ d'où $C=\omega_1^h.C_1 \Longrightarrow \omega^{n.j-2m.f+h.l}B_1^n.C_1^l=\Omega^{2m}(b-4a')$. Si $n.j-2m.f+h.l<0 \Longrightarrow \omega_1|B_1^nC_1^l$ par suite la contradiction avec $\omega_1 \nmid B_1$ et $\omega_1 \nmid C_1$. Donc si $n.j-2m.f+h.l>0$ et $\omega_1|(b-4a')$ avec ω_1, a, b copremiers et la conjecture (1.1) est vérifiée.

** B-2-1-1-2-2-2- Nous obtenons les mêmes résultats si $\omega_1|C^l$.

** B-2-1-2- Si $2|p_1$: alors $2|p_1 \Longrightarrow 2 \nmid a' \Longrightarrow 2 \nmid a$. Or $p'=p_1^2$.

** B-2-1-2-1- Si p_1 est premier égal à 2, nous obtenons $A^m=4a' \Longrightarrow 2|a'$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** B-2-1-2-2- Donc p_1 est non premier et $2|p_1$, Comme $A^m=2a'p_1$, p_1 s'écrit sous la forme $p_1=2^{m-1}\omega^m \Longrightarrow p'=2^{2m-2}\omega^{2m}$. Par suite $B^nC^l=2^{2m-2}\omega^{2m}(b-4a') \Longrightarrow 2|B^n$ ou $2|C^l$.

** B-2-1-2-2-1- Si $2|B^n \Longrightarrow 2|B$, comme $2|A$, par suite $2|C$. De $B^nC^l=2^{2m-2}\omega^{2m}(b-4a')$ s'ensuit que si $2|(b-4a') \Longrightarrow 2|b$ mais comme $2 \nmid a$, il n'y aura pas de contradiction avec a, b copremiers et la conjecture (1.1) est vérifiée.

** B-2-1-2-2-2- Si $2|C^l$, de la même manière ci-dessus, nous obtenons les mêmes résultats.

** B-2-2- p', a sont supposés non copremiers : Soit ω un nombre premier tel que $\omega|a$ et $\omega|p'$.

** B-2-2-1- Supposons que $\omega = 3$. Comme $A^{2m} = 4ap' \Longrightarrow 3|A$, or $3|p' \Longrightarrow 3|p$, comme $p = A^{2m} + B^{2n} + A^mB^n \Longrightarrow 3|B^{2n} \Longrightarrow 3|B$, par suite $3|C^l \Longrightarrow 3|C$. Nous écrivons $A = 3^iA_1$, $B = 3^jB_1$, $C = 3^hC_1$ avec 3 est copremier avec A_1, B_1 et C_1 et $p = 3^{2im}A_1^{2m} + 3^{2nj}B_1^{2n} + 3^{im+jn}A_1^mB_1^n = 3^k.g$ avec $k = min(2im, 2jn, im+jn)$ et $3 \nmid g$. Nous avons aussi $(\omega = 3)|a$ et $(\omega = 3)|p'$ ce qui donne $a = 3^\alpha a_1 = 3a' \Longrightarrow a' = 3^{\alpha-1}a_1$, $3 \nmid a_1$ et $p' = 3^\mu p_1$, $3 \nmid p_1$ avec $A^{2m} = 4a'p' = 3^{2im}A_1^{2m} = 4 \times 3^{\alpha-1+\mu}.a_1.p_1 \Longrightarrow \alpha + \mu - 1 = 2im$. Comme $p = bp' = b.3^\mu p_1 = 3^\mu.b.p_1$. L'exposant du facteur 3 de p est k, l'exposant du facteur 3 du membre à gauche de l'équation précédente est μ. Si $3|b$ c'est la contradiction avec a, b copremiers. Donc, nous supposons que $3 \nmid b$, et nous avons l'égalité des exposants : $min(2im, 2jn, im+jn) = \mu$ en rappelant que $\alpha + \mu - 1 = 2im$. Mais $B^nC^l = p'(b-4a')$ ce qui donne $3^{(nj+hl)}B_1^nC_1^l = 3^\mu p_1(b - 4 \times 3^{(\alpha-1)}a_1)$. Nous avons aussi $A^m + B^n = C^l$ donne $3^{im}A_1^m + 3^{jn}B_1^n = 3^{hl}C_1^l$. Posons $\epsilon = min(im, jn)$, nous avons $\epsilon = hl = min(im, jn)$. Nous avons les conditions :

$$k = min(2im, 2jn, im+jn) = \mu \tag{4.31}$$

$$\alpha + \mu - 1 = 2im \tag{4.32}$$

$$\epsilon = hl = min(im, jn) \tag{4.33}$$

$$3^{(nj+hl)}B_1^nC_1^l = 3^\mu p_1(b - 4 \times 3^{(\alpha-1)}a_1) \tag{4.34}$$

** B-2-2-1-1- $\alpha = 1 \Longrightarrow a = 3a_1 = 3a'$ et $3 \nmid a_1$, l'équation (4.32) devient :

$$\mu = 2im \tag{4.35}$$

et la première équation (4.31) s'écrit :

$$k = min(2im, 2jn, im+jn) = 2im \tag{4.36}$$

- Si $k = 2im$, par suite $2im \leq 2jn \leq im \leq jn \Longrightarrow hl = im$, et $\mu = 2im = nj + hl = im + nj \Longrightarrow im = jn = hl$. Par suite $3|A, 3|B$ et $3|C$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.
- Si $k = 2jn \Longrightarrow 2jn = 2im - 1$ c'est impossible, un nombre pair ne peut être impair.
- Si $k = im + jn \leq 2im \Longrightarrow jn \leq im$ et $k = im + jn \leq 2jn \Longrightarrow im \leq jn \Longrightarrow im = jn \Longrightarrow k = 2im = 2jn$ cas étudié ci-dessus et par suite $3|A, 3|B$ et $3|C$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.

** B-2-2-1-2- $\alpha > 1 \Longrightarrow \alpha \geq 2$ et $a' = 3^{\alpha-1}a_1$.
- Si $k = 2im \Longrightarrow 2im = \mu$, or $\mu = 2im - \alpha$ ce qui impossible.
- Si $k = 2jn = \mu \Longrightarrow 2jn = 2im - \alpha$. Nous obtenons $2jn < 2im \Longrightarrow jn < im \Longrightarrow 2jn < im + jn$, $k = 2jn$ est bien le mininimum de $(2im, 2jn, im+jn)$. Nous obtenons $jn = hl < im$ et l'équation (4.34) devient :

$$B_1^nC_1^l = p_1(b - 4 \times 3^{(\alpha-1)}a_1) \tag{4.37}$$

La conjecture (1.1) est vérifiée.
- Si $k = im + jn \leq 2im \Longrightarrow jn \leq im$ et $k = im + jn \leq 2jn \Longrightarrow im \leq jn \Longrightarrow im = jn \Longrightarrow k = 2im = 2jn$ ce qui donne des contradictions.

- Si $k = im + jn < 2im \Longrightarrow jn < im$ et $2jn < im + jn = k$ ce qui est une contradiction avec $k = min(2im, 2in, im + jn)$.

** B-2-2-2- Nous supposons que $\omega \neq 3$. Nous écrivons $a = \omega^\alpha a_1$ avec $\omega \nmid a_1$ et $p' = \omega^\mu p_1$ avec $\omega \nmid p_1$. Comme $A^{2m} = 4ap' = 4\omega^{\alpha+\mu}.a_1.p_1 \Longrightarrow \omega|A \Longrightarrow A = \omega^i A_1$, $\omega \nmid A_1$. Or $B^nC^l = p'(b-4a') = \omega^\mu p_1(b-4a') \Longrightarrow \omega|B^nC^l \Longrightarrow \omega|B^n$ ou $\omega|C^l$.

** B-2-2-2-1- $\omega|B^n \Longrightarrow \omega|B \Longrightarrow B = \omega^j B_1$ et $\omega \nmid B_1$. De $A^m + B^n = C^l \Longrightarrow \omega|C^l \Longrightarrow \omega|C$. Comme $p = bp' = \omega^\mu bp_1 = \omega^k(\omega^{2im-k}A_1^{2m} + \omega^{2jn-k}B_1^{2n} + \omega^{im+jn-k}A_1^mB_1^n)$ avec $k = min(2im, 2jn, im + jn)$. Par suite :

- Si $\mu = k$, alors $\omega \nmid b$ et la conjecture (1.1) est vraie.
- Si $k > \mu$, alors $\omega|b$, or $\omega|a$ d'où la contradiction avec a, b copremiers.
- Si $k < \mu$, il s'ensuit de :

$$\omega^\mu bp_1 = \omega^k(\omega^{2im-k}A_1^{2m} + \omega^{2jn-k}B_1^{2n} + \omega^{im+jn-k}A_1^mB_1^n)$$

que $\omega|A_1$ ou $\omega|B_1$ ce qui en contradiction avec les hypothèses.

** B-2-2-2-2- Si $\omega|C^l \Longrightarrow \omega|C \Longrightarrow C = \omega^h C_1$ avec $\omega \nmid C_1$. De $A^m + B^n = C^l \Longrightarrow \omega|(C^l - A^m) \Longrightarrow \omega|B$. Par suite, nous obtenons les mêmes résultats de B-2-2-2-1- ci-dessus.

4.5 Cas $b = 2p$ et $3|a$:

nous avons :

$$cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{a}{b} = \frac{3a'}{2p} \Longrightarrow A^{2m} = \frac{4p.a}{3b} = \frac{4p}{3}.\frac{3a'}{2p} = 2a' = (A^m)^2 \Longrightarrow 2|a' \Longrightarrow 2|a$$

Alors $2|a$ et $2|b$ ce qui est en contradiction avec a, b copremiers.

4.6 Cas $b = 4p$ et $3|a$:

Nous avons :

$$cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{a}{b} = \frac{3a'}{4p} \Longrightarrow A^{2m} = \frac{4p.a}{3b} = \frac{4p}{3}.\frac{3a'}{4p} = a' = (A^m)^2 = a"^2$$
$$\text{avec} \quad A^m = a"$$

Calculons A^mB^n, nous obtenons :

$$A^mB^n = \frac{p\sqrt{3}}{3}.sin\frac{2\theta}{3} - \frac{2p}{3}cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{p\sqrt{3}}{3}.sin\frac{2\theta}{3} - \frac{a'}{2} \Longrightarrow$$
$$A^mB^n + \frac{A^{2m}}{2} = \frac{p\sqrt{3}}{3}.sin\frac{2\theta}{3} \tag{4.38}$$

soit :

$$A^{2m} + 2A^mB^n = \frac{2p\sqrt{3}}{3}sin\frac{2\theta}{3} \tag{4.39}$$

Le membre à gauche de (4.39) est un entier et p est un entier, alors $\frac{2\sqrt{3}}{3}sin\frac{2\theta}{3}$ sera écrit :

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}sin\frac{2\theta}{3} = \frac{k_1}{k_2} \tag{4.40}$$

où k_1, k_2 sont deux entiers copremiers et $k_2|p \Longrightarrow p = k_2.k_3$.

** C-1- Premièrement, nous supposons que $k_3 \neq 1$. D'où :

$$A^{2m} + 2A^mB^n = k_3.k_1 \tag{4.41}$$

Soit μ un entier premier et $\mu|k_3$, alors $\mu|A^m(A^m + 2B^n) \Longrightarrow \mu|A^m$ ou $\mu|(A^m + 2B^n)$.

** C-1-1- Si $\mu|(A^m = a") \Longrightarrow \mu|(a"^2 = a') \Longrightarrow \mu|(3a' = a)$. Comme $\mu|k_3 \Longrightarrow \mu|p \Longrightarrow \mu|(4p = b)$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** C-1-2- Si $\mu|(A^m + 2B^n) \Longrightarrow \mu \nmid A^m$ et $\mu \nmid 2B^n$, alors :

$$\mu \neq 2 \quad et \quad \mu \nmid B^n \tag{4.42}$$

$\mu|(A^m + 2B^n)$, nous écrivons :

$$A^m + 2B^n = \mu.t' \tag{4.43}$$

Alors :

$$\begin{aligned} A^m + B^n = \mu t' - B^n \Longrightarrow A^{2m} + B^{2n} + 2A^mB^n = \mu^2t'^2 - 2t'\mu B^n + B^{2n} \\ \Longrightarrow p = t'^2\mu^2 - 2t'B^n\mu + B^n(B^n - A^m) \end{aligned} \tag{4.44}$$

Comme $b = 4p = 4k_2.k_3$ et $\mu|k_3$ alors $\mu|b \Longrightarrow \exists\mu'$ tel que $b = \mu.\mu'$, nous obtenons :

$$\mu'.\mu = \mu(4\mu t'^2 - 8t'B^n) + 4B^n(B^n - A^m) \tag{4.45}$$

La dernière équation implique $\mu|4B^n(B^n - A^m)$, mais $\mu \neq 2$ alors $\mu|B^n$ ou $\mu|(B^n - A^m)$.

** C-1-1-1- Si $\mu|B^n \Longrightarrow$ c'est la contradiction avec (4.42).

** C-1-1-2- Si $\mu|(B^n - A^m)$ et en utilisant $\mu|(A^m + 2B^n)$, nous avons :

$$\mu|3B^n \Longrightarrow \begin{cases} \mu|B^n \\ ou \\ \mu = 3 \end{cases} \tag{4.46}$$

** C-1-1-2-1- Si $\mu|B^n$ c'est contradictoire avec (4.42).

** C-1-1-2-2- Si $\mu = 3$, alors $3|b$, mais $3|a$ ce qui en contradiction avec a, b copremiers.

** C-2- Nous assumons maintenant que $k_3 = 1$, d'où :

$$A^{2m} + 2A^mB^n = k_1 \tag{4.47}$$

$$p = k_2 \tag{4.48}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}sin\frac{2\theta}{3} = \frac{k_1}{p} \tag{4.49}$$

Prenons le carré de la dernière équation, nous obtenons :

$$\frac{4}{3}sin^2\frac{2\theta}{3} = \frac{k_1^2}{p^2}$$

$$\frac{16}{3}sin^2\frac{\theta}{3}cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{k_1^2}{p^2}$$

$$\frac{16}{3}sin^2\frac{\theta}{3}.\frac{3a'}{b} = \frac{k_1^2}{p^2}$$

Finalement :

$$a'(4p - 3a') = k_1^2 \tag{4.50}$$

mais $a' = a"^2$, alors $4p - 3a'$ est un carré. Soit :

$$\lambda^2 = 4p - 3a' = 4p - a = b - a \tag{4.51}$$

L'équation (4.50) devient :

$$a"^2\lambda^2 = k_1^2 \Longrightarrow k_1 = a"\lambda \tag{4.52}$$

en prenant la racine carrée positive. Utilisant (4.47), nous avons :

$$k_1 = A^m(A^m + 2B^n) = a"(A^m + 2B^n) \tag{4.53}$$

Par suite :

$$A^m + 2B^n = \lambda \tag{4.54}$$

Considérons maintenant que $b - a = \lambda^2 \Longrightarrow \lambda^2 + 3a"^2 = b$, par suite le couple $(\lambda, a")$ est une solution de l'équation diophantine :

$$X^2 + 3Y^2 = b \tag{4.55}$$

avec $X = \lambda$ et $Y = a"$. Or d'après un théorème sur les solutions de l'équation donnée par (5.35), b s'écrit (voir théorème 37.4 de [3]) :

$$b = 2^{2s} \times 3^t.p_1^{t_1} \cdots p_g^{t_g} q_1^{2s_1} \cdots q_r^{2s_r} \tag{4.56}$$

où les p_i sont des nombres premiers vérifiant $p_i \equiv 1 (\bmod 6)$, les q_j sont aussi des nombres premiers tels que $q_j \equiv 5 (\bmod 6)$. Alors, comme $b = 4p$:

- si $t \geq 1 \Longrightarrow 3|b$, or $3|a$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** C-2-2-1- Donc, nous supposons que p s'écrit sous la forme :

$$p = p_1^{t_1} \cdots p_g^{t_g} q_1^{2s_1} \cdots q_r^{2s_r} \tag{4.57}$$

avec $p_i \equiv 1 (\bmod 6)$ et $q_j \equiv 5 (\bmod 6)$. Finalement nous obtenons que $p \equiv 1 (\bmod 6)$. Vérifions alors si cette condition ne donne pas des contradictions.

Nous allons présenter le tableau des valeurs modulo 6 de $p = A^{2m} + A^mB^n + B^{2n}$ en fonction des valeurs de $A^m, B^n (\bmod 6)$. Nous obtenons le tableau ci-dessous :

A^m, B^n	0	1	2	3	4	5
0	0	**1**	4	3	4	**1**
1	**1**	3	**1**	**1**	3	**1**
2	4	**1**	0	**1**	4	3
3	3	**1**	**1**	3	**1**	**1**
4	4	3	4	**1**	0	**1**
5	**1**	**1**	3	**1**	**1**	3

TABLE 1 – Tableau de $p \pmod 6$

** C-2-2-1-1- Cas $A^m \equiv 0 \pmod 6 \Longrightarrow 2|(A^m = a") \Longrightarrow 2|(a' = a"^2) \Longrightarrow 2|a$, or $2|b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers. Tous les cas de la première ligne du tableau 1 à rejeter.

** C-2-2-1-2- Cas $A^m \equiv 1 \pmod 6$ et $B^n \equiv 0 \pmod 6$, d'où $2|B^n \Longrightarrow B^n = 2B'$, alors p s'écrit $p = (A^m + B')^2 + 3B'^2$ avec $(p, 3) = 1$, sinon $3|p$, par suite $3|b$, or $3|a$, d'où la contradiction avec a, b copremiers. Donc le couple $(A^m + B', B')$ est solution de l'équation diophantine :

$$x^2 + 3y^2 = p \tag{4.58}$$

la solution $x = A^m + B', y = B'$ est unique vue que $x - y$ vérifie $x - y = A^m$. En effet, si (u, v) un autre couple solution de (4.58), avec $u, v \in \mathbb{N}^*$, alors nous avons :

$$u^2 + 3v^2 = p \tag{4.59}$$

$$u - v = A^m \tag{4.60}$$

D'où $u = v + A^m$, nous obtenons l'équation du second degré $4v^2 + 2vA^m - 2B'(A^m + 2B') = 0$ qui donne comme racine positive $v_1 = B' = y$, par suite $u = A^m + B' = x$. Il en résulte que p dans (4.58) a une représentation unique sous la forme $X^2 + 3Y^2$ avec $X, 3Y$ copremiers. Comme p est un nombre entier impair, nous appliquons l'un des théorèmes d'Euler sur les nombres convenables "numerus idoneus" (voir [4],[5]) á savoir : *Si $n > 1$ est un entier impair qui est représenté de façon unique telle que $n = x^2 + 3y^2$ avec $x, y \in \mathbb{N}$ et x et $3y$ sont relativement premiers, alors n est premier.* Donc p est premier et l'écriture $4p$ est unique (il suffit de poser $U = 2u,\ v = 2v$, avec $U^2 + 3V^2 = 4p$ et $U - V = 2A^m$). Or $b = 4p \Longrightarrow \lambda^2 + 3a"^2 = (2(A^m + B'))^2 + 3(2B')^2$ l'unicité de l'écriture de $4p$ donne :

$$\lambda = 2(A^m + B') = 2a" + B^n = 2a" + B^n \tag{4.61}$$

$$et \quad a" = 2B' = B^n = A^m \tag{4.62}$$

Or $A^m > B^n$, d'où la contradiction.

** C-2-2-1-3- Cas $A^m \equiv 1 \pmod 6$ et $B^n \equiv 2 \pmod 6$, d'où B^n est pair, voir C-2-2-1-2-.

** C-2-2-1-4- Cas $A^m \equiv 1 \pmod 6$ et $B^n \equiv 3 \pmod 6$, d'où $3|B^n \Longrightarrow B^n = 3B'$. Nous pouvons écrire $b = 4p = (2A^m + 3B')^2 + 3(3B')^2 = \lambda^2 + 3a"^2$. L'unicité de l'écriture de b comme

$x^2 + 3y^2 = \lambda^2 + 3a"^2 \Longrightarrow a" = A^m = 3B' = B^n$, d'où la contradiction avec $A^m > B^n$.

** C-2-2-1-5- Cas $A^m \equiv 1 (\bmod 6)$ et $B^n \equiv 5 (\bmod 6)$, d'où $C^l \equiv 0 (\bmod 6)$, donc $2|C^l$, voir C-2-2-1-2-.

** C-2-2-1-6- Cas $A^m \equiv 2 (\bmod 6) \Longrightarrow 2|a" \Longrightarrow 2|a$, or $2|b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** C-2-2-1-7- Cas $A^m \equiv 3 (\bmod 6)$ et $B^n \equiv 1 (\bmod 6)$, d'où $C^l \equiv 4 (\bmod 6) \Longrightarrow 2|C^l \Longrightarrow C^l = 2C'$, Nous pouvons écrire que $p = (C' - B^n)^2 + 3C'^2$, voir C-2-2-1-2-.

