DEMONSTRATION DE LA CONJECTURE DE C.GOLDBACH

BERKOUK Mohamed

Email: bellevue-2011@hotmail.com

En 1742, Christian Goldbach adressa une lettre à Leonhard Euler dans laquelle il proposait la conjecture faible suivante :

> ***Tout nombre supérieur à 5 peut être écrit comme une somme de trois nombres premiers.***

Euler, lui répondit avec la version plus forte de la conjecture :

> ***Tout nombre pair plus grand que deux peut être écrit comme une somme de deux nombres premiers.***[1]

Le « Tout nombre » de la réponse d'Euler qui a écarté 2 aussi, laisse entendre que Euler ou Goldbach, ou les deux à la fois ne considéraient pas que 1 est premier...

C'est ces deux dernières versions actuelles que nous allons essayer de démontrer en adoptant une nouvelle approche.

INTRODUCTION

1°- en ce *qui concerne* la conjecture forte, chaque nombre pair n, à partir de 4 peut générer plusieurs couples dont les éléments a et b < n et que parmi ces couples, qui déjà répondent à la conjecture par la sommation (n=a+b).Le nombre ou le cardinal des couples premiers est estimé , au moins , par le théorème fondamentale des nombres premiers .En démontrant que ce cardinal > 0
c'est-à-dire $\forall$ N pair > 3, $\exists$un couplet Goldbach premier (p, p') généré par N / N= p + p'
En établissant l'inéquation de Goldbach qui exprime autrement la conjecture forte.

2°- quand à la conjecture faible, chaque nombre impair n, à partir de 7 peut générer plusieurs triplets dont les éléments a ,b et c < n et que parmi ces triplets , qui déjà répondent à la conjecture par la sommation (n=a+b+c) en explicitant sa formule de récurrence .Le nombre ou le cardinal des triplets premiers est estimé au moins ,par le théorème fondamentale des nombres premiers , en démontrant que ce cardinal > 0
c'est-à-dire $\forall$ N impair > 5, $\exists$un triplet Goldbach premier (p, p',p '') généré par N / N= p + p'+p''
.En établissant l'inéquation faible de Goldbach qui exprime autrement la conjecture faible .

<u>I- Démonstration de la conjecture Forte de C. Goldbach</u>.

a) détermination de la suite des décompositions de couplets impairs générés par tout pair >2

- un couplet Goldbach , c'est tout couple premier (a, b premiers)et qui respecte la sommation de ses éléments quantà l'énoncé de la Conjecture forte,par rapport au nombre pair qui le génère.

Commençons par cette observation inductive de cette suite

Exemple 1 : les couplets générés par le premier pair 4 sont :

4 -→(3,1) (2,2)

Exemple 2 : les couplets générés par le deuxième pair 6 sont :

6 -→(5,1) (4,2) (3,3)

Exemple 3: les couplets générés par le troisième pair 8 sont :

8 -→ (7,1) (6,2) (5,3) (4,4)

Exemple 4: les couplets générés par le quatrième pair 10 sont :

10 -→ (9,1) (8,2) (7,3) (6,4) (5,5)

Exemple 5: les couplets générés par le cinquième pair 12 sont :

12 -→ (11,1) (10,2) (9,3) (8,4) (7,5) (6,6)

Exemple 6: les couplets générés par le sixième pair 14 sont :

14-→ (13,1) (12,2) (11,3) (10,4) (9,5) (8,6) (7,7)

Exemple 7: les couplets générés par le septième pair 16 sont :

16-→ (15,1) (14,2) (13,3) (12,4) (11,5) (10,6) (9,7) (8,8)

....

LEMME 1 :

<u>Pour Toutpair n >2 ∈ $\mathbb{N}^*$</u>, le nombre de décompositions D généré par n, en couplets, dont les éléments a et b entiers répondants à la sommation de Goldbach (a +b= n)**,est de$\frac{n}{2}$.**

b) détermination des « couplets Goldbach » parmi ces $\frac{n}{2}$ couples à sommation Goldbach , ∀ n>2, entier positif pair.

1° Utilisant le Théorème fondamental des nombres premiers , pour déterminer le nombre de couplets Goldbach **G(n)** parmin.

Au début l'hypothèse était que le nombre de premiers inférieur à x, entier positif, est sensiblement égale à x divisé par son logarithme népérien, quand x tend vers l'infini :

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)} \ (x \to +\infty),$$

Le problème consiste alors à prouver $\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log(x)} = 1$

Vers 1896, Hadamard et de la vallée Poussin, en utilisant l'analyse complexe de Riemann , trouvèrent la démonstration du problème qui devient *théorème fondamental des nombres premiers. (TFNP)*

La conjecture forte de Goldbach est équivalente donc à **« ∀ N pair >2, ∃un couplet Goldbach (p, p') généré par N / N= p + p' »** (p et p' premiers).

