Доказательство гипотезы Била – следствие свойств инвариантного тождества определенного типа (элементарный аспект)

Reuven Tint

Number Theorist, Israel

Email: reuven.tint@gmail.com

www.ferm-tint.blogspot.co.il

Аннотация. Предложен вариант решения гипотезы Била с помощью прямого доказательства» Великой» теоремы Ферма элементарными методами. Новыми являются «инвариантное тождество « (ключевое слово) и полученные нами приведенные в тексте работы тождества, позволившие напрямую решить ВТФ и гипотезу Била,и ряд других. Предложены также новая формулировка теорем (п.2.1.4.), ,доказательства для n= 1,2,3,..n>2 и x,y,z>2.

§1

Доказательство ВТФ

1.1.Получено следующее тождество:

$$\boldsymbol{m}=\frac{(\boldsymbol{x_1}+\boldsymbol{x_2})^2+(\boldsymbol{x_1}+\boldsymbol{x_3})^2+\cdots+(\boldsymbol{x_1}+\boldsymbol{x_{m+2}})^2+(\boldsymbol{x_2}+\boldsymbol{x_3})^2+\cdots}{\boldsymbol{x_1^2}+\boldsymbol{x_2^2}+\cdots+\boldsymbol{x_{m+2}^2}}$$

$$\frac{\ldots+(\boldsymbol{x_2}+\boldsymbol{x_{m+2}})^2+\cdots+(\boldsymbol{x_{m+1}}+\boldsymbol{x_{m+2}})^2-(\boldsymbol{x_1}+\boldsymbol{x_2}+\cdots+\boldsymbol{x_{m+2}})^2}{\boldsymbol{x_1^2}+\boldsymbol{x_2^2}+\cdots+\boldsymbol{x_{m+2}^2}}$$

Здесь,
$0\le m<\infty$- произвольные целые положительные числа, включая нуль;
x_i- произвольные элементы произвольных числовых систем, включая нуль;
$1\le i\le m+2$ - индексы.
Значение каждого "m" не зависит от значений элементов множеств, входящих в это инвариантное тождество.

1.2. "Великая теорема Ферма ". "Для любого натурального n >2 уравнение $a^n+b^n=c^n$ не имеет натуральных решений a,b ,c."

1.2.1. Доказательство для n = 1 и,например, m=1 .

$$m=1\equiv\frac{(x_1+x_2)^1+(x_1+x_3)^1+(x_2+x_3)^1-(x_1+x_2+x_3)^1}{x_1^1+x_2^1+x_3^1}=$$
$$=\frac{2(x_1^1+x_2^1+x_3^1)-(x_1^1+x_2^1+x_3^1)}{x_1^1+x_2^1+x_3^1}=1-\frac{A_1=0}{x_1^1+x_2^1+x_3^1}$$

$A_1 = 0$ – условие необходимое.

1.2.1.1. Пусть $x_1 = a^1, x_2 = b^1, a^1 + b^1 = z$ – натуральное число при произвольных натуральных «a « и «b». Но $a^1 + b^1 = c^1 = z$, значит,

$c = z^{\frac{1}{1}}$– натуральное число – условие достаточное.

1.2.2. Доказательство для n = 2 и m=1 .

$$m = 1 \equiv \frac{(x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - (x_1 + x_2 + x_3)^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} =$$
$$= \frac{2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = 1 - \frac{A_2 = 0}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

и $A_2 = 0$ – условие необходимое.

1.2.2.1. Пусть $x_1 = a^2, x_2 = b^2, a^2 + b^2 = z$ – натуральное число при «a» и «b» произвольных натуральных числах . И $A_2 = 0$.Но если $a^2 + b^2 = c^2$, c = $p^2 + q^2$ - будет натуральным при $a = p^2 - q^2$ и $b = 2\,p\,q$ (p и q – произвольные взаимно простые целые положительные числа). Тогда, $c^2 = z^2$ и $c = z^{\frac{2}{2}}$ – будет натуральным -условие достаточное, поскольку, как известно, эти выражения дают все решения уравнения $a^2 + b^2 = c^2$ во взаимно простых натуральных числах.

1.2.2.2. Предположим,что $\mathrm{a}_1^2 + \mathrm{b}_1^2 = \mathrm{z}_1$ для всех остальных взаимно простых натуральных чисел,которые может быть могут являться решениями в натуральных числах уравнения $\mathrm{a}_1^2 + \mathrm{b}_1^2 = \mathrm{c}_1^2$. Тогда, $\mathrm{c}_1^4 = \mathrm{z}_1^2$ и $\mathrm{c}_1 = \mathrm{z}_1^{\frac{1}{2}}$ не может быть натуральным числом – условие достаточности не выполнено. Таким образом, для $\mathrm{n} = 2$ при $\mathrm{A}_2 = 0$ и $\mathrm{z}_1^{\frac{1}{2}}$ - решений в натуральных числах нет. А это говорит о необходимости рассмотрения для $\mathrm{n} \geq 1$ обоих условий: $\mathrm{A}_\mathrm{i} = 0$, или $\mathrm{A}_\mathrm{j} \neq 0$ – необходимых, $\mathrm{z}_\mathrm{n}^{\frac{1}{\mathrm{n}}}$ – достаточного.