** C-2-2-1-8- Cas $A^m \equiv 3 (\bmod 6)$ et $B^n \equiv 2 (\bmod 6)$, d'où B^n est pair, voir C-2-2-1-2-.

** C-2-2-1-9- Cas $A^m \equiv 3 (\bmod 6)$ et $B^n \equiv 4 (\bmod 6)$, par suite B^n est pair, voir C-2-2-1-2-.

** C-2-2-1-10- Cas $A^m \equiv 3 (\bmod 6)$ et $B^n \equiv 5 (\bmod 6)$, d'où $C^l \equiv 2 (\bmod 6)$, donc $2|C^l$, voir C-2-2-1-2-.

** C-2-2-1-11- Cas $A^m \equiv 4 (\bmod 6) \Longrightarrow 2|a" \Longrightarrow 2|a$, or $2|b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** C-2-2-1-12- Cas $A^m \equiv 5 (\bmod 6)$ et $B^n \equiv 0 (\bmod 6)$, par suite B^n est pair, voir C-2-2-1-2-.

** C-2-2-1-13- Cas $A^m \equiv 5 (\bmod 6)$ et $B^n \equiv 1 (\bmod 6)$, d'où $C^l \equiv 0 (\bmod 6)$, donc $2|C^l$, voir C-2-2-1-2-.

** C-2-2-1-14- Cas $A^m \equiv 5 (\bmod 6)$ et $B^n \equiv 3 (\bmod 6)$, d'où $C^l \equiv 2 (\bmod 6) \Longrightarrow 2|C^l \Longrightarrow C^l = 2C'$, p s'écrit $p = (C' - B^n)^2 + 3C'^2$, voir C-2-2-1-2-.

** C-2-2-1-15- Cas $A^m \equiv 5 (\bmod 6)$ et $B^n \equiv 4 (\bmod 6)$, par suite B^n est pair, voir C-2-2-1-2-.

Nous avons achevé l'étude de tous les cas du tableau 1 ayant tous des contradictions.

Alors le cas $k_3 = 1$ est impossible.

4.7 Cas $3|a$ et $b = 2p'$ $b \neq 2$ avec $p'|p$:

$3|a \Longrightarrow a = 3a'$, $b = 2p'$ avec $p = k.p'$, d'où :

$$A^{2m} = \frac{4.p}{3} . \frac{a}{b} = \frac{4.k.p'.3.a'}{6p'} = 2.k.a' \tag{4.63}$$

Calculons $B^n C^l$:

$$B^n C^l = \sqrt[3]{\rho^2} \left(3sin^2 \frac{\theta}{3} - cos^2 \frac{\theta}{3} \right) = \sqrt[3]{\rho^2} \left(3 - 4cos^2 \frac{\theta}{3} \right) \tag{4.64}$$

mais $\sqrt[3]{\rho^2} = \dfrac{p}{3}$ d'où en utilisant $cos^2\dfrac{\theta}{3} = \dfrac{3.a'}{b}$:

$$B^nC^l = \sqrt[3]{\rho^2}\left(3 - 4cos^2\frac{\theta}{3}\right) = \frac{p}{3}\left(3 - 4\frac{3.a'}{b}\right) = p.\left(1 - \frac{4.a'}{b}\right) = k(p' - 2a') \tag{4.65}$$

Comme $p = b.p'$, et $p' > 1$, nous avons alors :

$$B^nC^l = k(p' - 2a') \tag{4.66}$$
$$\text{et} \quad A^{2m} = 2k.a' \tag{4.67}$$

** D-1- Nous supposons que k est premier.

** D-1-1- Si $k = 2$, nous avons donc $p = 2p' = b \Longrightarrow 2|b$, mais $A^{2m} = 4a' = (A^m)^2 \Longrightarrow A^m = 2a"$ avec $a' = a"^2$, par suite $2|a" \Longrightarrow 2|(a = 3a"^2)$, il en résulte la contradiction avec a, b copremiers.

** D-1-2- Nous supposons $k \neq 2$. De $A^{2m} = 2k.a' = (A^m)^2 \Longrightarrow k|a'$ et $2|a'$, d'où $a' = 2.k.a"^2 \Longrightarrow A^m = 2.k.a"$. Par suite $k|A^m \Longrightarrow k|A \Longrightarrow A = k^i.A_1$ avec $i \geq 1$ et $k \nmid A_1$. $k^{im}A_1^m = 2ka" \Longrightarrow 2a" = k^{im-1}A_1^m$. De $B^nC^l = k(p' - 2a') \Longrightarrow k|(B^nC^l) \Longrightarrow k|B^n$ ou $k|C^l$.

** D-1-2-1- Supposons que $k|B^n \Longrightarrow k|B \Longrightarrow B = k^j.B_1$ avec $j \geq 1$ et $k \nmid B_1$. Par suite $k^{nj-1}B_1^nC^l = p' - 2a' = p' - 4ka"^2$. Comme $n \geq 3 \Longrightarrow nj - 1 \geq 2$, d'où $k|p'$ mais $k \neq 2 \Longrightarrow k|(2p' = b)$, or $k|a' \Longrightarrow k|(3a' = a)$. Il s'ensuit la contradiction avec a, b copremiers.

** D-1-2-2- Si $k|C^l$ Nous obtenons le même résultat.

** D-2- Nous supposons k est non premier. Soit ω un nombre premier tel que $k = \omega^s.k_1$, avec $s \geq 1$, $\omega \nmid k_1$. Les équations (4.66-4.67) deviennent :

$$B^nC^l = \omega^s.k_1(p' - 2a') \tag{4.68}$$
$$\text{et} \quad A^{2m} = 2\omega^s.k_1.a' \tag{4.69}$$

** D-2-1- Supposons que $\omega = 2$, nous avons alors les équations :

$$A^{2m} = 2^{s+1}.k_1.a' \tag{4.70}$$
$$B^nC^l = 2^s.k_1(p' - 2a') \tag{4.71}$$

** D-2-1-1- Cas : $2|a' \Longrightarrow 2|a$, mais $2|b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** D-2-1-2- Cas : $2 \nmid a'$. Comme $2 \nmid k_1$, l'équation (4.70) donne $2|A^{2m} \Longrightarrow A = 2^iA_1$, avec $i \geq 1$ et $2 \nmid A_1$. Nous déduisons que $2im = s + 1$.

** D-2-1-2-1- Nous supposons que $2 \nmid (p' - 2a') \Longrightarrow 2 \nmid p'$. De l'équation (4.71), nous obtenons que $2|B^nC^l \Longrightarrow 2|B^n$ ou $2|C^l$:

** D-2-1-2-1-1- Nous supposons que $2|B^n \Longrightarrow 2|B \Longrightarrow B = 2^jB_1$ avec $2 \nmid B_1$ et $j \geq 1$, par suite $B_1^nC^l = 2^{s-jn}k_1(p' - 2a')$:

- Si $s - jn \geq 1$, alors $2|C^l \Longrightarrow 2|C$, pas de contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n$, et la conjecture (1.1) est vérifiée.

- Si $s - jn \leq 0$, de $B_1^n C^l = 2^{s-jn} k_1(p' - 2a') \Longrightarrow 2 \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n \Longrightarrow 2|C^l$.

** D-2-1-2-1-2- Nous obtenons les mêmes résultats si $2|C^l$.

** D-2-1-2-2- Nous supposons maintenant que $2|(p' - 2a') \Longrightarrow p' - 2a' = 2^\mu.\Omega$, avec $\mu \geq 1$ et $2 \nmid \Omega$. Nous rappelons que $2 \nmid a'$. L'équation (4.71) s'écrit :

$$B^n C^l = 2^{s+\mu}.k_1.\Omega \tag{4.72}$$

Cette dernière équation implique que $2|(B^n C^l) \Longrightarrow 2|B^n$ ou $2|C^l$.

** D-2-1-2-2-1- Supposons que $2|B^n \Longrightarrow 2|B \Longrightarrow B = 2^j B_1$ avec $j \geq 1$ et $2 \nmid B_1$. Par suite : $B_1^n C^l = 2^{s+\mu-jn}.k_1.\Omega$:

- Si $s + \mu - jn \geq 1$, alors $2|C^l \Longrightarrow 2|C$, pas de contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n$, et la conjecture (1.1) est vérifiée.

- Si $s + \mu - jn \leq 0$, de $B_1^n C^l = 2^{s+\mu-jn}k_1.\Omega \Longrightarrow 2 \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n \Longrightarrow 2|C^l$.

** D-2-1-2-2-2- Nous obtenons les mêmes résultats si $2|C^l$.

** D-2-2- Nous supposons que $\omega \neq 2$. Nous avons alors les équations :

$$A^{2m} = 2\omega^s.k_1.a' \tag{4.73}$$

$$B^n C^l = \omega^s.k_1.(p' - 2a') \tag{4.74}$$

Comme $\omega \neq 2$, de l'équation (4.73), nous avons $2|(k_1.a')$. Si $2|a' \Longrightarrow 2|a$, mais $2|b$ par suite la contradiction avec a, b copremiers.

** D-2-2-1- $2 \nmid a'$ et $2|k_1 \Longrightarrow k_1 = 2^\mu.\Omega$ avec $\mu \geq 1$ et $2 \nmid \Omega$. De l'équation (4.73), nous avons $2|A^{2m} \Longrightarrow 2|A \Longrightarrow A = 2^i A_1$ avec $i \geq 1$ et $2 \nmid A_1$, par suite $2im = 1 + \mu$. L'équation (4.74) devient :

$$B^n C^l = \omega^s.2^\mu.\Omega.(p' - 2a') \tag{4.75}$$

De l'équation (4.75), nous obtenons $2|(B^n C^l) \Longrightarrow 2|B^n$ ou $2|C^l$.

** D-2-2-1-1- Supposons $2|B^n \Longrightarrow 2|B \Longrightarrow B = 2^j B_1$, avec $j \in \mathbb{N}^*$ et $2 \nmid B_1$.

** D-2-2-1-1-1- Nous supposons que $2 \nmid (p' - 2a')$, alors nous avons $B_1^n C^l = \omega^s 2^{\mu-jn}\Omega(p' - 2a')$:

- Si $\mu - jn \geq 1 \Longrightarrow 2|C^l \Longrightarrow 2|C$, pas de contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.

- Si $\mu - jn \leq 0 \Longrightarrow 2 \nmid C^l$ d'où la contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n$.

** D-2-2-1-1-2- Nous supposons que $2|(p' - 2a') \Longrightarrow p' - 2a' = 2^\alpha.P$, avec $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et $2 \nmid P$. Il s'ensuit que $B_1^n C^l = \omega^s 2^{\mu+\alpha-jn}\Omega.P$:

- Si $\mu + \alpha - jn \geq 1 \Longrightarrow 2|C^l \Longrightarrow 2|C$, pas de contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.

- Si $\mu+\alpha-jn\leq 0 \Longrightarrow 2\nmid C^l$ d'où la contradiction avec $C^l=2^{im}A_1^m+2^{jn}B_1^n$.

** D-2-2-1-2- Nous supposons maintenant que $2|C^n \Longrightarrow 2|C$. En utilisant la même méthode décrite ci-dessus, nous obtenons les mêmes résultats.

4.8 Cas $3|a$ et $b=4p'$ $b\neq 2$ avec $p'|p$:

$3|a \Longrightarrow a=3a'$, $b=4p'$ avec $p=k.p'$, $k\neq 1$ sinon $b=4p$ ce cas a été étudié (voir paragraphe 4.6), alors nous avons :

$$A^{2m}=\frac{4.p}{3}.\frac{a}{b}=\frac{4.k.p'.3.a'}{12p'}=k.a' \tag{4.76}$$

Calculons B^nC^l :

$$B^nC^l=\sqrt[3]{\rho^2}\left(3sin^2\frac{\theta}{3}-cos^2\frac{\theta}{3}\right)=\sqrt[3]{\rho^2}\left(3-4cos^2\frac{\theta}{3}\right) \tag{4.77}$$

mais $\sqrt[3]{\rho^2}=\dfrac{p}{3}$, d'où en utilisant $cos^2\frac{\theta}{3}=\dfrac{3.a'}{b}$:

$$B^nC^l=\sqrt[3]{\rho^2}\left(3-4cos^2\frac{\theta}{3}\right)=\frac{p}{3}\left(3-4\frac{3.a'}{b}\right)=p.\left(1-\frac{4.a'}{b}\right)=k(p'-a') \tag{4.78}$$

Comme $p=b.p'$, et $p'>1$, nous avons :

$$B^nC^l=k(p'-a') \tag{4.79}$$
$$\text{et}\quad A^{2m}=k.a' \tag{4.80}$$

** E-1- Nous supposons que k est premier. De $A^{2m}=k.a'=(A^m)^2 \Longrightarrow k|a'$ et $a'=k.a"^2 \Longrightarrow A^m=k.a"$. Par suite $k|A^m \Longrightarrow k|A \Longrightarrow A=k^i.A_1$ avec $i\geq 1$ et $k\nmid A_1$. $k^{mi}A_1^m=ka" \Longrightarrow a"=k^{mi-1}A_1^m$. De $B^nC^l=k(p'-a') \Longrightarrow k|(B^nC^l) \Longrightarrow k|B^n$ ou $k|C^l$.

** E-1-1- Supposons que $k|B^n \Longrightarrow k|B \Longrightarrow B=k^j.B_1$ avec $j\geq 1$ et $k\nmid B_1$. Par suite $k^{n.j-1}B_1^nC^l=p'-a'$. Comme $n.j-1\geq 2 \Longrightarrow k|(p'-a')$. Or $k|a' \Longrightarrow k|a$, d'où $k|p' \Longrightarrow k|(4p'=b)$ et on arrive à la contradiction que a,b sont copremiers.

** E-1-2- Supposons que $k|C^l$, nous obtenons le même résultat que si $k|B^n$.

** E-2- Nous supposons k est non premier.

** E-2-1- Supposons que $k=4 \Longrightarrow p=4p'=b$, c'est le cas 4.3 déjà étudié ci-dessus.

** E-2-2- Nous supposons que $k\geq 6$ non premier. Soit ω un nombre premier tel que $k=\omega^s.k_1$, avec $s\geq 1$, $\omega\nmid k_1$. Les équations (4.79-4.80) deviennent :

$$B^nC^l=\omega^s.k_1(p'-a') \tag{4.81}$$
$$\text{et}\quad A^{2m}=\omega^s.k_1.a' \tag{4.82}$$

** E-2-2-1- Nous supposons que $\omega=2$.

** E-2-2-1-1- Si $2|a' \Longrightarrow 2|(3a' = a)$, mais $2|(4p' = b)$, par suite la contradiction avec a, b copremiers.

** E-2-2-1-2- Nous avons $2 \nmid a'$. De l'équation (4.82), il s'ensuit que $2|A^{2m} \Longrightarrow 2|A \Longrightarrow A = 2^i A_1$ avec $2 \nmid A_1$ et :

$$B^n C^l = 2^s k_1 (p' - a')$$

** E-2-2-1-2-1- Supposons que $2 \nmid (p' - a')$, de l'expression ci-dessus, nous avons $2|(B^n C^l) \Longrightarrow 2|B^n$ ou $2|C^l$.

** E-2-2-1-2-1-1- Si $2|B^n \Longrightarrow 2|B \Longrightarrow B = 2^j B_1$ avec $2 \nmid B_1$. Par suite $B_1^n C^l = 2^{2im-jn} k_1 (p' - a')$:

- Si $2im - jn \geq 1 \Longrightarrow 2|C^l \Longrightarrow 2|C$, il n'a pas de contradiction avec $C^l = 2^{im} A_1^m + 2^{jn} B_1^n$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.
- Si $2im - jn \leq 0 \Longrightarrow 2 \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = 2^{im} A_1^m + 2^{jn} B_1^n \Longrightarrow 2|C^l$.

** E-2-2-1-2-1-2- Si $2|C^l \Longrightarrow 2|C$, en utilisant la même méthode décrite ci-dessus, nous obtenons les mêmes résultats.

** E-2-2-1-2-2- Supposons que $2|(p' - a')$. Comme $2 \nmid a' \Longrightarrow 2 \nmid p'$. $2|(p' - a') \Longrightarrow p' - a' = 2^\alpha.P$ avec $\alpha \geq 1$ et $2 \nmid P$. L'équation (4.81) s'écrit :

$$B^n C^l = 2^{s+\alpha} k_1.P = 2^{2im+\alpha} k_1.P \tag{4.83}$$

d'où $2|(B^n C^l) \Longrightarrow 2|B^n$ ou $2|C^l$.

** E-2-2-1-2-2-1- Nous supposons que $2|B^n \Longrightarrow 2|B \Longrightarrow B = 2^j B_1$, avec $2 \nmid B_1$. L'équation (4.83) s'écrit $B_1^n C^l = 2^{2im+\alpha-jn} k_1 P$:

- Si $2im + \alpha - jn \geq 1 \Longrightarrow 2|C^l \Longrightarrow 2|C$, il n'a pas de contradiction avec $C^l = 2^{im} A_1^m + 2^{jn} B_1^n$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.
- Si $2im + \alpha - jn \leq 0 \Longrightarrow 2 \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = 2^{im} A_1^m + 2^{jn} B_1^n \Longrightarrow 2|C^l$.

** E-2-2-1-2-2-2- Nous supposons que $2|C^l \Longrightarrow 2|C$. Utilisant la même méthode décrite ci-dessus, nous obtenons les mêmes résultats.

** E-2-2-2- Nous supposons que $\omega \neq 2$. Rappelons les équations :

$$A^{2m} = \omega^s.k_1.a' \tag{4.84}$$

$$B^n C^l = \omega^s.k_1(p' - a') \tag{4.85}$$

** E-2-2-2-1- Nous supposons que ω, a' sont copremiers, donc $\omega \nmid a'$. De l'équation (4.84), nous avons $\omega|A^{2m} \Longrightarrow \omega|A \Longrightarrow A = \omega^i A_1$ avec $\omega \nmid A_1$ et $s = 2im$.

** E-2-2-2-1-1- Supposons que $\omega \nmid (p' - a')$. De l'équation (4.85) ci-dessus, nous avons $\omega|(B^n C^l) \Longrightarrow \omega|B^n$ ou $\omega|C^l$.

** E-2-2-2-1-1-1- Si $\omega|B^n \Longrightarrow \omega|B \Longrightarrow B = \omega^j B_1$ avec $\omega \nmid B_1$. Par suite $B_1^n C^l = 2^{2im-jn} k_1 (p' - a')$:

- Si $2im - jn \geq 1 \Longrightarrow \omega | C^l \Longrightarrow \omega | C$, il n'a pas de contradiction avec $C^l = \omega^{im} A_1^m + \omega^{jn} B_1^n$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.

- Si $2im - jn \leq 0 \Longrightarrow \omega \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = \omega^{im} A_1^m + \omega^{jn} B_1^n \Longrightarrow \omega | C^l$.

** E-2-2-2-1-1-2- Si $\omega | C^l \Longrightarrow \omega | C$, en utilisant la même méthode décrite ci-dessus, nous obtenons les mêmes résultats.

** E-2-2-2-1-2- Supposons que $\omega | (p' - a') \Longrightarrow \omega \nmid p'$ sinon $\omega | a'$. $\omega | (p' - a') \Longrightarrow p' - a' = \omega^\alpha . P$ avec $\alpha \geq 1$ et $\omega \nmid P$. L'équation (4.85) s'écrit :

$$B^n C^l = \omega^{s+\alpha} k_1 . P = \omega^{2im+\alpha} k_1 . P \tag{4.86}$$

d'où $\omega | (B^n C^l) \Longrightarrow \omega | B^n$ ou $\omega | C^l$.

** E-2-2-2-1-2-1- Nous supposons que $\omega | B^n \Longrightarrow \omega | B \Longrightarrow B = \omega^j B_1$, avec $\omega \nmid B_1$. L'équation (4.86) s'écrit $B_1^n C^l = 2^{2im+\alpha-jn} k_1 P$:

- Si $2im + \alpha - jn \geq 1 \Longrightarrow \omega | C^l \Longrightarrow \omega | C$, il n'a pas de contradiction avec $C^l = \omega^{im} A_1^m + \omega^{jn} B_1^n$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.

- Si $2im + \alpha - jn \leq 0 \Longrightarrow \omega \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = \omega^{im} A_1^m + \omega^{jn} B_1^n \Longrightarrow \omega | C^l$.

** E-2-2-2-1-2-2- Nous supposons que $\omega | C^l \Longrightarrow \omega | C$. Utilisant la même méthode décrite ci-dessus, nous obtenons les mêmes résultats.

** E-2-2-2-2- Nous supposons que ω, a' ne sont pas copremiers, donc $a' = \omega^\beta . a$" avec $\omega \nmid a$". L'équation (4.84) devient :

$$A^{2m} = \omega^s k_1 a' = \omega^{s+\beta} k_1 . a" \tag{4.87}$$

Nous avons $\omega | A^{2m} \Longrightarrow \omega | A \Longrightarrow A = \omega^i A_1$ avec $\omega \nmid A_1$ et $s + \beta = 2im$.

** E-2-2-2-2-1- Supposons que $\omega \nmid (p' - a') \Longrightarrow \omega \nmid p' \Longrightarrow \omega \nmid (b = 4p')$. De l'équation (4.85), nous avons $\omega | (B^n C^l) \Longrightarrow \omega | B^n$ ou $\omega | C^l$.