Connaissant par le LEMME 1 Le cardinal des couplets générés par tout n pair > 2 , dont la somme respecte la conjecture forte , à savoir $\frac{n}{2}$; appliquons ensuite le TFNP pour en déduire le nombre de couplets Goldbach .

$$G(n) = \pi\left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{n}{2\log(n) - 2\log(2)}\right)$$

(Posons $G(n) = \pi(n)^2$ puisque le décompte concerne 2 éléments d'un couple a et b)

$$G(n) = \frac{n^2}{(2\log(n) - 2\log(2))^2}$$

Dans ce cas, cela revient à exprimer la conjecture de Goldbach par l'inéquation de Goldbach suivante :

$$\boxed{\frac{n^2}{(2\log(n) - 2\log(2))^2} > 0}$$

Simplifions cette inéquation dite de Goldbach :

C'est-à-dire $n^2 > 0.\ (2\log(n) - 2\log(2))^2$

⇒ $n^2 > 0$

L'inéquation de GOLDBACH devient : $n^2 > 0$ (1)

Soit la fonction f(n) = n^2; f(n) est strictement croissante c'est-à-dire l'inéquation de Goldbach (1) est vérifiée SSI sa dérivé est positive ∀n>2.

f(n) étant définit dans l'intervalle [4, +∞ [

Calculons sa dérivé f'(n) = $2n$, son signe est toujours positif puisse que avec n >2, $2n > 0$

⇒ f'(n) > 0 ⇒ f(n) est strictement croissante entre f(4) =16 Et +∞ ⇒ $n^2 > 0$

⇒ L'inéquation de GOLDBACHest vérifiée pour**tout n pair > 2.**

e)Conclusions :

Nous avons déduit que l'énoncé de la conjecture de Goldbach est équivalent à« **∀ N pair > 3, ∃un couplet Goldbach (p, p') généré par N / N= p + p'** » ce qui, comme nous avons vu ci-dessus

Peut être traduit par « l'inéquation de Goldbach » après simplification, par :

$$f(n) = n^2 > 0$$

Nous avons démontré que cette inéquation est toujours vrais ∀n, entier pair > 2

⇒∀ n pair >2, ∃un couplet Goldbach dont la somme des 2 éléments est égale à n

⇒La conjecture forte de Goldbach est donc vraie

CQFD.

II- Démonstration de la conjecture Faible de C. Goldbach

a) détermination de la suite des décompositions de triplets générés par tout impair > 5

Précisions :

- *un triplet Goldbach , c'est tout triplet premier (a, b, c premiers) qui respecte l'énoncé de la Conjecture faible par rapport au nombre n impair qui le génère. . (n = a+b+c)*

Si on prend la suite de Ces nombres n impairs,

1°- en extrayant trois sous-suites dont elle est composée à savoir pour $\forall$ k,entier, n impair ne peut s'exprimer que sous forme de n= 6k+1, ou 6k+3, ou 6k+5. Isolons chacune de ces trois sous-suites respectivement dans trois tableaux ci-dessous :

2° - calculons dans chaque 2°eme colonne le nombre de triplets dont la sommation de ses trois éléments respectant l'énoncé de la conjecture faible de Goldbach (c'est-à-dire : a+b+c =n).

3° - observons comment s'organise la récurrence par rapport à 4 ,7 et 10, respectivement

Le premier terme des suites U_n, ajoutés à 10, 12, puis 14 issus des différences respectives de

U_1-U_0, ajouté enfin à un coefficient qui multiplie 6 et qui n'est autre que la somme des rangs

C'est-à-dire r. (r-1) /2 .

4° - ajustons la récurrence puisque nous constations que pour tout U_n, la formule explicite déduite à partir des observations en 3°, génère U_{n+1} , comme pour chacune des trois sous-suites 6k+1 , 6k+3, et 6k+5 la raison pour passer d'un impair au suivant est de 6 , constante

Nous devrions donc remplacer n par (n-6) pour aboutir à la formule explicite définitive pour chacune des trois sous-suites extraites de la suite –mère des nombres entiers impairs.