1.2.3. Доказательство для n = 3 , m = 1.

$$m = 1 \neq \frac{(x_1 + x_2)^3 + (x_1 + x_3)^3 + (x_2 + x_3)^3 - (x_1 + x_2 + x_3)^3}{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3} =$$
$$= \frac{2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)}{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3} = 1 - \frac{A_3 = 6\,x_1 x_2 x_3}{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3}$$

$A_3 =$ 6 $x_1 x_2 x_3 \neq$ 0- условие необходимое.

1.2.3.1. Пусть $x_1 = a^3, x_2 = b^3, a^3 + b^3 = z$ –натуральное число при произвольных натуральных a , b и $A_3 \neq$ 0 .Предположим,что a^3 +b^3 = c^3. Тогда, c^6 = z^2 , с = $z^{\frac{2}{6}}$ = $z^{\frac{1}{3}}$ - не может быть натуральным числом – условие достаточное.

1.2.4. Доказательство для n > 2 и m = 1 .

$$m = 1 \neq \frac{(x_1 + x_2)^n + (x_1 + x_3)^n + (x_2 + x_3)^n - (x_1 + x_2 + x_3)^n}{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3} =$$
$$= \frac{2(x_1^n + x_2^n + x_3^n) - (x_1^n + x_2^n + x_3^n)}{x_1^n + x_2^n + x_3^n} = 1 - \frac{A_n \neq 0}{x_1^n + x_2^n + x_3^n}$$

Для n > 2 $A_n \neq$ 0 - условие необходимое.

1.2.5.

$$m \neq \frac{\sum_{i=1,i<j}^{i=m+1,j=m+2}(x_i + x_j)^n - (x_1 + x_2 + \cdots + x_{m+2})^n}{x_1^n + x_2^n + \cdots + x_{m+2}^n} =$$

$$= \frac{(m+1)(x_1^n + x_2^n + \cdots + x_{m+2}^n) - (x_1^n + x_2^n + \cdots + x_{m+2}^n + A_n \neq 0)}{x_1^n + x_2^n + \cdots + x_{m+2}^n} =$$

$$= m - \frac{A_n \neq 0}{x_1^n + x_2^n + \cdots + x_{m+2}^n}$$

для $n > 2$ $A_n \neq$ 0 - условие необходимое.

1.2.5. 1. Пусть $x_1 = a^n, x_2 = b^n, a^n + b^n = z$ - натуральное число при произвольных натуральных «a» и «b» .Предположим ,что для n > 2 $a^n + b^n = c^n$. Тогда , c^{2n} = z^2 и с = $z^{\frac{1}{n}}$, что возможно только для n = 1 и n = 2 (с учетом п.1.2.2.) - условие достаточное.

1.3. Таким образом , для n >2 $A_n \neq 0$ u с = $z^{\frac{1}{n}}$ являются необходимыми и достаточными условиями неразрешимости уравнения $a^n + b^n = c^n$ в натуральных числах a,b,c .

1.4. Из §1, в конечном итоге, следует,что для n > 2 $A_n \neq 0$ является необходимым и достаточным условием неразрешимости уравнения $a^n + b^n = c^n$ в натуральных числах a,b,c. Доказательство завершено.

1.5. Другой вариант доказательства ВТФ см.в (3) ,п.2.2.

§2

Доказательство гипотезы Била

2.1. Гипотеза Била : «Верно ли,что если $A^x + B^y = C^z$,где A,B,C,x,y,z-натуральные и x,y,z>2 ,то A,B,C имеют общий простой делитель» (Википедия. «Открытые математические проблемы»,в частности,открытые(нерешенные)математические проблемы).

2.1.1. Пусть дополнительно к п.2.1. § 2 в $A^x + B^y = C^z$ (A,B,C)=1-взаимно просты (как будет показано ниже в §3, дополнение существенно), $x_1 = A^x$, $x_2 = B^y$, $A^x + B^y = r_C$ натуральное число при произвольных натуральных A и B. Предположим,что $A^x + B^y = C^z$ при x,y,z>2. Тогда,по аналогии с § 1 вышеизложенного, $C^{2z} = r_C^2$ и C = $r_C^{\frac{1}{z}}$- не может быть натуральным числом.