** E-2-2-2-2-1-1- Si $\omega | B^n \Longrightarrow \omega | B \Longrightarrow B = \omega^j B_1$ avec $\omega \nmid B_1$. Par suite $B_1^n C^l = 2^{s-jn} k_1 (p' - a')$:

- Si $s - jn \geq 1 \Longrightarrow \omega | C^l \Longrightarrow \omega | C$, il n'a pas de contradiction avec $C^l = \omega^{im} A_1^m + \omega^{jn} B_1^n$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.

- Si $s - jn \leq 0 \Longrightarrow \omega \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = \omega^{im} A_1^m + \omega^{jn} B_1^n \Longrightarrow \omega | C^l$.

** E-2-2-2-2-1-2- Si $\omega | C^l \Longrightarrow \omega | C$, en utilisant la même méthode décrite ci-dessus, nous obtenons les mêmes résultats.

** E-2-2-2-2-2- Supposons que $\omega | (p' - a' = p' - \omega^\beta . a") \Longrightarrow \omega | p' \Longrightarrow \omega | (4p' = b)$, mais $\omega | a' \Longrightarrow \omega | a$. D'où la contradiction avec a, b copremiers.

L'étude des cas du 4.8 est achevée.

4.9 Cas $3|a$ et $b|4p$:

$a = 3a'$ et $4p = k_1 b$. Comme $A^{2m} = \dfrac{4p}{3} cos^2\dfrac{\theta}{3} = \dfrac{4p}{3}\dfrac{3a'}{b} = k_1 a'$ et B^nC^l :

$$B^nC^l = \sqrt[3]{\rho^2}\left(3sin^2\frac{\theta}{3} - cos^2\frac{\theta}{3}\right) = \frac{p}{3}\left(3 - 4cos^2\frac{\theta}{3}\right) = \frac{p}{3}\left(3 - 4\frac{3a'}{b}\right) = \frac{k_1}{4}(b - 4a') \quad (4.88)$$

Comme B^nC^l est un entier, on doit avoir $4|k_1$, ou $4|(b-4a')$ ou ($2|k_1$ et $2|(b-4a')$).
** F-1- Si $k_1 = 1 \Rightarrow b = 4p$: c'est le cas 4.6.

** F-2- Si $k_1 = 4 \Rightarrow p = b$: c'est le cas 4.3.

** F-3- Si $k_1 = 2$ et $2|(b-4a')$: Dans ce cas, nous avons $A^{2m} = 2a' \Longrightarrow 2|a' \Longrightarrow 2|a$. $2|(b-4a') \Longrightarrow 2|b$ d'où la contradiction avec a, b copremiers. Donc ce cas est impossible.

** F-4- Si $2|k_1$ et $2|(b-4a')$: $2|(b-4a') \Longrightarrow 2|b \Longrightarrow b = 2b'$ et $2|k_1 \Longrightarrow k_1 = 2k'_1$ avec $k'_1 > 2$ et nous avons $A^{2m} = 2k'_1a', \quad B^nC^l = k'_1(b'-2a')$:

** F-4-1- Si k'_1 est premier >2, alors $A^{2m} = 2k'_1a' \Longrightarrow 2|a' \Longrightarrow 2|a$, or $2|b$ d'où la contradiction avec a, b copremiers, ce cas est impossible.

** F-4-2- Si k'_1 est non premier. De $A^{2m} = 2k'_1a' \Longrightarrow 2|(k'_1.a')$. Si $2|a' \Longrightarrow 2|a$ d'où la contradiction avec a, b copremiers, ce cas est impossible. Nous supposons que $2|k'_1$ et $2 \nmid a'$, de $B^nC^l = k'_1(b'-2a') \Longrightarrow 2|(B^nC^l) \Longrightarrow 2|B^n$ ou $2|C^l$.

** F-4-2-1- Supposons que $2|B^n \Longrightarrow 2|B$, comme $2|A$ par suite $2|C^l \Longrightarrow 2|C$. Alors la conjecture (1.1) est vérifiée.

** F-4-2-2- De même, si $2|C^l$, nous arrivons à $2|B^n \Longrightarrow 2|B$ et nous obtenons que la conjecture (1.1) est vérifiée.

** F-5- Nous supposons que $4|k_1$ avec $k_1 > 4 \Rightarrow k_1 = 4k'_2$, on a donc :

$$A^{2m} = 4k'_2a' \quad (4.89)$$
$$B^nC^l = k'_2(b-4a') \quad (4.90)$$

** F-5-1- Nous supposons k'_2 est premier, de (4.89), nous avons $k'_2|a'$. De (4.90), $k'_2|(B^nC^l) \Longrightarrow k'_2|B^n$ ou $k'_2|C^l$.

** F-5-1-1- Supposons $k'_2|B^n \Longrightarrow k'_2|B \Longrightarrow B = k'^{\beta}_2.B_1$ avec $\beta \geq 1$ et $k'_2 \nmid B_1$. Par suite, nous avons $k'^{n\beta-1}_2 B^n_1 = b - 4a' \Longrightarrow k'_2|b$ d'où la contradiction avec a, b copremiers. Donc ce cas est impossible.

** F-5-1-2- Même résultat si nous supposons que $k'_2|C^l$.

** F-5-2- Nous supposons que k'_2 est non premier.

** F-5-2-1- Nous supposons que k'_2 et a' sont copremiers. De (4.89), k'_2 s'écrit sous la forme $k'_2 = q_1^{2j}.q_2^2$ et $q_1 \nmid q_2$ et q_1 premier. $B^nC^l = q_1^{2j}.q_2^2(b-4a') \Longrightarrow q_1|B^n$ ou $q_1|C^l$.

** F-5-2-1-1- Supposons que $q_1|B^n \Longrightarrow q_1|B \Longrightarrow B = q_1^f.B_1$ avec $q_1 \nmid B_1$. Nous obtenons $B_1^nC^l = q_1^{2j-fn}q_2^2(b-4a')$:
- Si $2j - f.n \geq 1 \Longrightarrow q_1|C^l \Longrightarrow q_1|C$ mais $C^l = A^m + B^n$ donne aussi $q_1|C$.
- Si $2j - f.n = 0$, nous avons $B_1^nC^l = q_2^2(b-4a')$, mais $C^l = A^m + B^n$ donne $q_1|C$ par suite $q_1|(b-4a')$. Comme q_1 et a' sont premiers alors $q_1 \nmid b$.
- Si $2j - f.n < 0 \Longrightarrow q_1|(b-4a') \Longrightarrow q_1 \nmid b$ et $C^l = A^m + B^n$ donne $q_1|C$.
Dans les 3 cas précédents, la conjecture (1.1) est vérifiée.

** F-5-2-1-2- Nous obtenons les mêmes résultats si $q_1|C^l$.

** F-5-2-2- Nous supposons que k'_2 et a' non copremiers. Soit q_1 premier tel que $q_1|k'_2$ et $q_1|a'$. Ecrivons k'_2 sous la forme $q_1^j.q_2$ avec $q_1 \nmid q_2$. De $A^{2m} = 2k'_2a' \Longrightarrow q_1|A^{2m} \Longrightarrow q_1|A$. Par suite de $B^nC^l = q_1^jq_2(b-4a')$ il s'ensuit que $q_1|(B^nC^l) \Longrightarrow q_1|B^n$ ou $q_1|C^l$.

** F-5-2-2-1- Supposons que $q_1|B^n \Longrightarrow q_1|B \Longrightarrow B = q_1^\beta.B_1$ avec $\beta \geq 1$ et $q_1 \nmid B_1$. Par suite, nous avons $q_1^{n\beta}B_1^nC^l = q_1^jq_2(b-4a') \Longrightarrow B_1C^l = q_1^{j-n\beta}q_2(b-4a')$.
- Si $j - n\beta \geq 1$, alors $q_1|C^l \Longrightarrow q_1|C$, mais $C^l = A^m + B^n$ donne $q_1|C$, donc la conjecture (1.1) est vérifiée.
- Si $j - n\beta = 0$, nous obtenons $B_1C^l = q_2(b-4a')$, et $q_1|(b-4a') \Longrightarrow q_1|b$ car $q_1|a' \Longrightarrow q_1|a$ d'où la contradiction avec a, b copremiers.
- Si $j - n\beta < 0 \Longrightarrow q_2|(b-4a') \Longrightarrow q_2|b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** F-5-2-2-2- Nous obtenons les mêmes résultats si nous supposons que $q_1|C^l$.

** F-6- Si $4 \nmid |(b-4a')$ et $4 \nmid k_1$ c'est impossible. Nous supposons maintenant que $4|(b-4a') \Rightarrow 4|b$, et $b - 4a' = 4^t.g$ avec $4 \nmid g$, alors nous avons :

$$A^{2m} = k_1a'$$
$$B^nC^l = k_1.4^{t-1}.g$$

** F-6-1- Nous supposons que k_1 est premier. De $A^{2m} = k_1a'$ il s'ensuit facilement que $k_1|a'$. De $B^nC^l = k_1.4^{t-1}.g$ nous obtenons que $k_1|(B^nC^l) \Longrightarrow k_1|B^n$ ou $k_1|C^l$.

** F-6-1-1- Supposons que $k_1|B^n \Longrightarrow k_1|B \Longrightarrow B = k_1^j.B_1$ avec $j > 0$ et $k_1 \nmid B_1$. D'où $k_1^{n.j}B_1^nC^l = k_1.4^{t-1}.g \Longrightarrow k_1^{n.j-1}B_1^nC^l = 4^{t-1}.g$. Or $n \geq 3$ et $j \geq 1$ donc $n.j - 1 \geq 2$. Par suite comme $k_1 \neq 2$ alors $k_1|g \Longrightarrow k_1|(b-4a')$ mais $k_1|a' \Longrightarrow k_1|b$ d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** F-6-1-2- Nous obtenons le même résultat si $k_1|C^l$.

** F-6-2- Nous supposons que k_1 est non premier, différent de 4 (cas dejà vu), avec $4 \nmid k_1$.

** F-6-2-1- Si $k_1 = 2k'$ avec k' impair>1. D'où $A^{2m} = 2k'a' \Longrightarrow 2|a' \Longrightarrow 2|a$ mais $4|b$ par suite la contradiction avec a, b copremiers.

** F-6-2-2- Nous supposons que k_1 est impair avec k_1 et a' copremiers. Ecrivons k_1 s'écrit sous la forme $k_1 = q_1^j.q_2$ avec $q_1 \nmid q_2$ et q_1 premier et $j \geq 1$. $B^nC^l = q_1^j.q_2 4^{t-1}g \Longrightarrow q_1|B^n$ ou $q_1|C^l$.

** F-6-2-2-1- Supposons que $q_1|B^n \Longrightarrow q_1|B \Longrightarrow B = q_1^f.B_1$ avec $q_1 \nmid B_1$. Nous obtenons $B_1^nC^l = q_1^{j-f.n}q_2 4^{t-1}g$.
- Si $j - f.n \geq 1 \Longrightarrow q_1|C^l \Longrightarrow q_1|C$ mais $C^l = A^m + B^n$ donne aussi $q_1|C$.
- Si $j-f.n = 0$, nous avons $B_1^nC^l = q_2 4^{t-1}g$, mais $C^l = A^m+B^n$ donne $q_1|C$ par suite $q_1|(b-4a')$. Comme q_1 et a' sont copremiers alors $q_1 \nmid b$.
- Si $j - f.n < 0 \Longrightarrow q_1|(b - 4a') \Longrightarrow q_1 \nmid b$ et $C^l = A^m + B^n$ donne $q_1|C$.
Dans les 3 cas précédents, la conjecture (1.1) est vérifiée.

** F-6-2-2-2- Nous obtenons le même résultat si $q_1|C^l$.

** F-6-2-3- Nous supposons que k_1 et a' non copremiers. Soit q_1 premier tel que $q_1|k_1$ et $q_1|a'$. Ecrivons k_1 sous la forme $q_1^j.q_2$ avec $q_1 \nmid q_2$. De $A^{2m} = k_1a' \Longrightarrow q_1|A^{2m} \Longrightarrow q_1|A$. Par suite de $B^nC^l = q_1^jq_2(b - 4a')$ il s'ensuit que $q_1|(B^nC^l) \Longrightarrow q_1|B^n$ ou $q_1|C^l$.

** F-6-2-3-1- Supposons que $q_1|B^n \Longrightarrow q_1|B \Longrightarrow B = q_1^\beta.B_1$ avec $\beta \geq 1$ et $q_1 \nmid B_1$. Par suite, nous avons $q_1^{n\beta}B_1^nC^l = q_1^jq_2(b - 4a') \Longrightarrow B_1C^l = q_1^{j-n\beta}q_2(b - 4a')$:

- Si $j - n\beta \geq 1$, alors $q_1|C^l \Longrightarrow q_1|C$, mais $C^l = A^m + B^n$ donne $q_1|C$, donc la conjecture (1.1) est vérifiée.

- Si $j - n\beta = 0$, nous obtenons $B_1C^l = q_2(b - 4a')$, or $q_1|A$ et $q_1|B$ donc $q_1|C$ et par suite $q_1|(b - 4a') \Longrightarrow q_1|b$ car $q_1|a' \Longrightarrow q_1|a$ d'où la contradiction avec a, b copremiers.

- Si $j - n\beta < 0 \Longrightarrow q_1|(b - 4a') \Longrightarrow q_1|b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** F-6-2-3-2- Nous obtenons les mêmes résultats si nous supposons que $q_1|C^l$.

5 Hypothèse : $\{3|p \quad et \quad b|4p\}$

5.1 Cas $b = 2$ et $3|p$:

$3|p \Rightarrow p = 3p'$ avec $p' \neq 1$ parce que $3 \ll p$, et $b = 2$, nous obtenons :

$$A^{2m} = \frac{4p.a}{3b} = \frac{4.3p'.a}{3b} = \frac{4.p'.a}{2} = 2.p'.a \tag{5.1}$$

Comme :

$$\frac{1}{4} < cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{a}{b} = \frac{a}{2} < \frac{3}{4} \Rightarrow a < 2 \Rightarrow a = 1 \tag{5.2}$$

mais $a > 1$, alors le cas $b = 2$ et $3|p$ est impossible.

5.2 Cas $b = 4$ et $3|p$:

Nous avons $3|p \Longrightarrow p = 3p'$ avec $p' \in \mathbb{N}^*$, il s'ensuit :

$$A^{2m} = \frac{4p.a}{3b} = \frac{4.3p'.a}{3 \times 4} = p'.a \tag{5.3}$$

et :
$$\frac{1}{4} < cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{a}{b} = \frac{a}{4} < \frac{3}{4} \Rightarrow 1 < a < 3 \Rightarrow a = 2 \tag{5.4}$$
mais a, b sont copremiers, alors le cas $b = 4$ et $3|p$ est impossible.

5.3 Cas : $b \neq 2, b \neq 4$, $b|p$ et $3|p$:

Comme $3|p$, alors $p = 3p'$ et :

$$A^{2m} = \frac{4p}{3}cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3}\frac{a}{b} = \frac{4 \times 3p'}{3}\frac{a}{b} = \frac{4p'a}{b} \tag{5.5}$$

Nous considérons le cas : $b|p' \Longrightarrow p' = bp"$ et $p" \neq 1$ (si $p" = 1$, alors $p = 3b$, voir paragraphe 5.8 Cas $k' = 1$). Finalement, nous obtenons :

$$A^{2m} = \frac{4bp"a}{b} = 4ap"\,; \quad B^nC^l = p".(3b - 4a) \tag{5.6}$$

** G-1- Supposons que $p"$ est premier, d'où $A^{2m} = 4ap" = (A^m)^2 \Longrightarrow p"|a$. Or $B^nC^l = p"(3b - 4a) \Longrightarrow p"|B^n$ ou $p"|C^l$.

** G-1-1- Si $p"|B^n \Longrightarrow p"|B \Longrightarrow B = p"B_1$ avec $B_1 \in \mathbb{N}^*$. Par suite : $p"^{n-1}B_1^nC^l = 3b - 4a$. Or $n > 2$, alors $(n - 1) > 1$ et $p"|a$, d'où $p"|3b \Longrightarrow p" = 3$ ou $p"|b$.

** G-1-1-1- Si $p" = 3 \Longrightarrow 3|a$, avec a s'écrit sous la forme $a = 3a'^2$. Or $A^m = 6a' \Longrightarrow 3|A^m \Longrightarrow 3|A \Longrightarrow A = 3A_1$. D'où $3^{m-1}A_1^m = 2a' \Longrightarrow 3|a' \Longrightarrow a' = 3a"$. Mais $p"^{n-1}B_1^nC^l = 3^{n-1}B_1^nC^l = 3b - 4a \Longrightarrow 3^{n-2}B_1^nC^l = b - 36a"^2$. Comme $n > 2 \Longrightarrow n - 2 \geq 1$, donc $3|b$ d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** G-1-1-2- Nous supposons maintenant que $p"|b$, mais $p"|a$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** G-1-2- De la même façon, si $p"|C^l$ nous arrivons à des contradictions.

** G-2- Nous considérons que $p"$ n'est pas premier.

** G-2-1- $p", a$ copremiers : $A^{2m} = 4ap" \Longrightarrow A^m = 2a'.p_1$ avec $a = a'^2$ et $p" = p_1^2$, donc a', p_1 sont aussi copremiers. Comme $A^m = 2a'.p_1$, alors $2|a'$ ou $2|p_1$.

** G-2-1-1- $2|a'$, alors $2|a' \Longrightarrow 2 \nmid p_1$. Or $p" = p_1^2$.

** G-2-1-1-1- Si p_1 est premier, c'est impossible avec $A^m = 2a'.p_1$.

** G-2-1-1-2- Donc p_1 est non premier et il s'écrit $p_1 = \omega^m \Longrightarrow p" = \omega^{2m}$. Par suite $B^nC^l = \omega^{2m}(3b - 4a)$.

** G-2-1-1-2-1- Si ω est premier, il est différent de 2, alors $\omega|(B^nC^l) \Longrightarrow \omega|B^n$ ou $\omega|C^l$.

** G-2-1-1-2-1-1- Si $\omega|B^n \Longrightarrow \omega|B \Longrightarrow B=\omega^j B_1$ avec $\omega \nmid B_1$, d'où $B_1^n.C^l=\omega^{2m-nj}(3b-4a)$.

** G-2-1-1-2-1-1-1- Si $2m-n.j=0$, nous obtenons $B_1^n.C^l=3b-4a$. Comme $C^l=A^m+B^n \Longrightarrow \omega|C^l \Longrightarrow \omega|C$, et $\omega|(3b-4a)$. Or $\omega \neq 2$ et ω est premier avec a' donc premier avec a, par suite $\omega \nmid (3b)$, donc $\omega \neq 3$ et $\omega \nmid b$. La conjecture (1.1) est vérifiée.

** G-2-1-1-2-1-1-2- Si $2m-nj \geq 1$, là aussi, avec le même raisonnement, nous avons $\omega|C^l \Longrightarrow \omega|C$ et $\omega|(3b-4a)$ et $\omega \nmid a$ et $\omega \neq 3$ et $\omega \nmid b$. La conjecture (1.1) est vérifiée.

** G-2-1-1-2-1-1-3- Si $2m-nj<0 \Longrightarrow \omega^{n.j-2m}B_1^n.C^l=3b-4a$. Comme $\omega|C$ utilisant $C^l=A^m+B^n$ d'où $C=\omega^h.C_1 \Longrightarrow \omega^{n.j-2m+h.l}B_1^n.C_1^l=3b-4a$. Si $n.j-2m+h.l<0 \Longrightarrow \omega|B_1^nC_1^l$ par suite la contradiction avec $\omega \nmid B_1$ ou $\omega \nmid C_1$. Donc $n.j-2m+h.l>0$ et $\omega|(3b-4a)$ avec ω, a, b copremiers et la conjecture est vérifiée.

** G-2-1-1-2-1-2- Nous obtenons les mêmes résultats si $\omega|C^l$.

** G-2-1-1-2-2- Maintenant, $p"=\omega^{2m}$ et ω non premier, nous écrivons $\omega=\omega_1^f.\Omega$ avec ω_1 premier $\nmid \Omega$ et $f \geq 1$ un entier, et $\omega_1|A$. D'où $B^nC^l=\omega_1^{2f.m}\Omega^{2m}(3b-4a) \Longrightarrow \omega_1|(B^nC^l) \Longrightarrow \omega_1|B^n$ ou $\omega_1|C^l$.

** G-2-1-1-2-2-1- Si $\omega_1|B^n \Longrightarrow \omega_1|B \Longrightarrow B=\omega_1^jB_1$ avec $\omega_1 \nmid B_1$, d'où $B_1^n.C^l=\omega_1^{2.m-nj}\Omega^{2m}(3b-4a)$:

** G-2-1-1-2-2-1-1- Si $2f.m-n.j=0$, nous obtenons $B_1^n.C^l=\Omega^{2m}(3b-4a)$. Comme $C^l=A^m+B^n \Longrightarrow \omega_1|C^l \Longrightarrow \omega_1|C$, et $\omega_1|(3b-4a)$. Or $\omega_1 \neq 2$ et ω_1 est premier avec a' donc premier avec a, par suite $\omega_1 \nmid (3b)$, donc $\omega_1 \neq 3$ et $\omega_1 \nmid b$. La conjecture (1.1) est vérifiée.

