Cercurile Apollonius de rangul k

***Ion PĂTRAŞCU*[1]*, Florentin SMARANDACHE*[2]**

Abstract. In this paper, the notion of Apollonius circle of rank k is introduced and a number of results related to the classical Apollonius circles are generalized.
Keywords: circumcircle, symmedian, Cevian of rank k, Apollonius circle of rank k.
MSC 2010: 51M04.

Scopul acestui articol este de a introduce noţiunea de *cerc Apollonius de rangul k* şi de a generaliza anumite rezultate privind cercurile Apollonius.

Definiţia 1. Se numeşte *ceviană interioară de rangul k*, $k \in \mathbb{R}$, dreapta AA_k cu $A_k \in (BC)$ şi astfel încât

$$\frac{A_kB}{A_kC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^k. \tag{1}$$

Dacă A_k' este conjugatul armonic al punctului A_k în raport cu B şi C, atunci spunem că dreapta AA_k' este *ceviană exterioară de rangul k*.

Definiţia 2. Numim *cerc Apollonius de rangul k* în raport cu latura BC a triunghiului ABC, cercul care are ca diametru segmentul A_kA_k'.

Observaţie. În mod similar introducem cercurile Apollonius de rangul k relativ la laturile CA şi AB. Vom nota cu O_{A_k} centrul cercului Apollonius de rang k relativ la latura BC şi cu O_{B_k} şi O_{C_k} centrele celor relative la CA şi respectiv AB.

Teorema 1. *Cercul Apollonius de rang k este locul geometric al punctelor M din planul triunghiului ABC care satisfac relaţia*

$$\frac{MB}{MC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^k. \tag{2}$$

Demonstraţie. Fie M un punct al locului geometric (fig. 1), adică care satisface relaţia (2). Combinând (1) şi (2), rezultă că $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{A_kB}{A_kC}$ şi deducem, folosind reciproca teoremei bisectoarei, că MA_k este bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{BMC}$. Perpendiculara în M pe MA_k intersectează pe BC în A_k'', care este piciorul bisectoarei exterioare a triunghiului BMC, deci conjugatul armonic al lui A_k în raport cu B şi C, deci $A_k'' \equiv A_k'$ (coincid). Prin urmare, punctul M este pe cercul Apollonius de rang k relativ la latura BC.

Reciproc, să considerăm un punct N pe cercul Apollonius de rang k relativ la latura BC (fig. 1) şi să construim punctul C' astfel încât $\widehat{BNA_k} \equiv \widehat{A_kNC'}$ (deci

[1]Profesor, Colegiul Naţional ,,Fraţii Buzeşti", Craiova; *patrascu_ion@yahoo.com*
[2]Prof.dr., Universitatea New Mexico, USA; *fsmarandache@yahoo.com*

(NA_k este bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{BNC'}$). Deoarece $A'_kN \perp NA_k$ rezultă că A_k şi A'_k sunt conjugate armonic în raport cu B şi C'. Pe de altă parte, aceleaşi puncte sunt conjugate armonic în raport cu B şi C, de unde rezultă că punctul C' coincide cu C şi avem $\dfrac{NB}{NC} = \dfrac{A_kB}{A_kC} = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^k$.

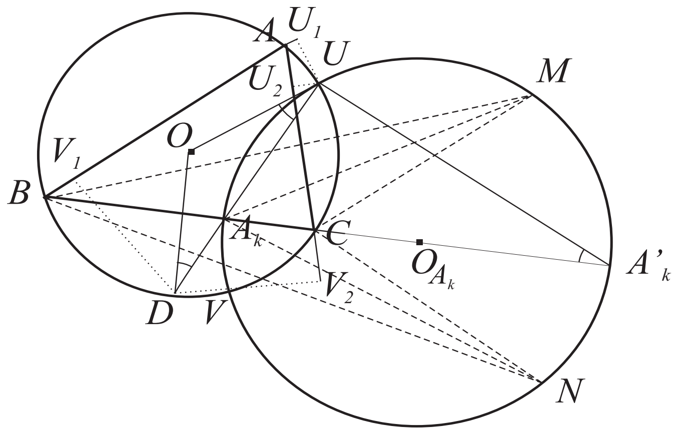

Fig. 1

Teorema 2. *Centrele cercurilor Apollonius de rang k asociate unui triunghi sunt coliniare* (*i.e. cercurile fac parte dintr-un fascicol*).