2.1.2. По аналогии с п.2.1.1. § 2 – операции с $C^z – B^y = A^x = r_A$ и $C^z – A^x = B^y = r_B$. .

2.1.3. Таким образом ,уравнение $A^x + B^y = C^z$ при (A,B,C) = 1 и x,y,z >2 – натуральных неразрешимо в натуральных числах,а значит, не может иметь общего простого делителя. Доказательство завершено.

2.1.4. Окончательно, с учетом §§1 и 2,» Уравнение $A^x + B^y = C^z$ при

x,y,z>2 – натуральныхчислах каждое , включая x=y=z=n , не имеет решений во взаимно простых натуральных числах (A,B,C)=1».

§3

1. **3.1.** Если, в частности, A +B=C,(A,B,C)=1-взаимно просты,то уравнения $A_1 + B_1 = C_1$ ((A_1, B_1, C_1)≠1 – функции A,B,C)имеют бесчисленное множество решений в натуральных числах при, в частности,(x,y,z)=1-произвольных натуральных ,и имеют общий простой делитель.

3.2.1. Представим

$$A + B \equiv C,$$

где A, B - произвольные натуральные числа, в виде

$$A^{\alpha x - pyz = 1} + B^{\beta y - qxz = 1} \equiv C^{\gamma z - mxy = 1} \ [\mathbf{1}]$$

Умножив $[\mathbf{1}]$ на $A^{pyz} B^{qxz} C^{mxy}$, получим $(A^{\alpha} B^{qz} C^{my})^x + (A^{pz} B^{\beta} C^{mx})^y \equiv (A^{py} B^{qx} C^{\gamma})^z$ $[\mathbf{2}]$.

Все значения параметров показателей степени $[\mathbf{2}]$ находятся из уравнений

$$\alpha x - pyz = 1$$
$$\beta y - qxz = 1 \quad [\mathbf{3}]$$
$$\gamma z - mxy = 1$$

, где $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, p, q, m$ -соответствующие решениям уравнений $[\mathbf{3}]$ натуральные числа.

3.2.2. Если $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, p_0, q_0, m_0$ какие-либо (или минимальные) решения уравнений в целых положительных числах при фиксированных значениях x, y, z(Г.Дзвенпорт,»Высшая арифметика»,»Наука»,Главфизматгиз,Москва, **1965,стр.88-89,п.5),**
то

$$\alpha = \alpha_0 + yzQ_1 \quad p = p_0 + xQ_1$$
$$\beta = \beta_0 + xzQ_2 \quad q = q_0 + yQ_2$$
$$\gamma = \gamma_0 + xyQ_3 \quad m = m_0 + zQ_3,$$

Q_1, Q_2, Q_3 –произвольные натуральные (целые) числа, или нуль, и

$$(A^{\alpha_0+yzQ_1}B^{q_0z+yzQ_2}C^{m_0y+yzQ_3})^x +$$
$$+(A^{p_0z+xzQ_1}B^{\beta_0+xzQ_2}C^{m_0x+xzQ_3})^y = \quad [4]$$
$$= (A^{p_0y+xyQ_1}B^{q_0x+xyQ_2}C^{\gamma_0+xyQ_3})^z.$$

3.3. Пусть $AP + BP \equiv CP$ $[\mathbf{5}]$ при произвольных натуральных числах A и B ,где P -произвольное простое число. Тогда, с учётом $[\mathbf{2}]$

$$(P^{\alpha+qz+my}A^{\alpha}B^{qz}C^{my})^x + (P^{pz+\beta+mx}A^{pz}B^{\beta}C^{mx})^y \equiv$$
$$\equiv (P^{py+qx+\gamma}A^{py}B^{qx}C^{\gamma})^z \ [\mathbf{6}]$$

3.3.1. $A = 2; B = 3; C = 5; P = 7$

$$x = 4; y = 5; z = 7$$

Тогда,

$$\alpha \times 4 - p \times 5 \times 7 = 1$$
$$\alpha = 9; p = 1$$
$$\beta \times 5 - q \times 4 \times 7 = 1$$
$$\beta = 17; q = 3$$
$$\gamma \times 7 - m \times 4 \times 5 = 1$$
$$\gamma = 3; m = 1.$$

Отсюда,

$$(7^{35} \times 2^9 \times 3^{21} \times 5^5)^4 + (7^{28} \times 2^7 \times 3^{17} \times 5^4)^5 =$$
$$= (7^{20} \times 2^5 \times 3^{12} \times 5^3)^7.$$

3.3.2. Получено тождество: $[(2A^{xy+1})^y\ ]^x\ +\ [(2A^{xy+1}))^x\ ]]^y\ \equiv (2A^{xy})^{xy+1}$.

Здесь,A,x,y – произвольные целые п оложительные числа,включая нуль.