** G-2-1-1-2-2-1-2- Si $2f.m-n.j \geq 1$, là aussi, avec le même raisonnement, nous avons $\omega_1|C^l \Longrightarrow \omega_1|C$ et $\omega_1|(3b-4a)$ et $\omega_1 \nmid a$ et $\omega_1 \neq 3$ et $\omega_1 \nmid b$. La conjecture (1.1) est vérifiée.

** G-2-1-1-2-2-1-3- Si $2f.m-n.j<0 \Longrightarrow \omega_1^{n.j-2m.f}B_1^n.C^l=\Omega^{2m}(3b-4a)$. Comme $\omega_1|C$ utilisant $C^l=A^m+B^n$ d'où $C=\omega_1^h.C_1 \Longrightarrow \omega^{n.j-2m.f+h.l}B_1^n.C_1^l=\Omega^{2m}(3b-4a)$. Si $n.j-2m.f+h.l<0 \Longrightarrow \omega_1|B_1^nC_1^l$ par suite la contradiction avec $\omega_1 \nmid B_1$ et $\omega_1 \nmid C_1$. Donc $n.j-2m.f+h.l>0$ et $\omega_1|(3b-4a)$ avec ω_1, a, b copremiers et la conjecture (1.1) est vérifiée.

** G-2-1-1-2-2-2- Nous obtenons les mêmes résultats si $\omega_1|C^l$.

** G-2-1-2- Si $2|p_1$: alors $2|p_1 \Longrightarrow 2 \nmid a' \Longrightarrow 2 \nmid a$. Or $p"=p_1^2$.

** G-2-1-2-1- Si p_1 est premier égal à 2, nous obtenons $A^m=4a' \Longrightarrow 2|a'$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** G-2-1-2-2- Donc p_1 est non premier et $2|p_1$. Comme $A^m=2a'p_1$, p_1 s'écrit sous la forme $p_1=2^{m-1}\omega^m \Longrightarrow p"=2^{2m-2}\omega^{2m}$. Par suite $B^nC^l=2^{2m-2}\omega^{2m}(3b-4a) \Longrightarrow 2|B^n$ ou $2|C^l$.

** G-2-1-2-2-1- Si $2|B^n \Longrightarrow 2|B$, comme $2|A$, par suite $2|C$. De $B^nC^l=2^{2m-2}\omega^{2m}(3b-4a)$ s'ensuit que si $2|(3b-4a) \Longrightarrow 2|b$ mais comme $2 \nmid a$, il n'y aura de contradiction avec a, b copremiers et la conjecture (1.1) est vérifiée.

** G-2-1-2-2-2- Si $2|C^l$, nous obtenons les mêmes résultats.

** G-2-2- $p"$, a non copremiers : Soit ω un nombre premier tel que $\omega|a$ et $\omega|p"$.

** G-2-2-1- Supposons que $\omega = 3$. Comme $A^{2m} = 4ap" \Longrightarrow 3|A$, or $3|p$, comme $p = A^{2m} + B^{2n} + A^m B^n \Longrightarrow 3|B^{2n} \Longrightarrow 3|B$, par suite $3|C^l \Longrightarrow 3|C$. Nous écrivons $A = 3^i A_1$, $B = 3^j B_1$, $C = 3^h C_1$ avec 3 est copremier avec A_1, B_1 et C_1 et $p = 3^{2im}A_1^{2m} + 3^{2nj}B_1^{2n} + 3^{im+jn}A_1^m B_1^n = 3^k.g$ avec $k = min(2im, 2jn, im+jn)$ et $3 \nmid g$. Nous avons aussi $(\omega = 3)|a$ et $(\omega = 3)|p"$ ce qui donne $a = 3^\alpha a_1$, $3 \nmid a_1$ et $p" = 3^\mu p_1$, $3 \nmid p_1$ avec $A^{2m} = 4ap" = 3^{2im}A_1^{2m} = 4 \times 3^{\alpha+\mu}.a_1.p_1 \Longrightarrow \alpha + \mu = 2im$. Comme $p = 3p' = 3b.p" = 3b.3^\mu p_1 = 3^{\mu+1}.b.p_1$. L'exposant du facteur 3 de p est k, l'exposant du facteur 3 du membre à gauche de l'équation précédente est $\mu + 1$ ajouté de l'exposant β de 3 du facteur b,avec $\beta \geq 0$, soit $min(2im, 2jn, im+jn) = \mu + 1 + \beta$ en rappelant que $\alpha + \mu = 2im$. Mais $B^n C^l = p"(4b - 3a)$ ce qui donne $3^{(nj+hl)}B_1^n C_1^l = 3^{\mu+1}p_1(b - 4 \times 3^{(\alpha-1)}a_1) = 3^{\mu+1}p_1(3^\beta b_1 - 4 \times 3^{(\alpha-1)}a_1)$, $3 \nmid b_1$. Nous avons aussi $A^m + B^n = C^l$ donne $3^{im}A_1^m + 3^{jn}B_1^n = 3^{hl}C_1^l$. Posons $\epsilon = min(im, jn)$, nous avons $\epsilon = hl = min(im, jn)$. Nous avons les conditions :

$$k = min(2im, 2jn, im+jn) = \mu + 1 + \beta \tag{5.7}$$

$$\alpha + \mu = 2im \tag{5.8}$$

$$\epsilon = hl = min(im, jn) \tag{5.9}$$

$$3^{(nj+hl)}B_1^n C_1^l = 3^{\mu+1}p_1(3^\beta b_1 - 4 \times 3^{(\alpha-1)}a_1) \tag{5.10}$$

** G-2-2-1-1- $\alpha = 1 \Longrightarrow a = 3a_1$ et $3 \nmid a_1$, l'équation (5.8) devient :

$$1 + \mu = 2im \tag{5.11}$$

et la première équation (5.7) s'écrit :

$$k = min(2im, 2jn, im+jn) = 2im + \beta \tag{5.12}$$

- Si $k = 2im \Longrightarrow \beta = 0$ soit $3 \nmid b$. Nous obtenons $2im \leq 2jn \Longrightarrow im \leq jn$, et $2im \leq im + jn \Longrightarrow im \leq jn$. La troisième équation donne $hl = im$. La dernière équation donne $nj + hl = \mu + 1 = 2im \Longrightarrow im = nj$, par suite $im = nj = hl$ et $B_1^n C_1^l = p_1(b - 4a_1)$. Si a, b sont copremiers, la conjecture (1.1) est vérifiée.

- Si $k = 2in$ ou $k = im + in$, nous obtenons $\beta = 0$, $im = jn = hl$ et $B_1^n C_1^l = p_1(b - 4a_1)$. Si a, b sont copremiers, la conjecture (1.1) est vérifiée.

** G-2-2-1-2- $\alpha > 1 \Longrightarrow \alpha \geq 2$.

- Si $k = 2im \Longrightarrow 2im = \mu + 1 + \beta$, or $\mu = 2im - \alpha$ ce qui donne $\alpha = 1 + \beta \geq 2 \Longrightarrow \beta \neq 0 \Longrightarrow 3|b$, mais $3|a$ c'est la contradiction avec a, b copremiers.

- Si $k = 2jn = \mu + 1 + \beta \leq 2im \Longrightarrow \mu + 1 + \beta \leq \mu + \alpha \Longrightarrow 1 + \beta \leq \alpha \Longrightarrow \beta = 0$ ou $\beta = 1$. Si $\beta = 1 \Longrightarrow 3|b$ or $3|a$, d'où la contradiction avec a, b copremiers. Si $\beta = 0 \Longrightarrow 3 \nmid b$. Nous obtenons $jn = hl < im$ car $\alpha > 1$, par suite la conjecture (1.1) est vérifiée.

- Si $k = im + jn \Longrightarrow im + jn \leq 2im \Longrightarrow jn \leq im$, et $im + jn \leq 2jn \Longrightarrow im \leq jn$, par suite $im = jn$. Comme $k = im + jn = 2im = 1 + \mu + \beta$ et $\alpha + \mu = 2im$ qui donne

$\alpha = 1 + \beta \geq 2 \Longrightarrow \beta \geq 1 \Longrightarrow 3|b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** G-2-2-2- Nous supposons que $\omega \neq 3$. Nous écrivons $a = \omega^{\alpha} a_1$ avec $\omega \nmid a_1$ et $p" = \omega^{\mu} p_1$ avec $\omega \nmid p_1$. Comme $A^{2m} = 4ap" = 4\omega^{\alpha+\mu}.a_1.p_1 \Longrightarrow \omega|A \Longrightarrow A = \omega^i A_1$, $\omega \nmid A_1$. Or $B^n C^l = p"(3b-4a) = \omega^{\mu} p_1(3b-4a) \Longrightarrow \omega|B^n C^l \Longrightarrow \omega|B^n$ ou $\omega|C^l$.

** G-2-2-2-1- $\omega|B^n \Longrightarrow \omega|B \Longrightarrow B = \omega^j B_1$ et $\omega \nmid B_1$. De $A^m + B^n = C^l \Longrightarrow \omega|C^l \Longrightarrow \omega|C$. Comme $p = bp' = 3bp" = 3\omega^{\mu} bp_1 = \omega^k(\omega^{2im-k} A_1^{2m} + \omega^{2jn-k} B_1^{2n} + \omega^{im+jn-k} A_1^m B_1^n)$ avec $k = min(2im, 2jn, im+jn)$. Par suite :

- Si $\mu = k$, alors $\omega \nmid b$ et la conjecture (1.1) est vraie.
- Si $k > \mu$, alors $\omega|b$, or $\omega|a$ d'où la contradiction avec a, b copremiers.
- Si $k < \mu$, il s'ensuit de :

$$3\omega^{\mu} bp_1 = \omega^k(\omega^{2im-k} A_1^{2m} + \omega^{2jn-k} B_1^{2n} + \omega^{im+jn-k} A_1^m B_1^n)$$

que $\omega|A_1$ ou $\omega|B_1$ ce qui en contradiction avec les hypothèses.

** G-2-2-2-2- Si $\omega|C^l \Longrightarrow \omega|C \Longrightarrow C = \omega^h C_1$ avec $\omega \nmid C_1$. De $A^m + B^n = C^l \Longrightarrow \omega|(C^l - A^m) \Longrightarrow \omega|B$. Par suite, nous obtenons les mêmes résultats de G-3-2-1- ci-dessus.

5.4 Cas $b = 3$ et $3|p$:

comme $3|p \Longrightarrow p = 3p'$, nous écrivons :

$$A^{2m} = \frac{4p}{3} cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3}\frac{a}{b} = \frac{4 \times 3p'}{3}\frac{a}{3} = \frac{4p'a}{3} \tag{5.13}$$

Comme A^{2m} est un entier et que a et b sont copremiers et $cos^2\dfrac{\theta}{3}$ ne peut pas prendre la valeur 1 en référence à l'équation (2.13), alors nous avons nécessairement $3|p' \Longrightarrow p' = 3p"$ avec $p" \neq 1$, sinon $p = 3p' = 3 \times 3p" = 9$ mais $9 \ll (p = A^{2m} + B^{2n} + A^m B^n)$, l'hypothèse $p" = 1$ est impossible, alors $p" > 1$. D'où :

$$A^{2m} = \frac{4p'a}{3} = \frac{4 \times 3p"a}{3} = 4p"a\,; \quad B^n C^l = p".(9-4a) \tag{5.14}$$

Comme $\dfrac{1}{4} < cos^2\dfrac{\theta}{3} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{a}{3} < \dfrac{3}{4} \Longrightarrow 3 < 4a < 9 \Longrightarrow$ comme $a > 1, a = 2$ et nous obtenons :

$$A^{2m} = 4p"a = 8p"\,; \quad B^n C^l = \frac{3p"(9-4a)}{3} = p" \tag{5.15}$$

Les 2 dernières équations ci-dessus impliquent que $p"$ n'est pas premier. Soit l'écriture de $p"$ en facteurs premiers : $p" = \prod_{i \in I} p_i^{\alpha_i}$ où les p_i sont des entiers premiers et I un ensemble fini d'indices. Nous pouvons écrire $p" = p_1^{\alpha_1}.q_1$ avec $p_1 \nmid q_1$. De (5.15), nous avons $p_1|A$ et $p_1|B^n C^l \Longrightarrow p_1|B^n$ ou $p_1|C^l$.

** H-1- Supposons que $p_1|B^n \Longrightarrow B = p_1^{\beta_1}.B_1$ avec $p_1 \nmid B_1$ et $\beta_1 \geq 1$. Par suite, nous obtenons $B_1^n C^l = p_1^{\alpha_1 - n\beta_1}.q_1$ avec les cas suivants :

- Si $\alpha_1 - n\beta_1 \geq 1 \Longrightarrow p_1|C^l \Longrightarrow p_1|C$, il s'ensuit que la conjecture (1.1) est vraie.
- Si $\alpha_1 - n\beta_1 = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = n\beta_1 \Longrightarrow B_1 C^l = q_1 \Longrightarrow p_1 \nmid C^l$ ce qui en contradiction avec $p_1|(A^m - B^n)$ soit $p_1|C^l$. Donc ce cas est impossible.

- Si $\alpha_1 - n\beta_1 < 0$, nous obtenons $p_1^{n\beta_1-\alpha_1}B_1^nC^l = q_1 \Longrightarrow p_1|q_1$ ce qui en contradiction avec $p_1 \nmid q_1$. Donc ce cas est impossible.

** H-2- Supposons maintenant que $p_1|C^l \Longrightarrow p_1|C \Longrightarrow C = p_1^{\gamma_1}.C_1$ avec $p_1 \nmid C_1$ et $\gamma_1 \geq 1$. Par suite, nous obtenons $B^nC_1^l = p_1^{\alpha_1-l\gamma_1}.q_1$ avec les cas suivants :

- Si $\alpha_1 - l\gamma_1 \geq 1 \Longrightarrow p_1|B^n \Longrightarrow p_1|B$, il s'ensuit que la conjecture (1.1) est vraie.

- Si $\alpha_1 - l\gamma_1 = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = l\gamma_1 \Longrightarrow B^nC_1 = q_1 \Longrightarrow p_1 \nmid B^n$ ce qui en contradiction avec $p_1|(C^l - A^m)$ soit $p_1|B^n$. Donc ce cas est impossible.

- Si $\alpha_1 - l\gamma_1 < 0$, nous obtenons $p_1^{l\gamma_1-\alpha_1}B^nC_1^l = q_1 \Longrightarrow p_1|q_1$ ce qui en contradiction avec $p_1 \nmid q_1$. Donc ce cas est impossible.

5.5 Cas $3|p$ et $b = p$:

Nous avons $cos^2\dfrac{\theta}{3} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{a}{p}$ et :

$$A^{2m} = \frac{4p}{3}cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3}.\frac{a}{p} = \frac{4a}{3} \tag{5.16}$$

Comme A^{2m} est un entier, ce-ci implique que $3|a$, mais $3|p \Longrightarrow 3|b$. Comme a et b sont copremiers, d'où la contradiction. Alors le cas $3|p$ et $b = p$ est impossible.

5.6 Cas $3|p$ et $b = 4p$:

$3|p \Longrightarrow p = 3p'$, $p' \neq 1$ car $3 \ll p$, par suite $b = 4p = 12p'$.

$$A^{2m} = \frac{4p}{3}cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3}\frac{a}{b} = \frac{a}{3} \Longrightarrow 3|a \tag{5.17}$$

car A^{2m} est un entier. Mais $3|p \Longrightarrow 3|\,[(4p) = b]$, ce qui en contradiction avec l'hypothèse a, b copremiers. Alors le cas $b = 4p$ est impossible.

5.7 Cas $3|p$ et $b = 2p$:

$3|p \Longrightarrow p = 3p'$, $p' \neq 1$ car $3 \ll p$, d'où $b = 2p = 6p'$.

$$A^{2m} = \frac{4p}{3}cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3}\frac{a}{b} = \frac{2a}{3} \Longrightarrow 3|a \tag{5.18}$$

car A^{2m} est un entier, mais $3|p \Longrightarrow 3|(2p) \Longrightarrow 3|b$, ce qui en contradiction avec l'hypothèse a, b sont copremiers. Alors le cas $b = 2p$ est impossible.

5.8 Cas $3|p$ et $b \neq 3$ est un diviseur de p :

Nous avons $b = p' \neq 3$, et p s'écrit $p = kp' \quad avec \quad 3|k \Longrightarrow k = 3k'$ et :

$$A^{2m} = \frac{4p}{3}cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3}.\frac{a}{b} = 4ak' \tag{5.19}$$

$$B^nC^l = \frac{p}{3}.\left(3 - 4cos^2\frac{\theta}{3}\right) = k'(3p' - 4a) = k'(3b - 4a) \tag{5.20}$$

** I-1- $k' \neq 1$:

** I-1-1- Nous supposons que k' est premier, d'où $A^{2m} = 4ak' = (A^m)^2 \Longrightarrow k'|a$. Or $B^nC^l = k'(3b-4a) \Longrightarrow k'|B^n$ ou $k'|C^l$.

** I-1-1-1- Si $k'|B^n \Longrightarrow k'|B \Longrightarrow B = k'B_1$ avec $B_1 \in \mathbb{N}^*$. Par suite $k'^{n-1}B_1^nC^l = 3b-4a$. Or $n > 2$, alors $(n-1) > 1$ et $k'|a$, d'où $k'|3b \Longrightarrow k' = 3$ ou $k'|b$.

** I-1-1-1-1- Si $k' = 3 \Longrightarrow 3|a$, avec a s'écrit sous la forme $a = 3a'^2$. Or $A^m = 6a' \Longrightarrow 3|A^m \Longrightarrow 3|A \Longrightarrow A = 3A_1$ avec $A_1 \in \mathbb{N}^*$. D'où $3^{m-1}A_1^m = 2a' \Longrightarrow 3|a' \Longrightarrow a' = 3a"$. Mais $k'^{n-1}B_1^nC^l = 3^{n-1}B_1^nC^l = 3b-4a \Longrightarrow 3^{n-2}B_1^nC^l = b - 36a"^2$. Comme $n > 2 \Longrightarrow n-2 \geq 1$, donc $3|b$ d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** I-1-1-1-2- Nous supposons maintenant que $k'|b$, mais $k'|a$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** I-1-1-2- De la même façon si $k'|C^l$, nous arrivons à des contradictions.

** I-1-2- On considère que k' n'est pas premier.

** I-1-2-1- Nous supposons que k', a copremiers : $A^{2m} = 4ak' \Longrightarrow A^m = 2a'.p_1$ avec $a = a'^2$ et $k' = p_1^2$, donc a', p_1 sont aussi copremiers. Comme $A^m = 2a'.p_1$ alors $2|a'$ ou $2|p_1$.

** I-1-2-1-1- $2|a'$, alors $2|a' \Longrightarrow 2 \nmid p_1$. Or $k' = p_1^2$.

** I-1-2-1-1-1- Si p_1 est premier c'est impossible avec $A^m = 2a'.p_1$.

** I-1-2-1-1-2- Donc p_1 est supposé non premier et il s'écrit $p_1 = \omega^m \Longrightarrow k' = \omega^{2m}$. Par suite $B^nC^l = \omega^{2m}(3b-4a)$.

** I-1-2-1-1-2-1- Si ω est premier, il est différent de 2, alors $\omega|(B^nC^l) \Longrightarrow \omega|B^n$ ou $\omega|C^l$.

** I-1-2-1-1-2-1-1- Si $\omega|B^n \Longrightarrow \omega|B \Longrightarrow B = \omega^jB_1$ avec $\omega \nmid B_1$, d'où $B_1^n.C^l = \omega^{2m-nj}(3b-4a)$.
- Si $2m - n.j = 0$, nous obtenons $B_1^n.C^l = 3b-4a$, comme $C^l = A^m + B^n \Longrightarrow \omega|C^l \Longrightarrow \omega|C$, et $\omega|(3b-4a)$. Or $\omega \neq 2$ et ω est premier avec a' donc premier avec a, par suite $\omega \nmid (3b)$, donc $\omega \neq 3$ et $\omega \nmid b$. La conjecture (1.1) est vérifiée.
- Si $2m - nj \geq 1$, là aussi, avec le même raisonnement, nous avons $\omega|C^l \Longrightarrow \omega|C$ et $\omega|(3b-4a)$ et $\omega \nmid a$ et $\omega \neq 3$ et $\omega \nmid b$. La conjecture (1.1) est vérifiée.
- Si $2m - nj < 0 \Longrightarrow \omega^{n.j-2m}B_1^n.C^l = 3b-4a$. Comme $\omega|C$, utilisant $C^l = A^m + B^n$, d'où $C = \omega^h.C_1 \Longrightarrow \omega^{n.j-2m+h.l}B_1^n.C_1^l = 3b-4a$. Si $n.j - 2m + h.l < 0 \Longrightarrow \omega|B_1^nC_1^l$, par suite la contradiction avec $\omega \nmid B_1$ ou $\omega \nmid C_1$. Donc $n.j - 2m + h.l > 0$ et $\omega|(3b-4a)$ avec ω, a, b copremiers et la conjecture (1.1) est vérifiée.

