秦九韶的大衍求一术及其矩阵表示

石远东

一、秦九韶原文中的大衍求一术

大衍求一术是如何运算的？我们首先看看秦九韶原文中的大衍求一术范例：

在《数术大略》中，只在以下十题中使用大衍求一术：

一大衍类：01 蓍卦发微，02 古历会积，03 推计土功，04 推库额钱，05 分粜推原，06 程行计地，07 程行相及，08 积尺寻源，09 余米推数。

二天时类：12 治历演纪。

但是，给出“大衍术”的“草”或者“草图”，就只有“01 蓍卦发微”和“12 治历演纪”这两题了。

一般认为：秦九韶的大衍求一术步骤是在“01 蓍卦发微”中给出的：

第 01 题：蓍卦发微

问：《易》曰：大衍之数五十，其用四十有九。又曰：分而为二以象两，挂一以象三，揲之以四，以象四时，三变而成爻，十有八变而成卦。欲知所衍之术，及其数各几何？

【草曰：】……

凡奇数得 1 者便为乘率。

今左下衍是 3，乃与本母 4 用大衍求一术入之。

下	3	定母 4
	左行	右行

列衍奇 3 于右上，定母 4 于右下，立天元一于左上，空其左下。

上	天元 $c_0=1$	衍奇 $r_0=3$
下	$c_{-1}=0$	定母 $r_{-1}=4$
起式	左行	右行

【编者注：其中 $c_{-1}=0$，$c_0=1$。按照秦九韶判定程序停止的条件“验右上衍余，得 1 当止”，起式要求 $r_{-1}>r_0$，$(r_0,r_{-1})=1$。】

先以右上少数 3 除右下多数 4，得 1 为商；

上	天元 1	衍奇 3	
下	0	定母 4＝3×1＋1	商 $q_1=1$
更相减损①	左行	右行	

以商 1 乘左上天元一，只得 1，归左下，其右下余 1。

上	$c_0=1$	衍奇 $r_0=3$	
下	归数 $c_1=1=1(q_1)\times1(c_0)+c_{-1}$	定母余 $r_1=1$	商 $q_1=1$
大衍①	左行	右行	

次以右下少数 1 除右上多数 3，须使右上必奇 1，算乃止。遂于右行最上商 2 以除右衍，必奇 1。乃以上商命右下定余 1，除之，右衍余 1。

上	天元 1	衍奇 3＝2×1＋1	商 $q_2=2$
下	归数 1	定余 1	
更相减损②	左行	右行	

【编者注：这里不能用 3÷1＝3……0，只能用 3＝2×1＋1，否则，大衍②无法进行。详细理由请参考《求一算术》[清]张敦仁，见我的论文集《威哉，大衍！》的附录 02。】

次以商 2 与左下归数相乘得 2，加入左上天元一内，共得 3。

上	归数 $c_2=3=2(q_2)\times1(c_1)+1(c_0)$	衍余 $r_2=1$	商 $q_2=2$
下	归数 $c_1=1$	定余 $r_1=1$	
大衍②	左行	右行	
验至右上得一，只以左上所得为乘率			

今验右上衍余，得 1 当止。乃以左上归数 $c_2=3$ 为乘率。

秦九韶“草图”的过程可以表示成：

起式：				1	3	商
				0	4	
更相减损①	1	3	**大衍①**	1	3	
4＝1×3＋1	0	1	1×1＋0＝1	1	1	1
3＝2×1＋1	1	1(止)	2×1＋1＝3	3(率)	1	2
更相减损②	2	1	**大衍②**	2	1	

我们把这一过程的规律用现代记号归纳总结如下：

起式：$c_{-1}=0$，$c_0=1$				c_0	r_0	商
要求：$r_{-1}>r_0$，$(r_0,r_{-1})=1$				c_{-1}	r_{-1}	
更相减损①	c_0	r_0	**大衍①**	c_0	r_0	
$r_{-1}=q_1r_0+r_1$	c_{-1}	r_1	$q_1c_0+c_{-1}=c_1$	c_1	r_1	q_1
$r_0=q_2r_1+r_2$	c_0	r_2	$q_2c_1+c_0=c_2$	c_2	r_2	q_2
更相减损②	c_1	r_1	**大衍②**	c_1	r_1	
……………………						

如果你感兴趣，完全可以按照这个规律继续写下去。

虽然“01 蓍卦发微”同时给出了“草”和“草图”，但是，叙述其实太简单，许多细节都没有展现出来；“12 治历演纪”则只是给出“草图”，不过，其复杂程度远远高于前者。