Demonstraţie. Să observăm că atât cevienele interioare de rang k, AA_k, BB_k, CC_k, cât şi cele exterioare, AA'_k, BB'_k, CC'_k sunt concurente. Figura $B'_kC_kB_kC'_kA_kA'_k$ este patrulater complet (fig. 2). Este cunoscut faptul că mijloacele diagonalelor unui astfel de patrulater sunt coliniare (*dreapta Newton-Gauss*). Cum aceste mijloace sunt punctele O_{A_k}, O_{B_k}, şi O_{C_k}, afirmaţia făcută este justificată.

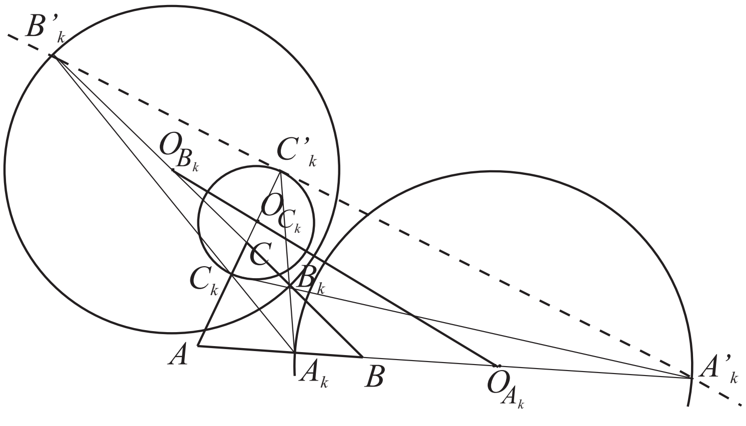

Fig. 2

Teorema 3. *Cercurile Apollonius de rang k ale unui triunghi sunt ortogonale cercului circumscris triunghiului.*

Demonstraţie. Fie U şi V punctele de intersecţie ale cercului Apollonius de centru O_{A_k} cu cercul circumscris triunghiului ABC şi D mijlocul arcului BC (fig. 1). Să arătăm mai întâi că punctele U, A_k, D sunt coliniare. În acest scop, să notăm cu A_k^* intersecţia dreptei UD cu BC. Din faptul că UA_k^* este bisectoare în ΔUBC avem că $\dfrac{A_k^*B}{A_k^*C} = \dfrac{UB}{UC}$, iar din faptul că U este pe cercul Apollonius de centru O_{A_k} avem relaţia $\dfrac{UB}{UC} = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^k$. Ca urmare, $\dfrac{A_k^*B}{A_k^*C} = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^k$ şi, ţinând seamă de (1), punctul A_k^* coincide cu A_k.

Unim O cu D şi U (fig. 1), observăm că $DO \perp BC$ şi $DU \perp UA'_k$ şi deducem că $\widehat{ODA_k} \equiv \widehat{UA'_kA_k}$. Cum $\widehat{OUA_k} \equiv \widehat{ODA_k}$, obţinem relaţia $\widehat{OUA_k} \equiv \widehat{UA'_kA_k}$, care arată că OU este tangentă cercului Apollonius de centru O_{A_k}. Analog se demonstrează ortogonalitatea pentru celelalte cercuri Apollonius.

Observaţie. Din Teorema 3 rezultă că axa radicală a cercurilor Apollonius de rang k este perpendiculara dusă din O pe dreapta $O_{A_k}O_{B_k}$.

Teorema 4. *Centrele cercurilor Apollonius de rang k ale unui triunghi sunt pe polara triliniară asociată punctului de intersecţie a cevienelor de rang $2k$.*

Demonstraţie. Conform Teoremei 3, $OU \perp UO_{A_k}$, deci UO_{A_k} este ceviana exterioară de rangul 2 pentru triunghiul BCU, deci simediana exterioară. Prin urmare $\dfrac{O_{A_k}B}{O_{A_k}C} = \left(\dfrac{UB}{UC}\right)^2 = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^{2k}$ (ultima egalitate are loc pentru că U aparţine cercului Apollonius de rang k asociat vârfului A).