** I-1-2-1-1-2-1-2- Si $\omega|C^l$, nous obtenons les mêmes résultats.

** I-1-2-1-1-2-2- Maintenant, $k' = \omega^{2m}$ et ω non premier, nous écrivons $\omega = \omega_1^f.\Omega$ avec ω_1 premier

$\nmid \Omega$ et $f \geq 1$ un entier, et $\omega_1|A$. D'où $B^nC^l = \omega_1^{2f.m}\Omega^{2m}(3b-4a) \Longrightarrow \omega_1|(B^nC^l) \Longrightarrow \omega_1|B^n$ ou $\omega_1|C^l$.

** I-1-2-1-1-2-2-1- Si $\omega_1|B^n \Longrightarrow \omega_1|B \Longrightarrow B = \omega_1^jB_1$ avec $\omega_1 \nmid B_1$, d'où $B_1^n.C^l = \omega_1^{2.m-nj}\Omega^{2m}(3b-4a)$.

- Si $2f.m - n.j = 0$, nous obtenons $B_1^n.C^l = \Omega^{2m}(3b-4a)$. Comme $C^l = A^m + B^n \Longrightarrow \omega_1|C^l \Longrightarrow \omega_1|C$, et $\omega_1|(3b-4a)$. Or $\omega_1 \neq 2$ et ω_1 est premier avec a' donc premier avec a, par suite $\omega_1 \nmid (3b)$, donc $\omega_1 \neq 3$ et $\omega_1 \nmid b$. La conjecture (1.1) est vérifiée.

- Si $2f.m - n.j \geq 1$, là aussi, avec le même raisonnement, nous avons $\omega_1|C^l \Longrightarrow \omega_1|C$ et $\omega_1|(3b-4a)$ et $\omega_1 \nmid a$ et $\omega_1 \neq 3$ et $\omega_1 \nmid b$. La conjecture (1.1) est vérifiée.

- Si $2f.m - n.j < 0 \Longrightarrow \omega_1^{n.j-2m.f}B_1^n.C^l = \Omega^{2m}(3b-4a)$. Comme $\omega_1|C$ utilisant $C^l = A^m + B^n$, d'où $C = \omega_1^h.C_1 \Longrightarrow \omega^{n.j-2m.f+h.l}B_1^n.C_1^l = \Omega^{2m}(3b-4a)$. Si $n.j - 2m.f + h.l < 0 \Longrightarrow \omega_1|B_1^nC_1^l$, par suite la contradiction avec $\omega_1 \nmid B_1$ et $\omega_1 \nmid C_1$. Donc $n.j - 2m.f + h.l > 0$ et $\omega_1|(3b-4a)$ avec ω_1, a, b copremiers et la conjecture (1.1) est vérifiée.

** I-1-2-1-1-2-2-2- Nous obtenons les mêmes résultats si $\omega_1|C^l$.

** I-1-2-1-2- Si $2|p_1$: alors $2|p_1 \Longrightarrow 2 \nmid a' \Longrightarrow 2 \nmid a$. Or $k' = p_1^2$.

** I-1-2-1-2-1- Si p_1 est premier égal à 2, nous obtenons $A^m = 4a' \Longrightarrow 2|a'$, d'où la contradiction.

** I-1-2-1-2-2- Donc p_1 est non premier et $2|p_1$. Comme $A^m = 2a'p_1$, p_1 s'écrit sous la forme $p_1 = 2^{m-1}\omega^m \Longrightarrow p_1^2 = 2^{2m-2}\omega^{2m}$. Par suite $B^nC^l = k'(3b-4a) = 2^{2m-2}\omega^{2m}(3b-4a) \Longrightarrow 2|B^n$ ou $2|C^l$.

** I-1-2-1-2-2-1- Si $2|B^n \Longrightarrow 2|B$, comme $2|A$, par suite $2|C$. De $B^nC^l = 2^{2m-2}\omega^{2m}(3b-4a)$ s'ensuit que si $2|(3b-4a) \Longrightarrow 2|b$ mais comme $2 \nmid a$, il n'y aura de contradiction avec a, b copremiers et la conjecture (1.1) est vérifiée.

** I-1-2-1-2-2-2- Même résultat si $2|C^l$.

** I-1-2-2- Nous supposons k', a non copremiers : soit ω un nombre premier tel que $\omega|a$ et $\omega|p_1^2$.

** I-1-2-2-1- Supposons que $\omega = 3$. Comme $A^{2m} = 4ak' \Longrightarrow 3|A$, or $3|p$, comme $p = A^{2m} + B^{2n} + A^mB^n \Longrightarrow 3|B^{2n} \Longrightarrow 3|B$, par suite $3|C^l \Longrightarrow 3|C$. Nous écrivons $A = 3^iA_1$, $B = 3^jB_1$, $C = 3^hC_1$ avec 3 est copremier avec A_1, B_1 et C_1 et $p = 3^{2im}A_1^{2m} + 3^{2nj}B_1^{2n} + 3^{im+jn}A_1^mB_1^n = 3^s.g$ avec $s = min(2im, 2jn, im+jn)$ et $3 \nmid g$. Nous avons aussi $(\omega = 3)|a$ et $(\omega = 3)|k'$ ce qui donne $a = 3^\alpha a_1$, $3 \nmid a_1$ et $k' = 3^\mu p_2$, $3 \nmid p_2$ avec $A^{2m} = 4ak' = 3^{2im}A_1^{2m} = 4 \times 3^{\alpha+\mu}.a_1.p_2 \Longrightarrow \alpha + \mu = 2im$. Comme $p = 3p' = 3b.k' = 3b.3^\mu p_2 = 3^{\mu+1}.b.p_2$. L'exposant du facteur 3 de p est s, l'exposant du facteur 3 du membre à gauche de l'équation précédente est $\mu + 1$ ajouté de l'exposant β de 3 du facteur b, avec $\beta \geq 0$, soit $min(2im, 2jn, im+jn) = \mu + 1 + \beta$ en rappelant que $\alpha + \mu = 2im$. Mais $B^nC^l = k'(4b-3a)$ ce qui donne $3^{(nj+hl)}B_1^nC_1^l = 3^{\mu+1}p_2(b - 4 \times 3^{(\alpha-1)}a_1) = 3^{\mu+1}p_2(3^\beta b_1 - 4 \times 3^{(\alpha-1)}a_1)$, $3 \nmid b_1$. Nous avons aussi $A^m + B^n = C^l$ donne $3^{im}A_1^m + 3^{jn}B_1^n = 3^{hl}C_1^l$. Posons

$\epsilon = min(im, jn)$, nous obtenons $\epsilon = hl = min(im, jn)$. Nous avons les conditions :

$$s = min(2im, 2jn, im + jn) = \mu + 1 + \beta \tag{5.21}$$
$$\alpha + \mu = 2im \tag{5.22}$$
$$\epsilon = hl = min(im, jn) \tag{5.23}$$
$$3^{(nj+hl)} B_1^n C_1^l = 3^{\mu+1} p_2 (3^\beta b_1 - 4 \times 3^{(\alpha-1)} a_1) \tag{5.24}$$

** I-1-2-2-1-1- $\alpha = 1 \Longrightarrow a = 3a_1$ et $3 \nmid a_1$, l'équation (5.22) devient :

$$1 + \mu = 2im \tag{5.25}$$

et la première équation (5.21) s'écrit :

$$s = min(2im, 2jn, im + jn) = 2im + \beta \tag{5.26}$$

- Si $s = 2im \Longrightarrow \beta = 0$ soit $3 \nmid b$. Nous obtenons $2im \leq 2jn \Longrightarrow im \leq jn$, et $2im \leq im + jn \Longrightarrow im \leq jn$. La troisième équation (5.23) donne $hl = im$. La dernière équation (5.24) donne $nj + hl = \mu + 1 = 2im \Longrightarrow im = jn$, par suite $im = jn = hl$ et $B_1^n C_1^l = p_2(b - 4a_1)$. Si a, b sont copremiers, la conjecture (1.1) est vérifiée.

- Si $s = 2jn$ ou $s = im + jn$, nous obtenons $\beta = 0$, $im = jn = hl$ et $B_1^n C_1^l = p_2(b - 4a_1)$. Là aussi, si a, b sont copremiers, la conjecture (1.1) est vérifiée.

** I-1-2-2-1-2- $\alpha > 1 \Longrightarrow \alpha \geq 2$.

- Si $s = 2im \Longrightarrow 2im = \mu + 1 + \beta$, or $\mu = 2im - \alpha$ ce qui donne $\alpha = 1 + \beta \geq 2 \Longrightarrow \beta \neq 0 \Longrightarrow 3|b$, mais $3|a$ c'est la contradiction avec a, b copremiers.

- Si $s = 2jn = \mu + 1 + \beta \leq 2im \Longrightarrow \mu + 1 + \beta \leq \mu + \alpha \Longrightarrow 1 + \beta \leq \alpha \Longrightarrow \beta = 0$ ou $\beta = 1$. Si $\beta = 1 \Longrightarrow 3|b$ or $3|a$, d'où la contradiction avec a, b copremiers et la conjecture (1.1) est non vérifiée. Si $\beta = 0 \Longrightarrow 3 \nmid b$. Nous obtenons $jn = hl < im$ car $\alpha > 1$, par suite la conjecture (1.1) est vérifiée.

- Si $s = im + jn \Longrightarrow im + jn \leq 2im \Longrightarrow jn \leq im$, et $im + jn \leq 2jn \Longrightarrow im \leq jn$, par suite $im = jn$. Comme $s = im + jn = 2im = 1 + \mu + \beta$ et $\alpha + \mu = 2im$ qui donne $\alpha = 1 + \beta \geq 2 \Longrightarrow \beta \geq 1 \Longrightarrow 3|b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** I-1-2-2-2- Nous supposons que $\omega \neq 3$. Nous écrivons $a = \omega^\alpha a_1$ avec $\omega \nmid a_1$ et $k' = \omega^\mu p_2$ avec $\omega \nmid p_2$. Comme $A^{2m} = 4ak' = 4\omega^{\alpha+\mu}.a_1.p_2 \Longrightarrow \omega|A \Longrightarrow A = \omega^i A_1$, $\omega \nmid A_1$. Or $B^n C^l = k'(3b - 4a) = \omega^\mu p_2(3b - 4a) \Longrightarrow \omega|B^n C^l \Longrightarrow \omega|B^n$ ou $\omega|C^l$.

** I-1-2-2-2-1- $\omega|B^n \Longrightarrow \omega|B \Longrightarrow= \omega^j B_1$ et $\omega \nmid B_1$. De $A^m + B^n = C^l \Longrightarrow \omega|C^l \Longrightarrow \omega|C$. Comme $p = bp' = 3bk' = 3\omega^\mu b p_2 = \omega^s(\omega^{2im-s} A_1^{2m} + \omega^{2jn-s} B_1^{2n} + \omega^{im+jn-s} A_1^m B_1^n)$ avec $s = min(2im, 2jn, im + jn)$. Par suite :

- Si $\mu = s$, alors $\omega \nmid b$ et la conjecture (1.1) est vraie.

- Si $s > \mu$, alors $\omega|b$, or $\omega|a$ d'où la contradiction avec a, b copremiers.

- Si $s < \mu$, il s'ensuit de :

$$3\omega^\mu b p_1 = \omega^s(\omega^{2im-s} A_1^{2m} + \omega^{2jn-s} B_1^{2n} + \omega^{im+jn-s} A_1^m B_1^n)$$

que $\omega|A_1$ ou $\omega|B_1$ ce qui en contradiction avec les hypothèses.

** I-1-2-2-2-2- Si $\omega|C^l \Longrightarrow \omega|C \Longrightarrow C = \omega^h C_1$ avec $\omega \nmid C_1$. De $A^m + B^n = C^l \Longrightarrow \omega|(C^l - A^m) \Longrightarrow \omega|B$. Par suite, nous obtenons les mêmes résultats de I-1-2-2-2-1- ci-dessus.

** I-2- $k' = 1$: par suite $k' = 1 \Longrightarrow p = 3b$, alors nous avons $A^{2m} = 4a = (2a')^2 \Longrightarrow A^m = 2a'$, par suite $a = a'^2$ est pair et :

$$A^mB^n = 2\sqrt[3]{\rho}cos\frac{\theta}{3}.\sqrt[3]{\rho}\left(\sqrt{3}sin\frac{\theta}{3} - cos\frac{\theta}{3}\right) = \frac{p\sqrt{3}}{3}sin\frac{2\theta}{3} - 2a$$

ou encore :

$$A^{2m} + 2A^mB^n = \frac{2p\sqrt{3}}{3}sin\frac{2\theta}{3} = 2b\sqrt{3}sin\frac{2\theta}{3} \tag{5.27}$$

Le membre à gauche de (5.27) est un entier et b aussi, alors $2\sqrt{3}sin\dfrac{2\theta}{3}$ peut être écrit sous la forme :

$$2\sqrt{3}sin\frac{2\theta}{3} = \frac{k_1}{k_2} \tag{5.28}$$

où k_1, k_2 sont deux entiers copremiers et $k_2|b \Longrightarrow b = k_2.k_3$.

** I-2-1- $k' = 1$ et $k_3 \neq 1$: alors $A^{2m} + 2A^mB^n = k_3.k_1$. Soit μ un entier premier tel que $\mu|k_3$. Si $\mu = 2 \Rightarrow 2|b$, mais $2|a$, ce-ci est en contradiction avec a, b copremiers. Nous supposons donc $\mu \neq 2$ et $\mu|k_3$, alors $\mu|A^m(A^m + 2B^n) \Longrightarrow \mu|A^m$ ou $\mu|(A^m + 2B^n)$.

** I-2-1-1- $\mu|A^m$: Si $\mu|A^m \Longrightarrow \mu|A^{2m} \Longrightarrow \mu|4a \Longrightarrow \mu|a$. Comme $\mu|k_3 \Longrightarrow \mu|b$ et que a, b sont copremiers d'où la contradiction.

** I-2-1-2- $\mu|(A^m + 2B^n)$: Si $\mu|(A^m + 2B^n) \Longrightarrow \mu \nmid A^m$ et $\mu \nmid 2B^n$ alors $\mu \neq 2$ et $\mu \nmid B^n$. $\mu|(A^m + 2B^n)$, nous pouvons écrire $A^m + 2B^n = \mu.t'$. Il s'ensuit :

$$A^m + B^n = \mu t' - B^n \Longrightarrow A^{2m} + B^{2n} + 2A^mB^n = \mu^2t'^2 - 2t'\mu B^n + B^{2n}$$

En utilisant l'expression de p, nous obtenons :

$$p = t'^2\mu^2 - 2t'B^n\mu + B^n(B^n - A^m)$$

Comme $p = 3b = 3k_2.k_3$ et $\mu|k_3$ d'où $\mu|p \Longrightarrow \ p = \mu\mu'$, alors nous avons :

$$\mu'\mu = \mu(\mu t'^2 - 2t'B^n) + B^n(B^n - A^m)$$

et $\mu|B^n(B^n - A^m) \Longrightarrow \mu|B^n$ ou $\mu|(B^n - A^m)$.

** I-2-1-2-1- $\mu|B^n$: Si $\mu|B^n \Longrightarrow \mu|B$ ce qui est en contradiction avec I-2-1-2-.

** I-2-1-2-2- $\mu|(B^n - A^m)$: Si $\mu|(B^n - A^m)$ et utilisant $\mu|(A^m + 2B^n)$, nous obtenons :

$$\mu|3B^n \Longrightarrow \begin{cases} \mu|B^n \Longrightarrow \mu|B \\ ou \\ \mu = 3 \end{cases} \tag{5.29}$$

** I-2-1-2-2-1- $\mu|B^n$: Si $\mu|B^n \Longrightarrow \mu|B$ ce qui est en contradiction avec I-2-1-2- ci-dessus.

** I-2-1-2-2-2- $\mu = 3$: Si $\mu = 3 \Longrightarrow 3|k_3 \Longrightarrow k_3 = 3k'_3$, et nous avons $b = k_2k_3 = 3k_2k'_3$, il s'ensuit $p = 3b = 9k_2k'_3$ alors $9|p$, mais $p = (A^m - B^n)^2 + 3A^mB^n$ alors :

$$9k_2k'_3 - 3A^mB^n = (A^m - B^n)^2$$

que nous écrivons :

$$3(3k_2k'_3 - A^mB^n) = (A^m - B^n)^2 \tag{5.30}$$

d'où :

$$3|(3k_2k'_3 - A^mB^n) \Longrightarrow\ 3|A^mB^n \Longrightarrow 3|A^m\ ou\ 3|B^n$$

** I-2-1-2-2-2-1- $3|A^m$: Si $3|A^m \Longrightarrow 3|A$ et nous avons aussi $3|A^{2m}$, mais $A^{2m} = 4a \Longrightarrow 3|4a \Longrightarrow 3|a$. Comme $b = 3k_2k'_3$ alors $3|b$, mais a, b sont copremiers d'où la contradiction. Alors $3 \nmid A$.

** I-2-1-2-2-2-2- $3|B^m$: Si $3|B^n \Longrightarrow 3|B$, or l'équation (5.30) implique $3|(A^m - B^n)^2 \Longrightarrow 3|(A^m - B^n) \Longrightarrow 3|A^m \Longrightarrow 3|A$. Mais en utilisant le résultat du cas précédent, nous obtenons $3 \nmid A$.

Alors l'hypothèse $k_3 \neq 1$ est impossible.

** I-2-2- Maintenant, nous supposons que $k_3 = 1 \Longrightarrow b = k_2$ et $p = 3b = 3k_2$. Nous avons alors :

$$2\sqrt{3}sin\frac{2\theta}{3} = \frac{k_1}{b} \tag{5.31}$$

avec k_1, b copremiers, nous écrivons (5.31) comme :

$$4\sqrt{3}sin\frac{\theta}{3}cos\frac{\theta}{3} = \frac{k_1}{b}$$

Prenons le carré des deux membres et en remplaçant $cos^2\frac{\theta}{3}$ par $\frac{a}{b}$, nous obtenons :

$$3 \times 4^2.a(b-a) = k_1^2 \Longrightarrow k_1^2 = 3 \times 4^2.a'^2(b-a) \tag{5.32}$$

ce qui implique que :

$$b - a = 3\alpha^2 \Longrightarrow b = a'^2 + 3\alpha^2 \Longrightarrow k_1 = 12a'\alpha \tag{5.33}$$

Comme :

$$k_1 = 12a'\alpha = A^m(A^m + 2B^n) \Longrightarrow 3\alpha = a' + B^n \tag{5.34}$$

Considérons maintenant que $3|(b-a)$ avec $b = a'^2 + 3\alpha^2$. Le cas $\alpha = 1$ donne $a' + B^n = 3$ ce qui impossible. Nous supposons que $\alpha > 1$. Alors le couple (a', α) est solution de l'équation diophantine :

$$X^2 + 3Y^2 = b \tag{5.35}$$

avec $X = a'$ et $Y = \alpha$. Or d'après un théorème sur les solutions de l'équation donnée par (5.35), b s'écrit (voir théorème 37.4 de [2]) :

$$b = 2^{2s} \times 3^t.p_1^{t_1} \cdots p_g^{t_g}q_1^{2s_1} \cdots q_r^{2s_r} \tag{5.36}$$

où les p_i sont des nombres premiers vérifiant $p_i \equiv 1 (\bmod 6)$, les q_j sont aussi des nombres premiers tels que $q_j \equiv 5 (\bmod 6)$. Alors :

- si $s \geq 1 \Longrightarrow 2|b$, comme $2|a$, d'où la contradiction avec a, b copremiers ;
- si $t \geq 1 \Longrightarrow 3|b$, or $3|(b-a) \Longrightarrow 3|a$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** I-2-2-1- Donc nous supposons que b s'écrit sous la forme :

$$b = p_1^{t_1} \cdots p_g^{t_g} q_1^{2s_1} \cdots q_r^{2s_r} \tag{5.37}$$

avec $p_i \equiv 1(\mod 6)$ et $q_j \equiv 5(\mod 6)$. Finalement nous obtenons que $b \equiv 1(\mod 6)$. Vérifions alors cette condition.