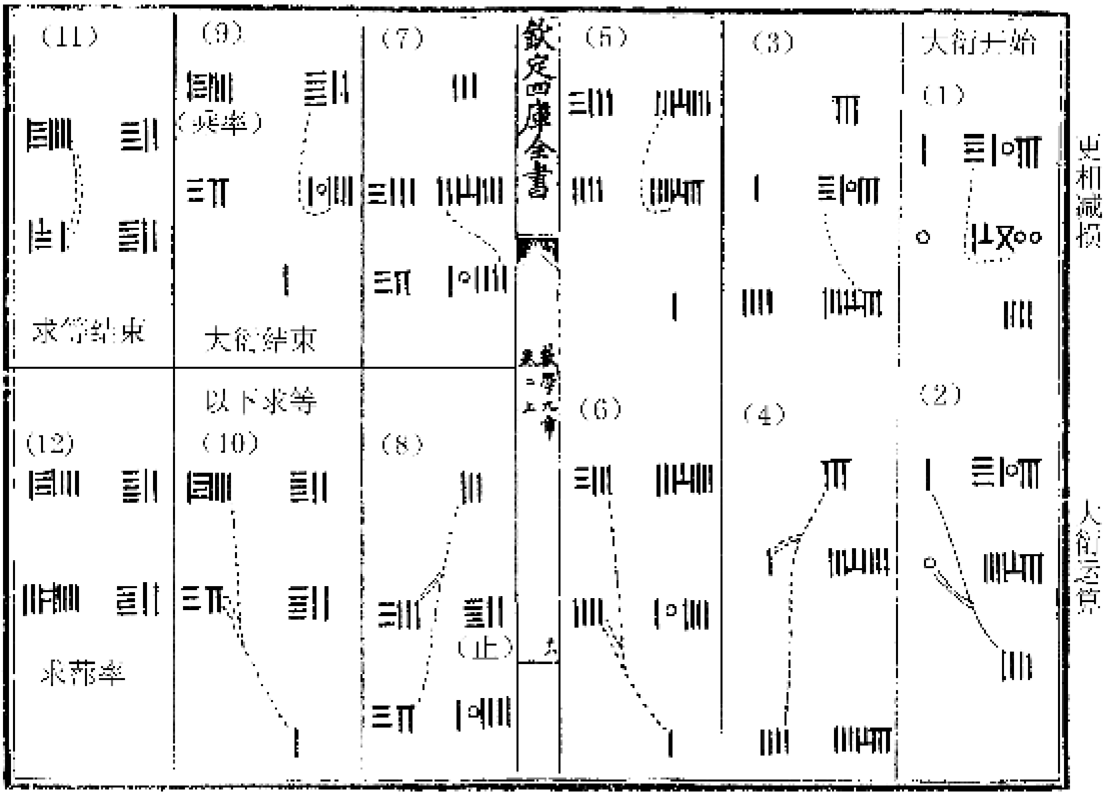
我们把《文渊阁四库全书·数学九章》的“12 治历演纪”在 797-375 页，797-377 页的部分截图附录于后，并给出对应的解读，以便读者有个初步的印象。

第 12 题：治历演纪

问：开禧历，积年七百八十四万八千一百八十三，欲知：推演之原，调日法，求朔余，朔率，斗分，岁率，岁闰，入元岁，入闰，朔定骨，闰泛骨，闰缩，纪率，气元率，元闰，元数，及气等率，因率，蔀率，朔等数，因数，蔀数，朔积年，二十三事，各几何？

【草曰：】……

用大衍术求因率图：



图中（4）（6）（8）（10）的虚线表示的运算关系相当于我们下面表格中的“**大衍**”：

起式：				1	4108	商
				0	16900	
更相减损①	1	4108	**大衍①**	1	4108	
16900＝4×4108＋468	0	468	4×1＋0＝4	4	468	4
4108＝8×468＋364	1	364	8×4＋1＝33	33	364	8
更相减损②	4	468	**大衍②**	4	468	
更相减损③	33	364	**大衍③**	33	364	
468＝1×364＋104	4	104	1×33＋4＝37	37	104	1
364＝3×104＋52	33	52(止)	3×37＋33＝144	144(率)	52	3
更相减损④	37	104	**大衍④**	37	104	
更相减损⑤	144	52	**大衍⑤**	144	52（等）	