Commençons par cette observation inductive de ces 3 sous- suites :

Rang du n impair de forme **6k+1**	nombre de triplet respectant la sommation Goldbach observés	déduction de la formule qui génère les triplets dont la somme de ses éléments est Goldbach (TSG)
0 (7)	4	= 4+ 10. 0 + 0.6 = 4
1 (13)	14	= 4+ 10. 1 + 0.6 = 14
2 (19)	30	= 4+ 10. 2 + 1.6 = 30
3 (25)	52	= 4+ 10. 3 + 2.6 = 52
,,,,,,,	,,,,,,,,,	,,,,,,,,
r (n=6k+1)		= 4+ 10.r + [r. (r-1) /2].6 = TSG

Rang du n impair de forme **6k+3**		
0 (9)	7	= 7+ 12. 0 + 0.6 = 7
1 (15)	19	= 7+ 12. 1 + 0.6 = 19
2 (21)	37	= 7+ 12. 2 + 1.6 = 37
3 (27)	61	= 7+ 12. 3 + 2.6 = 61
,,,,,,,	,,,,,,,,,	,,,,,,,,
r (n=6k+3)		= 7+ 12.r + [r.(r-1) /2].6 = TSG

Rang du n impair de forme **6k+5**		
0 (11)	10	= 10+ 14. 0 + 0.6 = 10
1 (17)	24	= 10+ 14. 1 + 0.6 = 24
2 (23)	44	= 10+ 14. 2 + 1.6 = 44
3 (29)	70	= 10+ 14. 3 + 2.6 = 70
,,,,,,,	,,,,,,,,,	,,,,,,,,
r (n=6k+5)		= 10+ 14.r + [r. (r-1) /2].6 = TSG

La formule explicite du nombre de triplets répondants à la sommation Goldbach des nombres impairs n, de chacune des trois formes …sont :

. Impair 6k+1 → TSG= 4+ 10.r+ [r. (r-1) /2].6 = 4+10.r + $3.r^2$-3.r =**$3.r^2$ + 7.r + 4**

. Impair 6k+3 → TSG= 7+ 12.r+ [r. (r-1) /2].6 = 7+12.r + $3.r^2$ -3.r = 3.**r^2 + 9.r + 7**

. Impair 6k+5 → TSG = 10+14.r+ [r. (r-1) /2].6 = 10+14.r + $3.r^2$-3.r = 3.**r^2 + 11.r + 10**

Ces trois formules explicites de la récurrence déduites ci-dessus qui permettent, à partir du rang d'un entier impair positif n, de connaitre le cardinal (TSG) des triplets respectant la sommation Goldbach , généré par n impair respectivement de forme 6k+1 , 6k+3 ou 6k+5 (k ∈ N) .

Exprimant directement ces formules en fonction ce nombre impair:

. Comme il existe une bijection entre le rang et n impair ⇒ $\forall$ (r, n) ∈ ℕ , n = 6r +1 (1)

⇒ $r = \frac{n-1}{6}$, ce qui donne dans $3.r^2 + 7.r + 4$, avant ajustement :

$$\Rightarrow \quad 3.\left(\frac{n-1}{6}\right)^2 + 7.\frac{n-1}{6} + 4$$

$$= \frac{3.n^2-6.n+3}{36} + \frac{42.n-42+144}{36}$$

$$= \frac{3.n^2+36.n+105}{36}$$

$$= \frac{\boldsymbol{n^2+12.n+35}}{\boldsymbol{12}}$$

Ajustons comme nous avions annoncé ci-dessus en 4° en remplaçant n par (n – 6)

$$= \frac{\boldsymbol{(n-6)^2+12(n-6)+35}}{\boldsymbol{12}}$$

$$= \frac{\boldsymbol{n^2-12.n+36+12n-72+35}}{\boldsymbol{12}}$$

$$= \frac{\boldsymbol{n^2-1}}{\boldsymbol{12}}$$

à partir de chaque impair n > 5 de forme 6k+1 (k ∈ ℕ) , on déduit le cardinal des triplets à sommation Goldbach généré par n .

$$\Rightarrow \quad f: 6\mathbb{N}+1\setminus\{1\} \to \mathbb{N} : \quad n \to \frac{n^2-1}{12}$$ (6N+1 : sous-ensemble des entiers impairs positifs)

. Comme il existe une bijection entre le rang et n impair ⇒ $\forall\ (\mathrm{r}, \mathrm{n}) \in \mathbb{N}$, $\mathrm{n} = 6\mathrm{r} + 3$ (2)

$\Rightarrow\ \mathrm{r} = \frac{n-3}{6}$, ce qui donne dans $3.r^2 + 9.r + 7$, avant ajustement :

$$\Rightarrow \qquad 3.\left(\frac{n-3}{6}\right)^2 + 9.\frac{n-3}{6} + 7$$

$$= \frac{3.n^2-18.n+27}{36} + \frac{54.n-162+252}{36}$$

$$= \frac{3.n^2+36.n+117}{36}$$

$$= \frac{\boldsymbol{n^2+12n+39}}{\mathbf{12}}$$

Ajustons comme nous avions annoncé ci-dessus en 4° en remplaçant n par (n – 6)

$$= \frac{(n-6)^2+12(n-6)+39}{12}$$

$$= \frac{n^2-12.n+36+12n-72+39}{12}$$

$$= \frac{n^2+3}{12}$$

à partir de chaque impair n > 5 de forme 6k+3 (k $\in \mathbb{N}$) , on déduit le cardinal des triplets à sommation Goldbach généré par n .