** I-2-2-1-1- Nous allons présenter le tableau des valeurs modulo 6 de $A^m + B^n = C^l$ en fonction des valeurs de $A^m, B^n (\bmod 6)$. Nous obtenons le tableau ci-dessous après avoir retiré les lignes (respectivent les colonnes) de $A^m \equiv 0 (\bmod 6)$ et $A^m \equiv 3 (\bmod 6)$ (respectivement de $B^n \equiv 0 (\bmod 6)$ et $B^n \equiv 3 (\bmod 6)$), car ils présentent des cas contradictoires :

A^m, B^n	1	2	4	5
1	2	3	5	0
2	3	4	0	1
4	5	0	2	3
5	0	1	3	4

TABLE 2 – Tableau de $C^l (\bmod 6)$

** I-2-2-1-1-1- Pour les cas $C^l \equiv 0 (\bmod 6)$ et $C^l \equiv 3 (\bmod 6)$, nous déduisons que $3|C^l \Longrightarrow 3|C \Longrightarrow C = 3^h C_1$, avec $h \geq 1$ et $3 \nmid C_1$. Il en résulte que $p - B^n C^l = 3b - 3^{lh} C_1^l B^n = A^{2m} \Longrightarrow 3|(A^{2m} = 4a) \Longrightarrow 3|a \Longrightarrow 3|b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** I-2-2-1-1-2- Pour les cas $C^l \equiv 0 (\bmod 6)$, $C^l \equiv 2 (\bmod 6)$ et $C^l \equiv 4 (\bmod 6)$, nous déduisons que $2|C^l \Longrightarrow 2|C \Longrightarrow C = 2^h C_1$, avec $h \geq 1$ et $2 \nmid C_1$. Il en résulte que $p = 3b = A^{2m} + B^n C^l = 4a + 2^{lh} C_1^l B^n \Longrightarrow 2|3b \Longrightarrow 2|b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** I-2-2-1-1-3- Nous considérons les cas $A^m \equiv 1(\mod 6)$ et $B^n \equiv 4(\mod 6)$(respectivement $B^n \equiv 2($ mod $6)$) : d'où $2|B^n \Longrightarrow 2|B \Longrightarrow B = 2^j B_1$ avec $j \geq 1$ et $2 \nmid B_1$. Il en résulte de $3b = A^{2m} + B^n C^l = 4a + 2^{jn} B_1^n C^l$, par suite $2|b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** I-2-2-1-1-4- Nous considérons le cas $A^m \equiv 5 (\bmod 6)$ et $B^n \equiv 2 (\bmod 6)$: d'où $2|B^n \Longrightarrow 2|B \Longrightarrow B = 2^j B_1$ avec $j \geq 1$ et $2 \nmid B_1$. Il en résulte de $3b = A^{2m} + B^n C^l = 4a + 2^{jn} B_1^n C^l$, par suite $2|b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** I-2-2-1-1-5- Nous considérons le cas $A^m \equiv 2(\mod 6)$ et $B^n \equiv 5(\mod 6)$: comme $A^m \equiv 2(\mod 6) \Longrightarrow A^m \equiv 2 (\bmod 3)$, donc A^m n'est pas un carré, de même pour B^n. Par suite, A^m et B^n s'écrivent sous la forme suivante :

$$A^m = a_0.\mathcal{A}^2 \tag{5.38}$$
$$B^n = b_0\mathcal{B}^2 \tag{5.39}$$

où a_0(respectivement b_0) regroupe le produit de nombres premiers d'exposants 1 de A^m (respectivement de B^n) sans que nécessairement $(a_0, \mathcal{A}) = 1$ et $(b_0, \mathcal{B}) = 1$. Nous avons aussi $p = 3b = A^{2m} + A^mB^n + B^{2n} = (A^m - B^n)^2 + 3A^mB^n \Longrightarrow 3|(b - A^mB^n) \Longrightarrow A^mB^n \equiv b (\bmod 3)$ or $b = a + 3\alpha^2 \Longrightarrow b \equiv a \equiv a'^2 (\bmod 3)$, par suite $A^mB^n \equiv a'^2 (\bmod 3)$. Mais $A^m \equiv 2 (\bmod 6) \Longrightarrow 2a' \equiv 2 (\bmod 6) \Longrightarrow 4a'^2 \equiv 4 (\bmod 6) \Longrightarrow a'^2 \equiv 1 (\bmod 3)$. Il en résulte que A^mB^n est un carré, soit $A^mB^n = \mathcal{N}^2 = \mathcal{A}^2.\mathcal{B}^2.a_0.b_0$. Notons par $\mathcal{N}_1^2 = a_0.b_0$. Soit p_1 un nombre premier qui divise $a_0 \Longrightarrow a_0 = p_1.a_1$ avec $p_1 \nmid a_1$. $p_1|\mathcal{N}_1^2 \Longrightarrow p_1|\mathcal{N}_1 \Longrightarrow \mathcal{N}_1 = p_1^t\mathcal{N}_1'$ avec $t \geq 1$ et $p_1 \nmid \mathcal{N}_1'$, d'où $p_1^{2t-1}\mathcal{N}_1'^2 = a_1.b_0$. Comme $2t \geq 2 \Longrightarrow 2t - 1 \geq 1 \Longrightarrow p_1|a_1.b_0$ mais $(p_1, a_1) = 1$, d'où $p_1|b_0 \Longrightarrow p_1|B^n \Longrightarrow p_1|B$. Or $p_1|(A^m = 2a')$. p_1 est différent de 2 car $p_1|B^n$ et B^n est impair, d'où la contradiction. Par suite, $p_1|a' \Longrightarrow p_1|a$. Si $p_1 = 3$, de $3|(b - a) \Longrightarrow 3|b$ d'où la contradiction avec a, b premiers. Donc $p_1 > 3$ premier divise A^m et B^n, par suite $p_1|(p = 3b) \Longrightarrow p_1|b$, il en résulte la contradiction avec a, b premiers, sachant que $p = 3b \equiv 3 (\bmod 6)$ et en choisissant le cas qui nous intéresse à savoir $b \equiv 1 (\bmod 6)$.

** I-2-2-1-1-6- Nous considérons le dernier cas du tableau précédent $A^m \equiv 4 (\bmod 6)$ et $B^n \equiv 1 (\bmod 6)$. Revenons à l'équation (5.35) que vérifie b :

$$b = X^2 + 3Y^2 \tag{5.40}$$
$$avec \quad X = a'; \quad Y = \alpha$$
$$et \quad 3\alpha = a' + B^n \tag{5.41}$$

Supposons qu'il existe une autre solution de (5.40) :

$$b = X^2 + 3Y^3 = u^2 + 3v^2 \Longrightarrow 2u \neq A^m,\, 3v \neq a' + B^n \tag{5.42}$$

Or $B^n = \dfrac{6\alpha - A^m}{2} = 3\alpha - a'$ et b vérifie aussi :$3b = p = A^{2m} + A^mB^n + B^{2n}$, il est impossible que u, v vérifie :

$$6v = 2u + 2B^n \tag{5.43}$$
$$3b = 4u^2 + 2uB^n + B^{2n} \tag{5.44}$$

Considérons que : $6v - 2u = 6\alpha - 2a' \Longrightarrow u = 3v - 3\alpha + a'$. D'où $b = u^2 + 3v^2 = (3v - 3\alpha + a')^2 + 3v^2$ ce qui donne :

$$2v^2 - B^nv + \alpha^2 - a'\alpha = 0$$
$$2v^2 - B^nv - \frac{(a' + B^n)(A^m - B^n)}{9} = 0 \tag{5.45}$$

La résolution de la dernière équation donne en prenant la racine positive (car $A^m > B^n$), $v_1 = \alpha$, par suite $u = a'$. Il en résulte que b dans (5.40) a une représentation unique sous la forme $X^2 + 3Y^2$ avec $X, 3Y$ copremiers. Comme b est un nombre entier impair, nous appliquons l'un des théorèmes d'Euler sur les nombres convenables "numerus idoneus" (voir [4],[5]) à savoir : *Si $n > 1$ est un entier impair qui est représenté de façon unique telle que $n = x^2 + 3y^2$ avec $x, y \in \mathbb{N}$ et x et $3y$ sont relativement* *premiers, alors n est premier*. Il en résulte que b est premier.

Nous avons aussi $p = 3b = A^{2m} + A^mB^n + B^{2n} = 4a'^2 + B^n.C^l$ soit $9\alpha^2 - a'^2 = B^n.C^l$, par suite $3\alpha, a' \in \mathbb{N}^*$ sont solutions de l'équation diophantine :

$$x^2 - y^2 = N \tag{5.46}$$

avec $N = B^nC^l > 0$. Soit $Q(N)$ le nombre des solutions de (5.46) et $\tau(N)$ le nombre de façon d'écrire les facteurs de N, alors nous annonçons le résultat suivant concernant les solutions de (5.46) (voir théorème 27.3 de [2]) :
- si $N \equiv 2 (\bmod 4)$, alors $Q(N) = 0$;
- si $N \equiv 1$ ou $N \equiv 3 (\bmod 4)$, alors $Q(N) = [\tau(N)/2]$;
- si $N \equiv 0 (\bmod 4)$, alors $Q(N) = [\tau(N/4)/2]$.

Rappelons que $A^m \equiv 0 (\bmod 4)$. Concernant B^n, pour $B^n \equiv 0 (\bmod 4)$ ou $B^n \equiv 2 (\bmod 4)$, nous trouvons que $2|B^n \Longrightarrow 2|\alpha \Longrightarrow 2|b$, par suite la contradiction avec a, b copremiers. Il reste le cas $B^n \equiv 3 (\bmod 4) \Longrightarrow C^l \equiv 3 (\bmod 4) \Longrightarrow N = B^nC^l \equiv 1 (\bmod 4) \Longrightarrow Q(N) = [\tau(N)/2] > 1$. Or $Q(N) = 1$, puisque les inconnues de (5.46) sont aussi les inconnues de (5.40) et nous avons une unique solution des deux équations diophantines, d'où la contradiction.

Il en résulte que la condition $3|(b - a)$ est contradictoire.

L'étude du cas 5.8 est donc achevée.

5.9 Cas $3|p$ et $b|4p$:

Les cas suivants ont été déjà étudiés :
* $3|p$, $b = 2 \Longrightarrow b|4p$: cas 5.1
* $3|p$, $b = 4 \Longrightarrow b|4p$: cas 5.2
* $3|p \Longrightarrow p = 3p'$, $b|p' \Longrightarrow p' = bp$", $p" \neq 1$: cas 5.3
* $3|p$, $b = 3 \Longrightarrow b|4p$: cas 5.4
* $3|p \Longrightarrow p = 3p'$, $b = p' \Longrightarrow b|4p$: cas 5.8

** J-1- Cas particulier : $b = 12$. En effet $3|p \Longrightarrow p = 3p'$ et $4p = 12p'$. En prenant $b = 12$, nous avons $b|4p$. Or $b < 4a < 3b$, ce qui donne $12 < 4a < 36 \Longrightarrow 3 < a < 9$. Comme $2|b$ et $3|b$, les valeurs possibles de a sont 5 et 7.

** J-1-1- $a = 5$ et $b = 12 \Longrightarrow 4p = 12p' = bp'$. Or $A^{2m} = \dfrac{4p}{3}.\dfrac{a}{b} = \dfrac{5bp'}{3b} = \dfrac{5p'}{3} \Longrightarrow 3|p' \Longrightarrow p' = 3p"$ avec $p" \in \mathbb{N}^*$, alors $p = 9p"$. Nous avons :

$$A^{2m} = 5p" \tag{5.47}$$

$$B^nC^l = \frac{4p}{3}\left(3 - 4cos^2\frac{\theta}{3}\right) = 4p" \tag{5.48}$$

Si $p"$ est premier : c'est impossible. Nous supposons que $p"$ est non premier, il s'écrit $p" = \omega^s p_1, s \geq 1$, $s \nmid p_1$. L'équation (5.47) devient $A^{2m} = 5\omega^s p_1 \Longrightarrow \omega|A^{2m} \Longrightarrow \omega|A$. L'équation (5.48) donne $B^nC^l = 4\omega^s p_1 \Longrightarrow \omega|B^n$ ou $\omega|C^l$. Si $\omega|B^n \Longrightarrow \omega|B$. Comme $C^l = A^m + B^n$, par suite

$\omega|C^l \Longrightarrow \omega|C$. a, b sont copremiers, par suite, la conjecture (1.1) est vérifiée.

De même, si $\omega|C^l \Longrightarrow \omega|B$, et la conjecture (1.1) est vérifiée.

** J-1-2- $a = 7$ et $b = 12 \Longrightarrow 4p = 12p' = bp'$. Or $A^{2m} = \dfrac{4p}{3}.\dfrac{a}{b} = \dfrac{12p'}{3}.\dfrac{7}{12} = \dfrac{7p'}{3} \Longrightarrow 3|p' \Longrightarrow p = 9p$". Nous avons :

$$A^{2m} = 7p" \tag{5.49}$$

$$B^nC^l = \frac{4p}{3}\left(3 - 4cos^2\frac{\theta}{3}\right) = 8p" \tag{5.50}$$

En utilisant la même méthode utilisée en J-1-1- ci-dessus, nous obtenons que la conjecture (1.1) est vérifiée.

Passons maintenant au cas général. Comme $3|p \Rightarrow p = 3p'$ et $b|4p \Rightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N}^*$ et $4p = 12p' = k_1 b$.

** J-2- $k_1 = 1$: Si $k_1 = 1$ donc $b = 12p'$, ($p' \neq 1$ sinon $p = 3 \ll A^{2m} + B^{2n} + A^mB^n$). Mais $A^{2m} = \dfrac{4p}{3}.cos^2\dfrac{\theta}{3} = \dfrac{12p'}{3}\dfrac{a}{b} = \dfrac{4p'.a}{12p'} = \dfrac{a}{3} \Rightarrow 3|a$ car A^{2m} est un entier, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** J-3- $k_1 = 3$: Si $k_1 = 3$, d'où $b = 4p'$ et $A^{2m} = \dfrac{4p}{3}.cos^2\dfrac{\theta}{3} = \dfrac{k_1.a}{3} = a = (A^m)^2 = a'^2 \Longrightarrow A^m = a'$. Le calcul de A^mB^n donne $A^mB^n = \dfrac{p\sqrt{3}}{3}sin\dfrac{2\theta}{3} - \dfrac{a}{2}$, soit :

$$A^{2m} + 2A^mB^n = \frac{2p\sqrt{3}}{3}sin\frac{2\theta}{3} = 2p'\sqrt{3}sin\frac{2\theta}{3} \tag{5.51}$$

Le membre à gauche de (5.51) est un entier et p' aussi, alors $2\sqrt{3}sin\dfrac{2\theta}{3}$ peut être écrit sous la forme :

$$2\sqrt{3}sin\frac{2\theta}{3} = \frac{k_2}{k_3} \tag{5.52}$$

où k_2, k_3 sont deux entiers copremiers et $k_3|p' \Longrightarrow p' = k_3.k_4$.

** J-3-1- $k_4 \neq 1$: Nous supposons $k_4 \neq 1$, alors :

$$A^{2m} + 2A^mB^n = k_2.k_4 \tag{5.53}$$

Soit μ un entier premier tel que $\mu|k_4$. Alors $\mu|A^m(A^m + 2B^n) \Longrightarrow \mu|A^m$ ou $\mu|(A^m + 2B^n)$.

** J-3-1-1- $\mu|A^m$: Si $\mu|A^m \Longrightarrow \mu|A^{2m} \Longrightarrow \mu|a$. Comme $\mu|k_4 \Longrightarrow \mu|p' \Rightarrow \mu|(4p' = b)$. Or a, b sont copremiers d'où la contradiction.

** J-3-1-2- $\mu|(A^m + 2B^n)$: Si $\mu|(A^m + 2B^n) \Longrightarrow \mu \nmid A^m$ et $\mu \nmid 2B^n$ alors $\mu \neq 2$ et $\mu \nmid B^n$. $\mu|(A^m + 2B^n)$, nous pouvons écrire $A^m + 2B^n = \mu.t'$. Il s'ensuit :

$$A^m + B^n = \mu t' - B^n \Longrightarrow A^{2m} + B^{2n} + 2A^mB^n = \mu^2t'^2 - 2t'\mu B^n + B^{2n}$$

Utilisant l'expression de p, nous obtenons $p = t'^2\mu^2 - 2t'B^n\mu + B^n(B^n - A^m)$. Comme $p = 3p'$ et $\mu|p' \Rightarrow \mu|(3p') \Rightarrow \mu|p$, nous pouvons écrire : $\exists \mu'$ et $p = \mu\mu'$, alors nous arrivons à :

$$\mu'\mu = \mu(\mu t'^2 - 2t'B^n) + B^n(B^n - A^m)$$

et $\mu|B^n(B^n - A^m) \Longrightarrow \mu|B^n$ ou $\mu|(B^n - A^m)$.

** J-3-1-2-1- $\mu|B^n$: Si $\mu|B^n \Longrightarrow \mu|B$ ce qui est en contradiction avec J-3-1-2-.

** J-3-1-2-2- $\mu|(B^n - A^m)$: Si $\mu|(B^n - A^m)$ et utilisant $\mu|(A^m + 2B^n)$, nous obtenons :

$$\mu|3B^n \Longrightarrow \begin{cases} \mu|B^n \\ ou \\ \mu = 3 \end{cases} \tag{5.54}$$

** J-3-1-2-2-1- $\mu|B^n$: Si $\mu|B^n \Longrightarrow \mu|B$ ce qui est en contradiction avec J-3-1-2-.

** J-3-1-2-2-2- $\mu = 3$: Si $\mu = 3 \Longrightarrow 3|k_4 \Longrightarrow k_4 = 3k'_4$, et nous avons $p' = k_3k_4 = 3k_3k'_4$, il s'ensuit $p = 3p' = 9k_3k'_4$, alors $9|p$, mais $p = (A^m - B^n)^2 + 3A^mB^n$, il en résulte :

$$9k_3k'_4 - 3A^mB^n = (A^m - B^n)^2$$

que nous écrivons : $3(3k_3k'_4 - A^mB^n) = (A^m - B^n)^2$, d'où : $3|(3k_3k'_4 - A^mB^n) \Longrightarrow 3|A^mB^n \Longrightarrow 3|A^m$ ou $3|B^n$.

** J-3-1-2-2-2-1- $3|A^m$: Si $3|A^m \Longrightarrow 3|A^{2m} \Rightarrow 3|a$, mais $3|p' \Rightarrow 3|(4p')$ soit $3|b$ d'où la contradiction avec a, b copremiers. Alors $3 \nmid A$.

** J-3-1-2-2-2-2- $3|B^n$: Si $3|B^n$ or $A^m = \mu t' - 2B^n = 3t' - 2B^n \Longrightarrow 3|A^m$, ce qui est contradictoire. Alors l'hypothèse $k_4 \neq 1$ est impossible.

** J-3-2- $k_4 = 1$: Maintenant, nous supposons que $k_4 = 1 \Longrightarrow p' = k_3k_4 = k_3$. Nous avons alors :

$$2\sqrt{3}sin\frac{2\theta}{3} = \frac{k_2}{p'} \tag{5.55}$$

avec k_2, p' copremiers, nous écrivons (5.55) comme :

$$4\sqrt{3}sin\frac{\theta}{3}cos\frac{\theta}{3} = \frac{k_2}{p'}$$

Prenons le carré des deux membres et en remplaçant $cos^2\frac{\theta}{3}$ par $\frac{a}{b}$ et $b = 4p'$, nous obtenons :

$$3.a(b - a) = k_2^2 \tag{5.56}$$

Comme $A^{2m} = a = a'^2$, ce qui implique que :

$$3|(b - a), \quad et \quad b - a = b - a'^2 = 3\alpha^2$$

Comme $k_2 = A^m(A^m+2B^n)$ d'après l'équation (5.53) et que $3|k_2 \Longrightarrow 3|A^m(A^m+2B^n) \Longrightarrow 3|A^m$ ou $3|(A^m+2B^n)$.

** J-3-2-1- $3|A^m$: Si $3|A^m \Longrightarrow 3|A^{2m} \Longrightarrow 3|a$, mais $3|(b-a) \Longrightarrow 3|b$ d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** J-3-2-2- $3|(A^m+2B^n) \Longrightarrow 3 \nmid A^m$ et $3 \nmid B^n$. Comme d'une part $k_2^2 = 9a\alpha^2 = 9a'^2\alpha^2 \Longrightarrow k_2 = 3a'\alpha = A^m(A^m+2B^n)$, par suite :

$$3\alpha = A^m + 2B^n \tag{5.57}$$

Comme b s'écrit sous la forme $b = a'^2 + 3\alpha^2$, donc le couple (a', α) est une solution de l'équation diophantine :

$$x^2 + 3y^2 = b \tag{5.58}$$

Comme $b = 4p'$, par suite :

** J-3-2-2-1- Si x, y sont pairs, d'où $2|a' \Longrightarrow 2|a$, il en résulte la contradiction avec a, b copremiers.

** J-3-2-2-2- Si x, y sont impairs, soit a', α impairs, c'est-à-dire $A^m = a' \equiv 1 (\mod 4)$ ou $A^m \equiv 3 (\mod 4)$. Si u, v vérifient (5.58), soit $b = u^2 + 3v^2$, avec $u \neq a'$ et $v \neq \alpha$, alors u, v ne vérifie pas (5.57), soit $3v \neq u + 2B^n$, sinon $u = 3v - 2B^n \Longrightarrow b = (3v-2B^n)^2 + 3v^2 = a'^2 + 3\alpha$, la résolution de l'équation du second degré obtenue en v donne la racine positive $v_1 = \alpha$, par suite $u = 3\alpha - 2B^n = a'$, d'où l'unicité de l'écriture de b représentée par (5.58).

** J-3-2-2-2-1- Nous supposons $A^m \equiv 1 (\mod 4)$ et $B^n \equiv 0 (\mod 4)$, d'où B^n est pair et $B^n = 2B'$. L'expression de p devient :

$$p = a'^2 + 2a'B' + 4B'^2 = (a'+B')^2 + 3B'^2 = 3p' \Longrightarrow 3|(a'+B') \Longrightarrow a' + B' = 3B"$$
$$p' = B'^2 + 3B"^2 \Longrightarrow b = 4p' = (2B')^2 + 3(2B")^2 = a'^2 + 3\alpha^2 \tag{5.59}$$

Soit $2B' = B^n = a' = A^m$, d'où la contradiction.