104＝1×52＋52	37	52	1×144＋37＝181	181	52	1
52＝1×52＋0	144	52	求蔀率	144	52	
更相减损⑥	181	52	181＋144＝325	325	52	

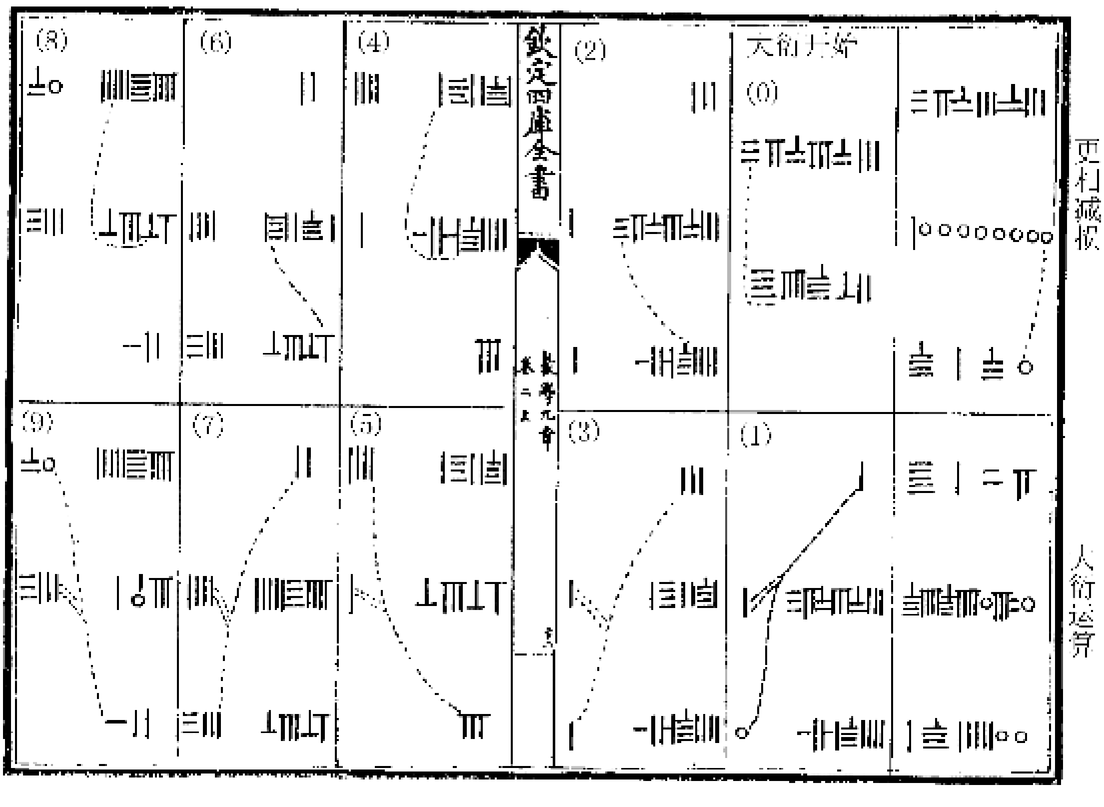
无法用“须使右上末后奇一而止”判断了，相当于保留公因数 52 进行运算。

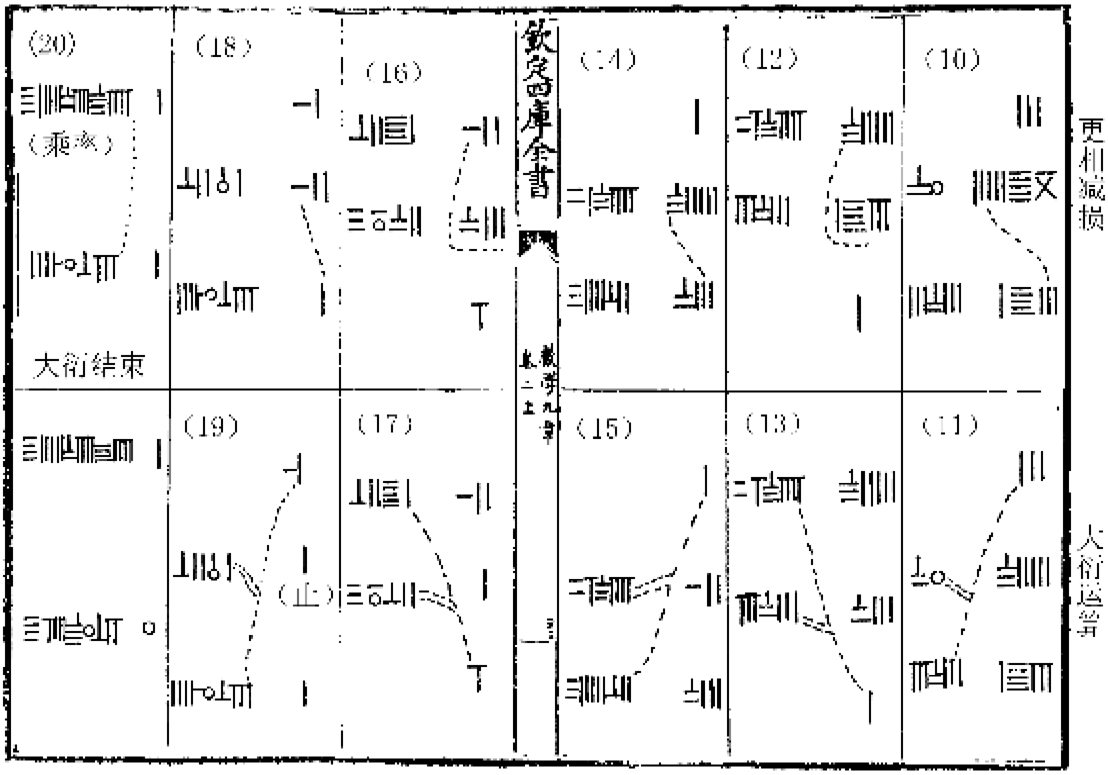
秦九韶算法其实是要满足互素的要求的，由于(4108,16900)＝52(79,325)，因此我们运算时应该考虑的两个数是(79,325)，才能用“须使右上末后奇一而止”来判断：

起式：				1	79	商
				0	325	
更相减损①	1	79	**大衍①**	1	79	
325＝4×79＋9	0	9	4×1＋0＝4	4	9	4
79＝8×9＋7	1	7	8×4＋1＝33	33	7	8
更相减损②	4	9	**大衍②**	4	9	
更相减损③	33	7	**大衍③**	33	7	
9＝1×7＋2	4	2	1×33＋4＝37	37	2	1
7＝3×2＋1	33	1(止)	3×37＋33＝144	144(率)	1	3
更相减损④	37	2	**大衍④**	37	2	

为了加深理解，我们继续考察：

用大衍术求因数图：





秦九韶“草图”的过程可以表示成：

1	377873	更相减损①	1	377873	大衍①
0	499067	499067＝1×377873＋121194	0	121194	1×1＋0＝1
起式					
1	377873	377873＝3×121194＋14291	1	14291	3×1＋1＝4
1	121194	更相减损②	1	121194	大衍②