⇒ g: $6\mathbb{N}+3 \setminus \{3\} \longrightarrow \mathbb{N} :\ n \longrightarrow \frac{n^2+3}{12}$ ($6\mathbb{N}+3$: sous-ensemble des entiers impairs positifs)

. Comme il existe une bijection entre le rang et n impair ⇒ $\forall\ (\mathrm{r}, \mathrm{n}) \in \mathbb{N}$, $\mathrm{n} = 6\mathrm{r} + 5$ (3)

$\Rightarrow\ \mathrm{r} = \frac{n-5}{6}$, ce qui donne dans $3.r^2 + 11.r + 10$, avant ajustement :

$$\Rightarrow \qquad 3.\left(\frac{n-5}{6}\right)^2 + 11.\frac{n-5}{6} + 10$$

$$= \frac{3.n^2-30.n+75}{36} + \frac{66.n-330+360}{36}$$

$$= \frac{3.n^2+36.n+105}{36}$$

$= \dfrac{n^2+12n+35}{12}$

Ajustons comme nous avions annoncé ci-dessus en 4° en remplaçant n par (n – 6)

$= \dfrac{(n-6)^2+12(n-6)+35}{12}$

$= \dfrac{n^2-12.n+36+12n-72+35}{12}$

$= \dfrac{n^2-1}{12}$

à partir de chaque impair n > 5 de forme 6k+5 (k $\in \mathbb{N}$) , on déduit le cardinal des triplets à sommation Goldbach généré par n .

$\Rightarrow$ h: **6$\mathbb{N}$+5**\ {5} $\rightarrow$ $\mathbb{N}$: n$\rightarrow \dfrac{n^2-1}{12}$ (**6$\mathbb{N}$+5 :** sous-ensemble des entiers impairs positifs)

LEMME 3 :

Pour Tout n, impair > 5 $\in$ N , l'ensemble des entiers , le nombre de décompositions D généré par n, en tripletsà sommation Goldbach , est de $\dfrac{n^2-1}{12}$, si n est de forme 6k+1 ou 6k+5 , il est de $\dfrac{n^2+3}{12}$si il est de forme 6k+3 (k $\in \mathbb{N}$).

Remarque :

1° CAS : si on prend un n impair 6k+1 $\rightarrow$TSG = $\dfrac{n^2-1}{12}$

$\Rightarrow$(n-2) impair qui précède n est de forme 6k+5 $\rightarrow$TSG = $\dfrac{(n-2)^2-1}{12} = \dfrac{n^2-4n+3}{12}$

$\Rightarrow$(n-4) impair qui précède le précédent de n est de forme

6k+3 $\rightarrow$TSG = $\dfrac{(n-4)^2+3}{12} = \dfrac{n^2-8n+19}{12}$

Leurs somme $= \dfrac{n^2-1}{12} + \dfrac{n^2-4n+3}{12} + \dfrac{n^2-8n+19}{12} = \dfrac{3.n^2-12n+21}{12}$

2° CAS : si on prend un n impair 6k+3 $\rightarrow$TSG = $\dfrac{n^2+3}{12}$

$\Rightarrow$On que (n-2) impair qui précède n est de forme 6k+1 $\rightarrow$TSG = $\dfrac{(n-2)^2-1}{12} = \dfrac{n^2-4n+3}{12}$

$\Rightarrow$On que (n-4) impair qui précède le précédent de n est de forme

6k+3 $\rightarrow$TSG = $\dfrac{(n-4)^2-1}{12} = \dfrac{n^2-8n+16-1}{12} = \dfrac{n^2-8n+15}{12}$

Leurs somme $= \dfrac{n^2+3}{12} + \dfrac{n^2-4n+3}{12} + \dfrac{n^2-8n+15}{12} = \dfrac{3.n^2-12n+21}{12}$

3° CAS : si on prend un n impair 6k+5⟶TSG = $\frac{n^2+1}{12}$

⇒On que (n-2) impair qui précède n est de forme 6k+3⟶TSG = $\frac{(n-2)^2+3}{12} = \frac{n^2-4n+7}{12}$