** J-3-2-2-2-2- Nous supposons $A^m \equiv 1 (\mod 4)$ et $B^n \equiv 1 (\mod 4)$, d'où C^l est pair et $C^l = 2C'$. L'expression de p devient :

$$p = C^{2l} - C^l B^n + B^{2n} = 4C'^2 - 2C'B^n + B^{2n} = (C' - B^n)^2 + 3C'^2 = 3p'$$
$$\Longrightarrow 3|(C' - B^n) \Longrightarrow C' - B^n = 3C"$$
$$p' = C'^2 + 3C"^2 \Longrightarrow b = 4p' = (2C')^2 + 3(2C")^2 = a'^2 + 3\alpha^2 \tag{5.60}$$

Soit $2C' = C^l = a' = A^m$, d'où la contradiction.

** J-3-2-2-2-3- Nous supposons $A^m \equiv 1 (\mod 4)$ et $B^n \equiv 2 (\mod 4)$, d'où B^n est pair, voir J-3-2-2-2-1-.

** J-3-2-2-2-4- Nous supposons $A^m \equiv 1 (\mod 4)$ et $B^n \equiv 3 (\mod 4)$, d'où C^l est pair, voir J-3-2-2-2-2-.

** J-3-2-2-2-5- Nous supposons $A^m \equiv 3 (\bmod 4)$ et $B^n \equiv 0 (\bmod 4)$, d'où B^n est pair, voir J-3-2-2-2-1-.

** J-3-2-2-2-6- Nous supposons $A^m \equiv 3 (\bmod 4)$ et $B^n \equiv 1 (\bmod 4)$, d'où C^l est pair, voir J-3-2-2-2-2-.

** J-3-2-2-2-7- Nous supposons $A^m \equiv 3 (\bmod 4)$ et $B^n \equiv 2 (\bmod 4)$, d'où B^n est pair, voir J-3-2-2-2-1-.

** J-3-2-2-2-8- Nous supposons $A^m \equiv 3 (\bmod 4)$ et $B^n \equiv 3 (\bmod 4)$, d'où C^l est pair, voir J-3-2-2-2-2-.

Nous avons achevé donc l'étude de J-3-2-2- qui a mené à des contradictions.

** J-4- Nous supposons $k_1 \neq 3$ et $3|k_1 \Longrightarrow k_1 = 3k'_1$ avec $k'_1 \neq 1$, alors $4p = 12p' = k_1 b = 3k'_1 b \Rightarrow 4p' = k'_1 b$. A^{2m} s'écrit $A^{2m} = \dfrac{4p}{3} cos^2 \dfrac{\theta}{3} = \dfrac{3k'_1 b}{3} \dfrac{a}{b} = k'_1 a$ et $B^n C^l = \dfrac{p}{3} \left(3 - 4cos^2 \dfrac{\theta}{3} \right) = \dfrac{k'_1}{4} (3b - 4a)$. Comme $B^n C^l$ est un entier, on doit avoir $4|(3b-4a)$ ou $4|k'_1$ ou $[2|k'_1$ et $2|(3b-4a)]$.

** J-4-1- Nous supposons que $4|(3b-4a)$.

** J-4-1-1- On suppose que $3b - 4a = 4 \Longrightarrow 4|b \Longrightarrow 2|b$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} A^{2m} &= k'_1 a \\ B^n C^l &= k'_1 \end{aligned}$$

** J-4-1-1-1- Si k'_1 est premier, de $B^n C^l = k'_1$, c'est impossible.

** J-4-1-1-2- Nous supposons que $k'_1 > 1$ est non premier. Soit ω un nombre premier tel que $\omega | k'_1$.

** J-4-1-1-2-1- Nous supposons que $k'_1 = \omega^s$, avec $s \geq 6$. Nous avons donc :

$$A^{2m} = \omega^s . a \tag{5.61}$$
$$B^n C^l = \omega^s \tag{5.62}$$

** J-4-1-1-2-1-1- Supposons $\omega = 2$, si a, k'_1 sont non copremiers alors $2|a$, comme $2|b$, c'est la contradiction avec a, b copremiers.

** J-4-1-1-2-1-2- Supposons $\omega = 2$ et a, k'_1 sont copremiers donc $2 \nmid a$. De (5.62), nous en déduisons que $B = C = 2$ et $n + l = s$, et $A^{2m} = 2^s . a$, mais $A^m = 2^l - 2^n \Longrightarrow A^{2m} = (2^l - 2^n)^2 = 2^{2l} + 2^{2n} - 2(2^{l+n}) = 2^{2l} + 2^{2n} - 2 \times 2^s = 2^s . a \Longrightarrow 2^{2l} + 2^{2n} = 2^s (a + 2)$. Si $l = n$, nous obtenons $a = 0$ d'où la contradiction. Si $l \neq n$, comme $A^m = 2^l - 2^n > 0 \Longrightarrow n < l \Longrightarrow 2n < s$, d'où $2^{2n}(1 + 2^{2l-2n} - 2^{s+1-2n}) = 2^n 2^l . a$. Posons $l = n + n_1 \Longrightarrow 1 + 2^{2l-2n} - 2^{s+1-2n} = 2^{n_1} . a$, or le terme à gauche est impair et le membre à droite est pair d'où la contradiction. Donc le cas $\omega = 2$ est impossible.

** J-4-1-1-2-1-3- Supposons maintenant que $k'_1 = \omega^s$ avec $\omega \neq 2$:

** J-4-1-1-2-1-3-1- Supposons que a, k'_1 sont non copremiers, alors $\omega | a \Longrightarrow a = \omega^t.a_1$ et $t \nmid a_1$. Nous avons donc :

$$A^{2m} = \omega^{s+t}.a_1 \tag{5.63}$$
$$B^nC^l = \omega^s \tag{5.64}$$

De (5.72), nous déduisons que $B^n = \omega^n$, $C^n = \omega^l$ et $s = n + l$. Et $A^m = \omega^l - \omega^n > 0 \Longrightarrow l > n$. De plus, $A^{2m} = \omega^{s+t}.a_1 = (\omega^l - \omega^n)^2 = \omega^{2l} + \omega^{2n} - 2 \times \omega^s$. Comme $\omega \neq 2 \Longrightarrow \omega$ est impair, par suite $A^{2m} = \omega^{s+t}.a_1 = (\omega^l - \omega^n)^2$ est pair, donc $2|a_1 \Longrightarrow 2|a$ ce qui est en contradiction avec a, b copremiers, alors ce cas est impossible.

** J-4-1-1-2-1-3-2- Supposons que a, k'_1 sont copremiers, avec :

$$A^{2m} = \omega^s.a \tag{5.65}$$
$$B^nC^l = \omega^s \tag{5.66}$$

De (5.74), nous déduisons que $B^n = \omega^n$ et $C^l = \omega^l$ et $s = n + l$. Comme $\omega \neq 2 \Longrightarrow \omega$ est impair et $A^{2m} = \omega^s.a = (\omega^l - \omega^n)^2$ est pair, d'où $2|a$. Par suite la contradiction avec a, b copremiers, donc ce cas est impossible.

** J-4-1-1-2-2- Nous supposons que $k'_1 = \omega^s.k_2$, avec $s \geq 6$, $\omega \nmid k_2$. Nous avons donc :

$$A^{2m} = \omega^s.k_2.a \tag{5.67}$$
$$B^nC^l = \omega^s.k_2 \tag{5.68}$$

** J-4-1-1-2-2-1- Si k_2 est premier, de la dernière équation ci-dessus, $\omega = k_2$, c'est en contradiction avec $\omega \nmid k_2$. Donc ce cas est impossible.

** J-4-1-1-2-2-2- Nous supposons que $k'_1 = \omega^s.k_2$, avec $s \geq 6$, $\omega \nmid k_2$ et k_2 non premier. Nous avons donc :

$$A^{2m} = \omega^s.k_2.a \tag{5.69}$$
$$B^nC^l = \omega^s.k_2 \tag{5.70}$$

** J-4-1-1-2-2-2-1- Nous supposons ω, a copremiers

** J-4-1-1-2-2-2-1-1- Supposons $\omega = 2$, si a, k_2 sont non copremiers alors $2|a$, comme $2|b$, c'est la contradiction avec a, b copremiers. Si a, k_2 sont copremiers donc $2 \nmid a$. De (5.62), nous en déduisons que $B = C = 2$ et $n + l = s$, et $A^{2m} = 2^s.a$, mais $A^m = 2^l - 2^n \Longrightarrow A^{2m} = (2^l - 2^n)^2 = 2^{2l} + 2^{2n} - 2(2^{l+n}) = 2^{2l} + 2^{2n} - 2 \times 2^s = 2^s.a \Longrightarrow 2^{2l} + 2^{2n} = 2^s(a+2)$. Si $l = n$, nous obtenons $a = 0$ d'où la contradiction. Si $l \neq n$, comme $A^m = 2^l - 2^n > 0 \Longrightarrow n < l \Longrightarrow 2n < s$, d'où $2^{2n}(1 + 2^{2l-2n} - 2^{s+1-2n}) = 2^n2^l.a$. Posons $l = n + n_1 \Longrightarrow 1 + 2^{2l-2n} - 2^{s+1-2n} = 2^{n_1}.a$, or le terme à gauche est impair et le membre à droite est pair d'où la contradiction. Donc le cas $\omega = 2$ est impossible.

** J-4-1-1-2-2-2-1-2- Supposons maintenant que $\omega \neq 2$.

** J-4-1-1-2-2-2-1-2-1- Supposons que a, k_1' sont non copremiers, alors $\omega|a \Longrightarrow a = \omega^t.a_1$ et $t \nmid a_1$. Nous avons donc :

$$A^{2m} = \omega^{s+t}.a_1 \tag{5.71}$$
$$B^nC^l = \omega^s \tag{5.72}$$

De (5.72), nous déduisons que $B^n = \omega^n$, $C^n = \omega^l$ et $s = n + l$. Et $A^m = \omega^l - \omega^n > 0 \Longrightarrow l > n$. De plus, $A^{2m} = \omega^{s+t}.a_1 = (\omega^l - \omega^n)^2 = \omega^{2l} + \omega^{2n} - 2 \times \omega^s$. Comme $\omega \neq 2 \Longrightarrow \omega$ est impair, par suite $A^{2m} = \omega^{s+t}.a_1 = (\omega^l - \omega^n)^2$ est pair, donc $2|a_1 \Longrightarrow 2|a$ ce qui est en contradiction avec a, b copremiers, ce cas est impossible.

** J-4-1-1-2-2-2-1-2-2- Supposons que a, k_1' non copremiers, avec :

$$A^{2m} = \omega^s.a \tag{5.73}$$
$$B^nC^l = \omega^s \tag{5.74}$$

De (5.74), nous déduisons que $B^n = \omega^n$ et$C^l = \omega^l$ et $s = n + l$. Comme $\omega \neq 2 \Longrightarrow \omega$ est impair et $A^{2m} = \omega^s.a = (\omega^l - \omega^n)^2$ est pair, d'où $2|a$. Par suite la contradiction avec a, b copremiers, donc ce cas est impossible.

** J-4-1-2- $3b - 4a \neq 4$ et $4|(3b - 4a) \Longrightarrow 3b - 4a = 4^s\Omega$ avec $s \geq 1$ et $4 \nmid \Omega$. Nous avons :

$$A^{2m} = k_1'a \tag{5.75}$$
$$B^nC^l = 4^{s-1}k_1'\Omega \tag{5.76}$$

** J-4-1-2-1- Supposons $k_1' = 2$, de (5.75) nous déduisons que $2|a$. Comme $4|(3b - 4a) \Longrightarrow 2|b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers. Donc ce cas est impossible.

** J-4-1-2-2- Supposons que $k_1' = 3$, de (5.75) nous déduisons que $3^3|A^{2m}$. De (5.76), nous déduisons que $3^3|B^n$ ou $3^3|C^l$. Dans les deux cas précédents, nous aurons $3^3|p$. Mais $4p = 3k_1'b = 9b$, or $27|p$ ce qui donne $3|b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers. Donc ce cas est impossible.

** J-4-1-2-3- Supposons que k_1' est un nombre premier ≥ 5 :

** J-4-1-2-3-1- Supposons k_1' et a copremiers. L'équation (5.75) donne $(A^m)^2 = k_1'.a$ ce qui est impossible avec $k_1' \nmid a$. Donc ce cas est impossible.

** J-4-1-2-3-2- Supposons k_1' et a sont non copremiers, soit $k_1'|a \Longrightarrow a = k_1'^{\alpha}a_1$ avec $\alpha \geq 1$ et $k_1' \nmid a_1$. L'équation (5.75) s'écrit :

$$A^{2m} = k_1'a = k_1'^{\alpha+1}a_1 \tag{5.77}$$

La dernière équation donne $k_1'|A^{2m} \Longrightarrow k_1'|A \Longrightarrow A = k_1'^i.A_1$, avec $k_1' \nmid A_1$. Si $2i.m \neq (\alpha + 1)$ c'est impossible. Nous supposons que $2i.m = \alpha + 1$, par suite $k_1'|A^m$. Revenons à l'équation (5.76). Si k_1' et Ω sont copremiers, c'est impossible. Nous supposons donc que k_1' et Ω ne sont pas copremiers c'est-à-dire que $k_1'|\Omega$ et que l'exposant de k_1' dans Ω est tel que l'équation (5.76) soit satisfaite. Nous déduisons facilement que $k_1'|B^n$. Par suite $k_1'^2|(p = A^{2m} + B^{2n} + A^mB^n)$, mais $4p = 3k_1'b \Longrightarrow k_1'|b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** J-4-1-2-4- Supposons que $k'_1 \geq 4$ non premier.

** J-4-1-2-4-1- Supposons que $k'_1 = 4$. Nous avons alors : $A^{2m} = 4a$ et $B^nC^l = 3b - 4a = 3p' - 4a$. Ce cas a été traité dans le paragraphe 5.8 cas ** I-2-.

** J-4-1-2-4-2- Nous supposons que $k'_1 > 4$ non premier.

** J-4-1-2-4-2-1- Nous supposons que a, k'_1 sont copremiers. De l'expression $A^{2m} = k'_1.a$ nous déduisons que $a = a_1^2$ et $k'_1 = k"_1^2$. Ce qui donne :

$$A^m = a_1.k"_1 \tag{5.78}$$
$$B^nC^l = 4^{s-1}k"_1^2.\Omega \tag{5.79}$$

Soit ω un nombre premier tel que $\omega|k"_1$, soit $k"_1 = \omega^t.k"_2$ avec $\omega \nmid k"_2$. Les deux équations précédentes deviennent :

$$A^m = a_1.\omega^t.k"_2 \tag{5.80}$$
$$B^nC^l = 4^{s-1}\omega^{2t}.k"_2^2.\Omega \tag{5.81}$$

De (5.80) $\omega|A^m \Longrightarrow \omega|A \Longrightarrow A = \omega^i.A_1$ avec $\omega \nmid A_1$ et $im = t$. De (5.81), nous avons $\omega|B^nC^l \Longrightarrow \omega|B^n$ ou $\omega|C^l$.

** J-4-1-2-4-2-1-1- $\omega|B^n \Longrightarrow \omega|B \Longrightarrow B = \omega^j.B_1$, avec $\omega \nmid B_1$. De (5.80), nous avons $B_1^nC^l = \omega^{2t-j.n}4^{s-1}.k"_2^2.\Omega$. Si $\omega = 2$ et $2 \nmid \Omega$, nous avons $B_1^nC^l = 2^{2t+2s-j.n-2}k"_2^2$:

- Si $2t + 2s - jn - 2 \leq 0$ alors $2 \nmid C^l$ ce qui est en contradiction avec $C^l = \omega^{im}A_1^m + \omega^{jn}B_1^n$.
- Si $2t + 2s - jn - 2 \geq 1 \Longrightarrow 2|C^l \Longrightarrow 2|C$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.

(Mêmes résultats si $2|\Omega \Longrightarrow \Omega = 2^\mu.\Omega_1$, on remplace $2t+2s-jn-2$ par $2t+2s+\mu-jn-2$). Si $\omega \neq 2$, nous avons $B_1^nC^l = \omega^{2t-jn}4^{s-1}k"_2^2.\Omega$.

là aussi, si $\omega \nmid \Omega$:
-Si $2t - jn \leq 0 \Longrightarrow \omega \nmid C^l$ ce qui est en contradiction avec $C^l = \omega^{im}A_1^m + \omega^{jn}B_1^n$.
-Si $2t - jn \geq 1 \Longrightarrow \omega|C^l$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.

Mêmes résultats si $2|\Omega \Longrightarrow \Omega = 2^\mu.\Omega_1$, on remplace $2t - jn$ par $2t + \mu - jn$.

** J-4-1-2-4-2-1-2- $\omega|C^l \Longrightarrow \omega|C \Longrightarrow C = \omega^h.C_1$, avec $\omega \nmid C_1$. En utilisant les mêmes méthodes en J-4-1-2-4-2-1-1 ci-dessus, nous obtenons les mêmes résultats suivants les cas.

** J-4-1-2-4-2-2- Nous supposons que a, k'_1 sont non copremiers. Soit ω un nombre premier tel que $\omega|a$ et $\omega|k'_1$. Nous écrivons :

$$a = \omega^\alpha.a_1 \tag{5.82}$$
$$k'_1 = \omega^\mu.k"_1 \tag{5.83}$$

avec $a_1, k"_1$ copremiers. L'expression de A^{2m} devient $A^{2m} = \omega^{\alpha+\mu}.a_1.k"_1$. Le terme B^nC^l devient :

$$B^nC^l = 4^{s-1}.\omega^\mu.k"_1.\Omega \tag{5.84}$$

** J-4-1-2-4-2-2-1- Si $\omega = 2 \Longrightarrow 2|a$, mais $2|b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers. Ce cas est donc impossible.

** J-4-1-2-4-2-2-2- Si $\omega \geq 3$. Nous avons $\omega|a$. Si $\omega|b$ c'est la contradiction avec a, b copremiers. Nous supposons que $\omega \nmid b$. De l'expression de A^{2m}, nous obtenons $\omega|A^{2m} \Longrightarrow \omega|A \Longrightarrow A = \omega^i.A_1$ avec $\omega \nmid A_1$, $i \geq 1$ et $2i.m = \alpha + \mu$. De (5.84), nous déduisons que $\omega|B^n$ ou $\omega|C^l$.

** J-4-1-2-4-2-2-2-1- Nous supposons que $\omega|B^n \Longrightarrow \omega|B \Longrightarrow B = \omega^j B_1$ avec $\omega \nmid B_1$ et $j \geq 1$. Par suite, $B_1^n C^l = 4^{s-1}\omega^{\mu-jn}.k"_1.\Omega$:

* $\omega \nmid \Omega$:

- Si $\mu - jn \geq 1$ nous avons $\omega|C^l \Longrightarrow \omega|C$, pas de contradiction avec $C^l = \omega^{im}A_1^m + \omega^{jn}B_1^n$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.

- Si $\mu - jn \leq 0$ avec $\omega \nmid \Omega$, alors $\omega \nmid C^l$ et c'est la contradiction avec $C^l = \omega^{im}A_1^m + \omega^{jn}B_1^n$. Donc ce cas est impossible.

* $\omega|\Omega$: soit $\Omega = \omega^\beta.\Omega_1$ avec $\beta \geq 1$ et $\omega \nmid \Omega_1$. Comme $3b - 4a = 4^s.\Omega = 4^s.\omega^\beta.\Omega_1 \Longrightarrow 3b = 4a + 4^s.\omega^\beta.\Omega_1 = 4\omega^\alpha.a_1 + 4^s.\omega^\beta.\Omega_1 \Longrightarrow 3b = 4\omega(\omega^{\alpha-1}.a_1 + 4^{s-1}.\omega^{\beta-1}.\Omega_1)$. Si $\omega = 3$ et $\beta = 1$, nous obtenons $b = 4(3^{\alpha-1}a_1 + 4^{s-1}\Omega_1)$ et $B_1^n C^l = 4^{s-1}3^{\mu+1-jn}.k"_1\Omega_1$.

- Si $\mu - jn + 1 \geq 1$, alors $3|C^l$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.

- Si $\mu - jn + 1 \leq 0$, alors $3 \nmid C^l$ et c'est la contradiction avec $C^l = 3^{im}A_1^m + 3^{jn}B_1^n$.

Maintenant, si $\beta \geq 2$ et $\alpha = im \geq 3$, nous aurons $3b = 4\omega^2(\omega^{\alpha-2}a_1 + 4^{s-1}\omega^{\beta-2}\Omega_1)$. Si $\omega = 3$ ou non, alors $\omega|b$, mais $\omega|a$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** J-4-1-2-4-2-2-2-2- Nous supposons que $\omega|C^l \Longrightarrow \omega|C \Longrightarrow C = \omega^h C_1$ avec $\omega \nmid C_1$ et $h \geq 1$. Par suite, $B^n C_1^l = 4^{s-1}\omega^{\mu-hl}.k"_1.\Omega$. En utilisant la méthodologie ci-dessus, nous obtenons les résultats analogues.