4	14291	更相减损③	4	14291	大衍③
1	121194	121194＝8×14291＋6866	1	6866	8×4＋1＝33
4	14291	14291＝2×6866＋559	4	559	2×33＋4＝70
33	6866	更相减损④	33	6866	大衍④
70	559	更相减损⑤	70	559	大衍⑤
33	6866	6866＝12×559＋158	33	158	12×70＋33＝873
70	559	559＝3×158＋85	70	85	3×873＋70＝2689
873	158	更相减损⑥	873	158	大衍⑥
2689	85	更相减损⑦	2689	85	大衍⑦
873	158	158＝1×85＋73	873	73	1×2689＋873＝3562
2689	85	85＝1×73＋12	2689	12	1×3562＋2689＝6251
3562	73	更相减损⑧	3562	73	大衍⑧

6251	12	**更相减损⑨**	6251	12	**大衍⑨**
3562	73	73＝6×12＋1	3562	1	6×6251＋3562＝41068
6251	12	12＝11×1＋1	6251	1(止)	11×41068＋6251＝457999
41068	1	**更相减损⑩**	41068	1	**大衍⑩**
457999(率)	1				
41068	1				

这是秦九韶《数术大略》中最复杂的一个大衍求一术运算。

显然，秦九韶求衍奇余（更相减损）和求归数（大衍）时，都是靠心算完成的，计算公式与矩阵运算完全一致。这说明秦九韶已经会用矩阵运算的公式，只是没有用矩阵形式去表达而已。事实上，大衍术本质上就是矩阵运算。为了帮助现代读者理解秦九韶的工作，我决定采用矩阵形式表达“大衍求一术”的运算过程。