⇒On que (n-4) impair qui précède le précédent de n est de forme

6k+1⟶TSG = $\frac{(n-4)^2-1}{12} = \frac{n^2-8n+16-1}{12} = \frac{n^2-8n+15}{12}$

Leurs somme = $\frac{n^2+1}{12} + \frac{n^2-4n+7}{12} + \frac{n^2-8n+15}{12} = \frac{3.n^2-12n+23}{12}$

LEMME 4 :

Pour Tout n, impair > 5 ∈ N, l'ensemble des entiers, le nombre de décompositions D généré par n, en triplets à sommation Goldbach TSG = $\frac{3.n^2-12n+21}{12}$ si n=6k+1 ou 6k+3,

Et TSG = $\frac{3.n^2-12n+23}{12}$ si n=6k+5 (k ∈ ℕ).

Posons au minimum la TSG = $\frac{3.n^2-12n+21}{12} = \frac{n^2-4n+7}{4}$ pour l'ensemble des nombres impairs.

c) détermination des « triplets Goldbach » parmi $\frac{n^2-4n+7}{4}$ des triplets de sommation Goldbach , générés par tout entier positif impair > 5 .

La conjecture faible de Goldbach est équivalente donc à **« ∀ N impair >5, ∃un triplet Goldbach (p, p',p '') généré par N / N= p + p'+p'' »** (p ,p' et p'' , premiers).

Le cardinal des triplets Goldbach T(n) = $\frac{n^2-4n+7}{4}$, n est réduit à $\pi(\mathrm{n})$, qui constitue le nombre de triplets (a ,b ,c) générés par tout n impair > 5 , dont la sommation respecte la conjecture mais aussi la primalité de ses trois éléments (a ,b ,c) , en introduisons $\pi(\mathrm{n})$.

T(n) = $\frac{\pi(\mathrm{n})^2-4\pi(\mathrm{n})+7}{4}$

T(n) = $\frac{\frac{\mathrm{n}^2}{\log(\mathrm{n})^2}-4.\frac{\mathrm{n}}{\log(\mathrm{n})}+7}{4}$ (posons $\pi(\mathrm{n})=\frac{\mathrm{n}}{\log(\mathrm{n})}$ au minimum)

$$T(n) \quad = \frac{\frac{n^2 - 4.n.\log(n) + 7\log(n)^2}{\log(n)^2}}{4}$$

$$T(m) \quad = \frac{n^2 - 4.n.\log(n) + 7\log(n)^2}{4.\log(n)^2}$$

Dans cecas, cela revient à exprimer la conjecture faible de Goldbach par l'inéquation faible de Goldbach suivante :

$$\frac{n^2 - 4.n.\log(n) + 7\log(n)^2}{4.\log(n)^2} > 0$$

Ou bien

$$n^2 - 4.n.\log(n) + 7\log(n)^2 > 0 \qquad (2)$$

Soit la fonction f(n) = $n^2 - 4.n.\log(n) + 7\log(n)^2$

f(n) est strictement croissante c'est-à-dire l'inéquation de Goldbach (2) est vérifiée SSI sa dérivé est positive∀ n >5 .f(n) étant définit dans l'intervalle [7, +∞ [.

Calculons sa dérivé f'(n) = $\frac{2.(2n\ \log(n)+7\log(n)+n^2+2n)}{n}$, son signe est toujours positif pour ∀ n > 7,

Comme le montre ses limites entre [7, +∞ [, et son tableau de variation :

$\lim_{n \underset{>}{\to} 7} f(n)$ =129,991448…. Et $\lim_{n\to+\infty} f(n) = +\infty$

Tableau de variation

n	7	$+\infty$
f'(n)	+	
f(n)	129,991…. ↗	$+\infty$

⇒ f'(n) >0 entre [7, +∞ [

$\Rightarrow$ f(n) Est strictement croissante entre f(7) = 129,991….Et $+\infty$.

$\Rightarrow n^2 - 4.n.\log(n) + 7\log(n)^2 > 0$

$\Rightarrow$ L'inéquation faible de GOLDBACHest vérifiée pour**tout n impair >5.**

d) conclusion :

f(n) Est strictement croissante entre f(7) = 129,991…. Et $+\infty$.

$\Leftrightarrow$ **$\forall$ N impair >5, $\exists$un triplet Goldbach (p, p', p ʺ) généré par N / N= p + p'+p''**

(p, p', p'' premiers).

$\Leftrightarrow$ La conjecture faible de Goldbach est donc vraie.

CQFD

Référence :

[1] : techno science.net

Le 25.10.2016