Teorema 5. *Cercurile Apollonius de rangul k ale unui triunghi intersectează cercul circumscris triunghiului în două puncte care aparţin cevienelor interioară şi exterioară de rangul $k+1$.*

Demonstraţie. Fie U şi V punctele de intersecţie ale cercului Apollonius de centru O_{A_k} cu cercul circumscris triunghiului ABC (fig. 1). Ducem din U şi V perpendicularele UU_1, UU_2 şi VV_1, VV_2 pe AB şi respectiv AC. Patrulaterele $ABVC, ABCU$ sunt inscriptibile, rezultă asemănarea triunghiurilor BVV_1, CVV_2 şi BUU_1, CUU_2, de unde obţinem relaţiile:

$$\frac{VB}{VC} = \frac{VV_1}{VV_2}, \qquad \frac{UB}{UC} = \frac{UU_1}{UU_2}.$$

Dar $\dfrac{VB}{VC} = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^k$ şi $\dfrac{UB}{UC} = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^k$, deci

$$\frac{VV_1}{VV_2} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^k, \frac{UU_1}{UU_2} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^k.$$

Dacă X_a şi Y_a notează intersecţiile dreptelor AV şi respectiv AU cu BC, atunci

$\dfrac{X_aB}{X_aC} = \dfrac{AB}{AC} \cdot \dfrac{VV_1}{VV_2}$ şi $\dfrac{Y_aB}{Y_aC} = \dfrac{AB}{AC} \cdot \dfrac{UU_1}{UU_2}$, de unde

$$\frac{X_aB}{X_aC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^{k+1}, \qquad \frac{Y_aB}{Y_aC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^{k+1},$$

relaţii care arată că V şi U aparţin respectiv cevienei interioară şi cevienei exterioară de rangul $k+1$.

Definiţia 3. Dacă cercurile Apollonius de rangul k asociate unui triunghi au două puncte comune, atunci aceste puncte se numesc *centre izodinamice de rangul* k (le notăm W_k, W_k').

Din Teorema 1 rezultă imediat că W_k, W_k', centrele izodinamice de rangul k ale ΔABC, au proprietăţile:

$$W_kA \cdot BC^k = W_kB \cdot CA^k = W_kC \cdot AB^k, \qquad W_k'A \cdot BC^k = W_k'B \cdot CA^k = W_k'C \cdot AB^k.$$

Observaţii. 1) Cercurile Apollonius de rangul 1 sunt chiar cercurile Apollonius clasice (cevienele de rangul 1 sunt bisectoarele).

2) Dacă k=2, cevienele interioare de rangul 2 sunt simedianele, iar cele exterioare de rangul 2 sunt simedianele exterioare, adică tangentele în vârfurile triunghiului la cercul circumscris acestuia. În acest caz, pentru cercurile Apollonius de rangul 2, Teorema 2 devine:

Teorema 6. *Cercurile Apollonius de rangul 2 intersectează cercul circumscris triunghiului în câte două puncte care aparţin respectiv isogonalei antibisectoarei şi cevienei exterioare a acesteia.*

Demonstraţie. Rezultă din demonstraţia Teoremei 5. Facem precizarea că antibisectoarea este izotomica bisectoarei, iar izogonala antibisectoarei este ceviana de rangul 3.

Bibliografie

1. **C. Mihalescu** – *Geometria elementelor remarcabile*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1957.
2. **N.N. Mihăileanu** – *Lecţii complementare de geometrie*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1976.
3. **F. Smarandache, I. Pătraşcu** – *Geometry of Homological Triangle*, The Education Publisher Inc., Columbus, Ohio, SUA, 2012.
4. **V.Gh. Vodă** – *Triunghiul - ringul cu trei colţuri*, Editura Albatros, Bucureşti, 1979.