二、为什么叫“大衍求一术”？

我们已经知道：“大衍”就是“矩阵运算”，那么，“求一”是什么？是指更相减损中出现的一吗？

这就要从解$b\ x\equiv a\ (\mathrm{mod}\,m)$说起了。

要解决这个同余方程，只需要把x的系数从b变成 1 即可，这就是秦九韶所谓的“求一”了。如何“求一”？目前我们知道的，能够达到这个目的方式有两种：

（1）Euler-Fermat 定理：若$(b\,,m)=1$，则$b^{j(m)}\equiv 1(\mathrm{mod}\,m)$；

证明：$b\ x\equiv a\ (\mathrm{mod}\,m)\Rightarrow b^{j(m)-1}\ b\ x\equiv b^{j(m)-1}\ a\ (\mathrm{mod}\,m)\Rightarrow x\equiv b^{j(m)-1}\ a\ (\mathrm{mod}\,m)$

（2）互素性质：若$(b\,,m)=1$，则$b\ y\equiv 1(\mathrm{mod}\,m)$；

证明：$b\ x\equiv a\ (\mathrm{mod}\,m)\Rightarrow b\ y\ x\equiv a\ y\ (\mathrm{mod}\,m)\Rightarrow x\equiv a\ y\ (\mathrm{mod}\,m)$

显然，秦九韶用的是第二种算法，亦即“大衍求一术”中的“求一”就是指“求出y，使得$b\ y\equiv 1(\mathrm{mod}\,m)$”，这在运算量上是最佳选择，同时也为解一次同余方程组铺平了道路。此所谓“大衍求一”之魂也。

三、“大衍求一术”的矩阵表示

我们把上述内容作一个总结：

大衍求一术云：置奇右上，定居右下，立天元一于左上。先以右上除右下，所得商数，与左上一相生，入左下；然后乃以右行上下，以少除多，递互除之【编者注：至此，是所谓的“更相减损术”，为缀术（连分数）的求商和余数的过程，以“须使右上末后奇一而止”为判定标志】；所得商数，随即递互累乘，归左行上下，须使右上末后奇一而止【编者注：至此，是所谓的“大衍术”，为缀术（连分数）的求渐近分数的过程，本质上就是矩阵运算。】；乃验左上所得，以为乘率；或奇数已见单一者，便为乘率。【编者注：此术妙绝！这一过程我用下面的“求乘率图”来展示，部分内容略有改动。】

求乘率图，亦即求使得“$M_i\, x_i \equiv 1 (\bmod m_i)$”成立的 x_i：

起式：$c_{-1}=0$，$c_0=1$				c_0	r_0	商
要求：$r_{-1}>r_0$，$(r_0, r_{-1})=1$				c_{-1}	r_{-1}	
更相减损①	c_0	r_0	**大衍①**	c_0	r_0	
$r_{-1}=q_1\, r_0+r_1$	c_{-1}	r_1	$q_1\, c_0+c_{-1}=c_1$	c_1	r_1	q_1
$r_0=q_2\, r_1+r_2$	c_0	r_2	$q_2\, c_1+c_0=c_2$	c_2	r_2	q_2
更相减损②	c_1	r_1	**大衍②**	c_1	r_1	
更相减损③	c_2	r_2	**大衍③**	c_2	r_2	
$r_1=q_3\, c_2+r_3$	c_1	r_3	$q_3\, c_2+c_1=c_3$	c_3	r_3	q_3
$r_2=q_4\, c_3+r_4$	c_2	r_4	$q_4\, c_3+c_2=c_4$	c_4	r_4	q_4
更相减损④	c_3	r_3	**大衍④**	c_3	r_3	
更相减损⑤	c_4	r_4	**大衍⑤**	c_4	r_4	
$r_3=q_5\times c_4+r_5$	c_3	r_5	$q_5\times c_4+c_3=c_5$	c_5	r_5	q_5
$r_4=q_6\times r_5+r_6$	c_4	r_6	$q_6\times c_5+c_4=c_6$	c_6	r_6	q_6
更相减损⑥	c_5	r_5	**大衍⑥**	c_5	r_5	
…………………………						

这是秦九韶原来的算法。既然大衍本质上就是矩阵运算，我们就完全可以用大衍矩阵描述上述过程：

大衍矩阵方法：

<table>
<tr><th colspan="2">更相减损</th><th rowspan="2">商 q_i</th><th rowspan="2">大衍求一术的矩阵运算</th></tr>
<tr><td>实 M_i</td><td>法 m_i</td></tr>
</table>