3.3.2.1.Это тождество позволяет получить следующее уравнение:

$$[(2AA^{abxy+1})^{aby}]^x + [(2A^{abxy+1})^{abx}]^y = [(2A^{abxy})^c]^z.$$

Здесь,(x,y,z)=1- в ,частности,произвольные взаимно простые натуральные числа, cz=abxy + 1, a,b,c находятся из уравнения cz – abxy = 1 (см.п3.2.2.).

Например: x=5 , y=7 , z = 11 , 11c – 5.7.ab =1 , 11.86 – 35.27 = 1, откуда,

a=3, b=9 , c = 86 и

$$[(2A^{27.35+1})^{27.7}]^5 + [(2A^{27.35+1})^{27.5}]^7 = [(2A^{27.35})^{86}]^{11}.$$

Таким образом ,можно получить все бесчисленное множество решений этого уравнения.

§ 4

4.1. Один из вариантов нахождения решений в натуральных числах уравнения $A^4 + B^3 = C^2$ при (A,B,C) = 1, или A,B,C - всех четных, нарушающих значения показателей степеней исходного уравнения при сокращении.

4.1.1. Имеем тождество : $[y(y^2 + 3)]^2 - (3y^2 + 1)^2 = (y^2 - 1)^3$.

Пусть $3y^2 + 1 = x^2$. Тогда, $x^2 - 3y^2 = 1$ и $[y(y^2 + 3)]^2 - x^4 = (y^2 - 1)^3$.

По В.Серпинскому(«О решенгии уравнений в целых числах» ,Физматгиз,Москва, 1961,стр.29-30)

$x_{k+1} = x_1 x_k + 3y_1 y_k$ $\quad y_{k+1} = \boldsymbol{y_1 x_k + x_1 y_k}$ для $1 \leq к < \infty$.

При x_1=2, y_1=1 2^2 - 3. 1 = 1, и т.д.и т.п. рекуррентно до бесконечности:

$7^4 + 15^3 = 76^2$, $26^4 + 224^3 = 3420^2$, $97^4 + 3135^3 = 175784^2$ и т.д.

4.2.Там же (стр.63) приведен способ получения аналогичных решений,например:

$28^2 + 8^3 = 6^4$, $1176^2 + 49^3 = 35^4$ и (способ не указан) $27^2 + 18^3 = 9^4$, $63^2 + 36^3 = 15^4$.

4.3. Еще один из вариантов нахождения решений в натуральных числах уравнения $z^2 + x^3 = y^4$ (7).

4.3.1. Из (7) $x^3 = y^4 - z^2$, $x = y^2 – z$, $x^2 = y^2 + z$, $z = y^2 - x$ (8) и

$x^2 + x – 2y^2 = 0$ (9).

4.3.2. По В.Серпинскому (п.4.1.1.) стр.21-23, формулы

$$x_{n+1}=3x_n+4y_n+1 \qquad y_{n+1}=2x_n+3y_n+1 \qquad n=1,2,3,\ldots .$$

дают рекуррентно все решения в натуральных числах уравнения (9).

4.3.3. При n=1 $28^2+8^3=6^4$ $7^2 . 2^4+4^3 . 2^3=3^4 . 2^4$,но $7^2+4^3 \neq 3^4$

4.3.4. Из п.п.4.1.1. и 4.2.

$$26^4+224^3=3420^2 \quad 13^4 . 2^4+7^3 . 2^{15}=855^2 . 2^4, \text{ но } 13^4+7^3 \neq 855^2$$

$63^2+36^3=15^4$ $7^2 . 3^4+2^6 . 3^6=5^4 . 3^4$, но $7^2+2^6 \neq 5^4$.

4.3.5. Из п.п. 4.3.1.,4.3.2. $[(2x_n+3y_n)^2+x_n+2y_n]^2+(3x_n+4y_n+1))^3=(2x_n+3y_n+1))^4$ -

- рекуррентное уравнение.

n =1,2 ,3,......, $x_1=1$, $y_1=1$.

При n=3 $(41328)^2+(288)^3=(204)^4$, $287^2 . 2^8 . 3^4+1^3 . 2^{15} . 3^6=17^4 . 2^8 . 3^4$,

но $287^2+1^3 \neq 17^4$.

Литература:

1. H.DABENPORT ,“THE HIGHER ARITHMETIC”,HARPER & SROTHERS,NEW YORK.

2. В.Серпинский, «О решенгии уравнений в целых числах» ,Физматгиз,Москва,

1961,стр.29-30, 63 ,21-23.

3. Reuven Tint (www.ferm-tint.blogspot.co.il) «Уникальное инвариантное тождество и вытекающие из него уникальные следствия» (элементарный аспект), 2016.