** J-4-2- Nous supposons que $4|k_1'$.

** J-4-2-1- $k_1' = 4 \Longrightarrow 4p = 3k_1'b = 12b \Longrightarrow p = 3b = 3p'$, c'est le cas déjà étudié au I-2-paragraphe 5.8.

** J-4-2-2- $k_1' > 4$ avec $4|k_1' \Longrightarrow k_1' = 4^s k"_1$ et $s \geq 1$ $4 \nmid k"_1$. Nous avons donc :

$$A^{2m} = 4^s k"_1 a = 2^{2s}k"_1 a \tag{5.85}$$

$$B^n C^l = 4^{s-1}k"_1(3b - 4a) = 2^{2s-2}k"_1(3b - 4a) \tag{5.86}$$

** J-4-2-2-1- Nous supposons $s = 1$ et $k_1' = 4k"_1$ avec $k"_1 > 1$, soit $p = 3p'$ et $p' = k"_1 b$ c'est le cas 5.3 déjà étudié.

** J-4-2-2-2- Nous supposons $s > 1$, par suite $k_1' = 4^s k"_1 \Longrightarrow 4p = 3 \times 4^s k"_1 b$ et nous avons :

$$A^{2m} = 4^s k"_1 a \tag{5.87}$$

$$B^n C^l = 4^{s-1}k"_1(3b - 4a) \tag{5.88}$$

** J-4-2-2-2-1- Nous supposons que $2 \nmid (k"_1.a) \Longrightarrow 2 \nmid k"_1$ et $2 \nmid a$. Comme $(A^m)^2 = (2^s)^2.(k"_1.a)$, posons $d^2 = k"_1.a$, par suite $A^m = 2^s.d \Longrightarrow 2|A^m \Longrightarrow 2|A \Longrightarrow A = 2^iA_1$ avec $2 \nmid A_1$ et $i \geq 1$. D'où : $2^{im}A_1^m = 2^s.d \Longrightarrow s = im$. De l'équation (5.88), nous avons $2|(B^nC^l) \Longrightarrow 2|B^n$ ou $2|C^l$.

** J-4-2-2-2-1-1- Nous supposons que $2|B^n \Longrightarrow 2|B \Longrightarrow B = 2^j.B_1$, avec $j \geq 1$ et $2 \nmid B_1$. L'équation (5.88) devient :

$$B_1^nC^l = 2^{2s-jn-2}k"_1(3b-4a) = 2^{2im-jn-2}k"_1(3b-4a) \tag{5.89}$$

* Nous supposons que $2 \nmid (3b-4a)$:
- Si $2im-jn-2 \geq 1$, alors $2|C^l$, pas de contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.
- Si $2im-jn-2 \leq 0$, alors $2 \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n$.

* Nous supposons que $2^\mu|(3b-4a)$, $\mu \geq 1$ et que a, b restent copremiers :
- Si $2im+\mu-jn-2 \geq 1$, alors $2|C^l$, pas de contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.
- Si $2im+\mu-jn-2 \leq 0$, alors $2 \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n$.

** J-4-2-2-2-1-2- Nous supposons que $2|C^l \Longrightarrow 2|C \Longrightarrow C = 2^h.C_1$, avec $h \geq 1$ et $2 \nmid C_1$. De la même manière traitée ci-dessus, nous obtenons les mêmes résultats.

** J-4-2-2-2-2- Nous supposons que $2|(k"_1.a)$:

** J-4-2-2-2-2-1- Nous supposons que $k"_1$ et a sont copremiers :

** J-4-2-2-2-2-1-1- Nous supposons que $2 \nmid a$ et $2|k"_1 \Longrightarrow k"_1 = 2^{2\mu}.k"^2_2$ et $a = a_1^2$. Alors les équations (5.87-5.88) deviennent :

$$A^{2m} = 4^s.2^{2\mu}k"^2_2a_1^2 \Longrightarrow A^m = 2^{s+\mu}.k"_2.a_1 \tag{5.90}$$

$$B^nC^l = 4^{s-1}2^{2\mu}k"^2_2(3b-4a) = 2^{2s+2\mu-2}k"^2_2(3b-4a) \tag{5.91}$$

L'équation (5.90) donne $2|A^m \Longrightarrow 2|A \Longrightarrow A = 2^i.A_1$ avec $2 \nmid A_1$, $i \geq 1$ et $im = s+\mu$. De l'équation (5.91), nous avons $2|(B^nC^l) \Longrightarrow 2|B^n$ ou $2|C^l$.

** J-4-2-2-2-2-1-1-1- Nous supposons que $2|B^n \Longrightarrow 2|B \Longrightarrow B = 2^j.B_1$, $2 \nmid B_1$ et $j \geq 1$. Par suite $B_1^nC^l = 2^{2s+2\mu-jn-2}k"^2_2(3b-4a)$:

* Nous supposons que $2 \nmid (3b-4a)$:
- Si $2im+2\mu-jn-2 \geq 1$, alors $2|C^l$, pas de contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.
- Si $2im+2\mu-jn-2 \leq 0$, alors $2 \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n$.

* Nous supposons que $2^\alpha|(3b-4a)$, $\alpha \geq 1$ et que a, b restent copremiers :
- Si $2im+2\mu+\alpha-jn-2 \geq 1$, alors $2|C^l$, pas de contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.
- Si $2im+2\mu+\alpha-jn-2 \leq 0$, alors $2 \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n$.

** J-4-2-2-2-2-1-1-2- Nous supposons que $2|C^l \Longrightarrow 2|C \Longrightarrow C = 2^h.C_1$, avec $h \geq 1$ et $2 \nmid C_1$. De la même manière traitée ci-dessus, nous obtenons les mêmes résultats.

** J-4-2-2-2-2-1-2- Nous supposons que $2 \nmid k"_1$ et $2|a \Longrightarrow a = 2^{2\mu}.a_1^2$ et $k"_1 = k"^2_2$. Alors les équations (5.87-5.88) deviennent :

$$A^{2m} = 4^s.2^{2\mu}a_1^2k"^2_2 \Longrightarrow A^m = 2^{s+\mu}.a_1.k"_2. \tag{5.92}$$

$$B^nC^l = 4^{s-1}k"^2_2(3b-4a) = 2^{2s-2}k"^2_2(3b-4a) \tag{5.93}$$

L'équation (5.92) donne $2|A^m \Longrightarrow 2|A \Longrightarrow A = 2^i.A_1$ avec $2 \nmid A_1$, $i \geq 1$ et $im = s+\mu$. De l'équation (5.93), nous avons $2|(B^nC^l) \Longrightarrow 2|B^n$ ou $2|C^l$.

** J-4-2-2-2-2-1-2-1- Nous supposons que $2|B^n \Longrightarrow 2|B \Longrightarrow B = 2^j.B_1$, $2 \nmid B_1$ et $j \geq 1$. Par suite $B_1^nC^l = 2^{2s-jn-2}k"^2_2(3b-4a)$:

* Nous supposons que $2 \nmid (3b-4a) \Longrightarrow 2 \nmid b$:
- Si $2im - jn - 2 \geq 1$, alors $2|C^l$, pas de contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n$.
- Si $2im - jn - 2 \leq 0$, alors $2 \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n$.

* Nous supposons que $2^\alpha|(3b-4a)$, $\alpha \geq 1$, dans ce cas a, b sont non copremiers, c'est la contradiction.

** J-4-2-2-2-2-1-2-2- Nous supposons que $2|C^l \Longrightarrow 2|C \Longrightarrow C = 2^h.C_1$, avec $h \geq 1$ et $2 \nmid C_1$. De la même manière traitée ci-dessus, nous obtenons les mêmes résultats.

** J-4-2-2-2-2-2- Nous supposons $k"_1$ et a sont non copremiers avec $2|a$ et $2|k"_1$. Soit $a = 2^t.a_1$ et $k"_1 = 2^\mu k"_2$ et $2 \nmid a_1$ et $2 \nmid k"_2$. De (5.87), nous avons $\mu + t = 2\lambda$ et $a_1.k"_2 = \omega^2$. Les équations (5.87-5.88) deviennent :

$$A^{2m} = 4^sk"_1a = 2^{2s}.2^\mu k"_2.2^t.a_1 = 2^{2s+2\lambda}.\omega^2 \Longrightarrow A^m = 2^{s+\lambda}.\omega \tag{5.94}$$

$$B^nC^l = 4^{s-1}2^\mu k"_2(3b-4a) = 2^{2s+\mu-2}k"_2(3b-4a) \tag{5.95}$$

De (5.94) nous avons $2|A^m \Longrightarrow 2|A \Longrightarrow A = 2^iA_1$,$i \geq 1$ et $2 \nmid A_1$. De (5.95), $2s+\mu-2 \geq 1$, nous déduisons $2|(B^nC^l) \Longrightarrow 2|B^n$ ou $2|C^l$.

** J-4-2-2-2-2-2-1- Nous supposons $2|B^n \Longrightarrow 2|B \Longrightarrow B = 2^j.B_1$, $2 \nmid B_1$ et $j \geq 1$. Par suite $B_1^nC^l = 2^{2s+\mu-jn-2}k"^2(3b-4a)$:

* Nous supposons que $2 \nmid (3b-4a)$:

- Si $2s+\mu-jn-2 \geq 1$, alors $2|C^l$, pas de contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.
- Si $2s+\mu-jn-2 \leq 0$, alors $2 \nmid C^l$, d'où la contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n$.

* Nous supposons que $2^\alpha|(3b-4a)$, pour une valeur $\alpha \geq 1$. Comme $2|a$, alors $2^\alpha|(3b-4a) \Longrightarrow 2|(3b-4a) \Longrightarrow 2|(3b) \Longrightarrow 2|b$, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

** J-4-2-2-2-2-2-2- Nous supposons que $2|C^l \Longrightarrow 2|C \Longrightarrow C = 2^h.C_1$, avec $h \geq 1$ et $2 \nmid C_1$. De la même manière traitée ci-dessus, nous obtenons les mêmes résultats.

** J-4-3- $2|k'_1$ et $2|(3b-4a)$: Alors nous obtenons $2|k'_1 \Longrightarrow k'_1 = 2^t.k"_1$ avec $t \geq 1$ et $2 \nmid k"_1$. $2|(3b-4a) \Longrightarrow 3b-4a = 2^\mu.d$ avec $\mu \geq 1$ et $2 \nmid d$. Nous avons aussi $2|b$. Si $2|a$, c'est la contradition avec a, b copremiers. Nous supposons dans la suite de cette section que $2 \nmid a$. Les équations (5.87-5.88) deviennent :

$$A^{2m} = 2^t.k"_1.a = (A^m)^2 \tag{5.96}$$
$$B^nC^l = 2^{t-1}k"_1.2^{\mu-1}d = 2^{t+\mu-2}k"_1.d \tag{5.97}$$

De (5.96), nous déduisons que t est un exposant pair, soit $t = 2\lambda$. Par suite, nous posons $\omega^2 = k"_1.a$ ce qui donne $A^m = 2^\lambda.\omega \Longrightarrow 2|A^m \Longrightarrow 2|A \Longrightarrow A = 2^i.A_1$ avec $i \geq 1$ et $2 \nmid A_1$. De (5.97), nous avons $2\lambda + \mu - 2 \geq 1$, par suite $2|(B^nC^l) \Longrightarrow 2|B^n$ ou $2|C^l$:

** J-4-3-1- Nous supposons que $2|B^n \Longrightarrow 2|B \Longrightarrow B = 2^jB_1$, avec $j \geq 1$ et $2 \nmid B_1$. Il s'ensuit que $B_1^nC^l = 2^{2\lambda+\mu-jn-2}.k"_1.d$.

- Si $2\lambda + \mu - jn - 2 \geq 1$, nous avons $2|C^l \Longrightarrow 2|C$, il n'y a pas de contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n$ et la conjecture (1.1) est vérifiée.
- Si $2s+t+\mu-jn-2 \leq 0$, il s'ensuit que $2 \nmid C$, d'où la contradiction avec $C^l = 2^{im}A_1^m + 2^{jn}B_1^n$.

** J-4-3-2- Nous supposons que $2|C^l \Longrightarrow 2|C$. En utilisant la même méthode ci-dessus, nous obtenons les mêmes résultats.

$\square$

Le Principal Théorème est démontré.

6 Exemples Numériques

6.1 Example 1 :

Soit l'exemple : $6^3 + 3^3 = 3^5$ avec $A^m = 6^3$, $B^n = 3^3$ et $C^l = 3^5$. Avec les notations utilisées dans le papier, nous obtenons :

$$p = 3^6 \times 73, \quad q = 8 \times 3^{11}, \quad \bar{\Delta} = 4 \times 3^{18}(3^7 \times 4^2 - 73^3) < 0 \tag{6.1}$$
$$\rho = \frac{3^8 \times 73\sqrt{73}}{\sqrt{3}}, \quad cos\theta = -\frac{4 \times 3^3 \times \sqrt{3}}{73\sqrt{73}} \tag{6.2}$$

Comme $A^{2m} = \dfrac{4p}{3}.cos^2\dfrac{\theta}{3} \Longrightarrow cos^2\dfrac{\theta}{3} = \dfrac{3A^{2m}}{4p} = \dfrac{3 \times 2^4}{73} = \dfrac{a}{b} \Longrightarrow a = 3 \times 2^4,\ b = 73$; alors :

$$cos\frac{\theta}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{73}}, \quad p = 3^6.b \tag{6.3}$$

On vérifie facilement l'équation (6.2) utilisant (6.3). Pour cet exemple, nous pouvons utiliser les deux conditions de (3.9) comme $3|a$,$b|4p$ et $3|p$. Les cas 4.4 et 5.3 sont respectivement utilisés. Pour le cas 4.4, c'est le sous-cas B-2-2-1- qui est a été utilisé et la conjecture (1.1) est vérifiée. Concernant le cas 5.3, c'est le sous-cas G-2-2-1- qui a été appliqué et la conjecture (1.1) est vérifiée. Nous trouvons pour les deux cas que A^m, B^n et C^l de l'exemple 1 ont un facteur commun ce qui est vrai.

6.2 Exemple 2 :

Soit le deuxième exemple : $7^4 + 7^3 = 14^3$. Nous prenons $A^m = 7^4\,, B^n = 7^3$ et $C^l = 14^3$. Nous obtenons $p = 57 \times 7^6 = 3 \times 19 \times 7^6\,,\quad q = 8 \times 7^{10}\,,\quad \overline{\Delta} = 27q^2 - 4p^3 = 27 \times 4 \times 7^{18}(16 \times 49 - 19^3) = -27 \times 4 \times 7^{18} \times 6075 < 0\,,\quad \rho = 19 \times 7^9 \times \sqrt{19}\,,\quad cos\theta = -\dfrac{4 \times 7}{19\sqrt{19}}$.
Comme $A^{2m} = \dfrac{4p}{3}.cos^2\dfrac{\theta}{3} \Longrightarrow cos^2\dfrac{\theta}{3} = \dfrac{3A^{2m}}{4p} = \dfrac{7^2}{4 \times 19} = \dfrac{a}{b} \Longrightarrow a = 7^2,\ b = 4 \times 19$, alors $cos\dfrac{\theta}{3} = \dfrac{7}{2\sqrt{19}}$ et nous avons le cas $3|p$ et $b|(4p)$. Le calcul de $cos\theta$ à partir de l'expression de $cos\dfrac{\theta}{3}$ confirme la valeur ci-dessous :

$$cos\theta = cos3(\theta/3) = 4cos^3\frac{\theta}{3} - 3cos\frac{\theta}{3} = 4\left(\frac{7}{2\sqrt{19}}\right)^3 - 3\frac{7}{2\sqrt{19}} = -\frac{4 \times 7}{19\sqrt{19}}$$

Nous obtenons donc $3|p \Rightarrow p = 3p'$, $b|(4p)$ avec $b \neq 2, 4$ alors $12p' = k_1 b = 3 \times 7^6 b$. Ceci concerne le paragraphe 5.9 de la deuxième hypothèse. Comme $k_1 = 3 \times 7^6 = 3k_1'$ avec $k_1' = 7^6 \neq 1$. C'est le sous-cas J-4-1-2-4-2-2- avec la condition $4|(3b - 4a)$. Vérifions alors :

$$3b - 4a = 3 \times 4 \times 19 - 4 \times 7^2 = 32 \Longrightarrow 4|(3b - 4a) \tag{6.4}$$

avec $A^{2m} = 7^8 = 7^6 \times 7^2 = k_1'.a$ et k_1' non premier, avec a et k_1' non copremiers avec $\omega = 7 \nmid \Omega(= 2)$. Nous retrouvons bien que la conjecture (1.1) est vérifiée avec un facteur commun à savoir le nombre premier 7 un diviseur de $k_1' = 7^6$.

6.3 Exemple 3 :

Soit le troisième exemple : $19^4 + 38^3 = 57^3$. Nous prenons $A^m = 19^4$, $B^n = 38^3$ et $C^l = 57^3$. Nous obtenons $p = 19^6 \times 577\,,\quad q = 8 \times 27 \times 19^{10}\,,\quad \overline{\Delta} = 27q^2 - 4p^3 = 4 \times 19^{18}(27^3 \times 16 \times 19^2 - 577^3) < 0\,,\quad \rho = \dfrac{19^9 \times 577\sqrt{577}}{3\sqrt{3}}\,,\quad cos\theta = -\dfrac{4 \times 3^4 \times 19\sqrt{3}}{577\sqrt{577}}$. Comme $A^{2m} = \dfrac{4p}{3}.cos^2\dfrac{\theta}{3} \Longrightarrow cos^2\dfrac{\theta}{3} = \dfrac{3A^{2m}}{4p} = \dfrac{3 \times 19^2}{4 \times 577} = \dfrac{a}{b} \Longrightarrow a = 3 \times 19^2,\ b = 4 \times 577$, alors $cos\dfrac{\theta}{3} = \dfrac{19\sqrt{3}}{2\sqrt{577}}$ et nous avons le cas $3|a$ et $b|(4p)$. Le calcul de $cos\theta$ à partir de l'expression de $cos\dfrac{\theta}{3}$ confirme la valeur ci-dessus :

$$cos\theta = cos3(\theta/3) = 4cos^3\frac{\theta}{3} - 3cos\frac{\theta}{3} = 4\left(\frac{19\sqrt{3}}{2\sqrt{577}}\right)^3 - 3\frac{19\sqrt{3}}{2\sqrt{577}} = -\frac{4 \times 3^4 \times 19\sqrt{3}}{577\sqrt{577}}$$

Nous obtenons donc $3|a \Rightarrow a = 3a' = 3 \times 19^2$, $b|(4p)$ avec $b \neq 2, 4$ et $b = 4p'$ avec $p = kp'$ soit $p' = 577$ et $k = 19^6$. Ceci concerne le paragraphe 4.8 de la première hypothèse. C'est le sous-cas E-2-2-2-2-1- avec $\omega = 19$, a', ω non copremiers et $\omega = 19 \nmid (p' - a') = (577 - 19^2)$ avec $s - jn = 6 - 1 \times 3 = 3 \geq 1$, et la conjecture (1.1) est vérifiée.

6.4 Example 4 :

Enfin soit l'exemple $7^2 + 2^5 = 3^4$, avec $A^m = 7^2; B^n = 2^5; C^l = 3^4$. Nous obtenons $p = 4999$ un nombre premier, $q = 2^5 \times 7^2 \times 3^4 = 127008 \gg p$. Par suite, nous trouvons que $\overline{\Delta} = 27q^2 - 4p^3 > 0$. Alors, nous ne pouvons appliquer les conditions du papier à cet exemple, car nous avons un exposant égal à 2. Alors la condition que $m, n, l > 2$ est importante dans l'énoncé de la conjecture de Beal.

7 Conclusion

La méthode utilisée pour prouver que la conjecture de Beal est certes vraie du niveau du premier cycle universitaire scientifique, a demandé l'étude de plusieurs cas possibles. Nous avons confirmé la méthode par les quatre exemples numériques présentés. En conclusion, nous annoncerions le théorème :

Théorème 7.1. ***(A. Ben Hadj Salem, A. Beal, 2016) :*** *Soient $A, B, C, m, n,$ et l des entiers positifs avec $m, n, l > 2$. Si :*

$$A^m + B^n = C^l \tag{7.1}$$

alors $A, B,$ et C ont un facteur en commun.

Références

[1] R. DANIEL MAULDIN. *A Generalization of Fermat's Last Theorem : The Beal Conjecture et Prize Problem*. Notice of AMS, Vol 44, $n°11$, 1997, pp 1436-1437.

[2] B.M. STEWART. *Theory of Numbers*. Second edition. The Macmillan Compagny, New York. 1964. 390 pages.

[3] E.D. BOLKER. *Elementary Number Theory : An Algebraic Approach*. W.A. Benjamin, Inc., New York. 1970. 195 pages.

[4] D.A. COX. *Primes of the form : $x^2 + ny^2$, Fermat, class field theory and complex multiplication*. A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons Inc., New York. 1989. 363 pages.

[5] G. FREI. *Leonhard Euler's convenient numbers*. The Mathematical Intelligencer, Vol. 7, $n°3$ (1985), pp.55-58 and 64.

Address : Abdelmajid Ben Hadj Salem : 6, Rue du Nil, Cité Soliman Er-Riadh, 8020 Soliman, Tunisia.

E-mail : abenhadjsalem@gmail.com