$r_{-1}=M_i$	$r_0=m_i$	q_0	$\begin{bmatrix}-q_0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P_0 & P_{-1}\\ Q_0 & Q_{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P_0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$
r_0	r_1	q_1	$\begin{bmatrix}P_0 & P_{-1}\\ Q_0 & Q_{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-q_1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P_1 & P_0\\ Q_1 & Q_0\end{bmatrix}$
r_1	r_2	q_2	$\begin{bmatrix}P_1 & P_0\\ Q_1 & Q_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-q_2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P_2 & P_1\\ Q_2 & Q_1\end{bmatrix}$
r_2	r_3	q_3	$\begin{bmatrix}P_2 & P_1\\ Q_2 & Q_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-q_3 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P_3 & P_2\\ Q_3 & Q_2\end{bmatrix}$
……	……	……	…………
r_{n-2}	r_{n-1}	q_{r-1}	$\begin{bmatrix}P_{k-2} & P_{k-3}\\ Q_{k-2} & Q_{k-3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-q_{r-1} & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P_{k-1} & P_{k-2}\\ Q_{k-1} & Q_{k-2}\end{bmatrix}$
r_{n-1}	r_n	q_r	$\begin{bmatrix}P_{k-1} & P_{k-2}\\ Q_{k-1} & Q_{k-2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-q_r & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P_k & P_{k-1}\\ Q_k & Q_{k-1}\end{bmatrix}$
r_n	得 0 当止		其中 $x_i=Q_{k-1}$ 或者 m_i+Q_{k-1} 为乘数（乘率） 它使 $r_{-1}x_i\equiv 1(\bmod r_0)$ 成立；

【编者注：表中 $x_i=Q_{k-1}$ 或者 m_i+Q_{k-1} 亦可表示为 $x_i\equiv Q_{k-1}(\bmod m_i)$。

其中的更相减损术是需要依次调整 r_{i+1} 和 r_i 的位置的，再加上对更相减损术例外情形的处理，这就使得运算规律变得复杂起来。为解决这个问题，我们取 $-q_i$ 作为大衍矩阵元素进行运算即可。

秦九韶判定程序停止的条件是“验右上衍余，得 $r_n=1$ 当止”，其前提条件是“实 M_i 与法 m_i 互素”；我提供的程序可以不理会这个条件，但是，判定的条件需要修改为“法下得 0 当止”，请参考“12 治历演纪”。

《秦九韶与数书九章》141 页的表达方式太复杂，虽然正确，却难以理解，主要是运算关系无法简单表达。（吴文俊主编，北京师范大学出版社，1986 年。）

《数书九章新释》（秦九韶原著，王守义遗著，李俨审校，安徽科学技术出版社，1992 年）在 21～23 页的总结也是正确的，只是不便应用而已。】

关于《数术大略》（石远东斠诠版）的出版问题

相关内容可到下面网址阅读：

网易博客：

sdsyd_too 的博客

数论，引人入胜！

http://blog.163.com/sdsyd_too/blog/#m=0

此外，我校勘的书稿：

“《数术大略》——《数书九章》原本”的电子书已经发布在 vixra.org 上。

可到下面地址下载：

http://vixra.org/abs/1606.0064

Outline of Algorithm in Mathematics《数术大略》

其实，早在 2015 年 5 月，我就已经完成了对秦九韶《数术大略》的解读，写了一些文章，集合成论文集《威哉，大衍！》，在此基础上又进一步完成了对秦九韶《数术大略》的全面的校勘工作。这本论文集《威哉，大衍！》，我也联系过几个出版社，无果。现决定发表出来，免得埋没。这本电子书的下载地址是：

http://vixra.org/abs/1606.0092

The Power of DaYan—The Application of DaYan Matrix《威哉，大衍！》

此外，针对秦九韶关于调日法的问题，我对李锐“日法朔馀强弱考”作了全面考察，同时分析了何承天，李锐，秦九韶，陈久金关于调日法的论述，有所发现，得到一些结果，以期揭示调日法的本质。

这本电子书的下载地址是：

http://vixra.org/abs/1606.0091

On The Method of Regulating the Day-ratio“调日法”分析

我已经没有时间去继续探索中国古代数学了，之所以要在 2016 年把相关的成果公之于众，就是希望早日结束这项工作。

2017 年 9 月是秦九韶《数术大略（数书九章）》成书 770 周年的日子，我十分希望能够出版《数术大略》（石远东 斠诠版），以纪念秦九韶——这位中国历史上最伟大的数学家。