Proof Bill hypothesis - a consequence of the properties of invariant identity of a certain type

(elementary aspect)

Reuven Tint

Number Theorist, Israel

Email: reuven.tint@gmail.com

www.ferm-tint.blogspot.co.il

Annotation. A variant of the solution with the help of Bill hypothesis direct evidence "Great" Fermat's theorem elementary methods rows. New are "invariant identity" (keyword) and obtained by us in the text, the identity of the work, which allowed directly to solve the FLT, and several others.

§1

The proof of FLT

1.1. We obtain the following identity:

$$\boldsymbol{m} = \frac{(\boldsymbol{x_1}+\boldsymbol{x_2})^2+(\boldsymbol{x_1}+\boldsymbol{x_3})^2+\cdots+(\boldsymbol{x_1}+\boldsymbol{x_{m+2}})^2+(\boldsymbol{x_2}+\boldsymbol{x_3})^2+\cdots}{\boldsymbol{x_1^2}+\boldsymbol{x_2^2}+\cdots+\boldsymbol{x_{m+2}^2}}$$

$$\frac{\ldots+(\boldsymbol{x_2}+\boldsymbol{x_{m+2}})^2+\cdots+(\boldsymbol{x_{m+1}}+\boldsymbol{x_{m+2}})^2-(\boldsymbol{x_1}+\boldsymbol{x_2}+\cdots+\boldsymbol{x_{m+2}})^2}{\boldsymbol{x_1^2}+\boldsymbol{x_2^2}+\cdots+\boldsymbol{x_{m+2}^2}}$$

Here,
$0 \le m < \infty$- are arbitrary positive integers, including zero;
x_i-are arbitrary elements of arbitrary numerical systems, including zero;
$1 \le i \le m+2$ - are indexes. The value of each "m" is not dependent on the set values of the elements included in the invariant identity.

1.2. Fermat's Last Theorem - "The equation " $a^n + b^n = c^n$ "has no solutions when a, b, c, and n are all positive integers and n is greater than 2."

1.2.1. The proof for n = 1 and, for example, m=1.

$$m = 1 \equiv \frac{(x_1+x_2)^1+(x_1+x_3)^1+(x_2+x_3)^1-(x_1+x_2+x_3)^1}{x_1^1+x_2^1+x_3^1} =$$
$$= \frac{2(x_1^1+x_2^1+x_3^1)-(x_1^1+x_2^1+x_3^1)}{x_1^1+x_2^1+x_3^1} = 1 - \frac{A_1 = 0}{x_1^1+x_2^1+x_3^1}$$

$A_1 = 0$ – is a necessary condition.

1.2.1.1. Let $x_1 = a^1, x_2 = b^1, a^1 + b^1 = z$ – is a positive integer for arbitrary natural «a» and «b». But $a^1 + b^1 = c^1 = z$,then $c = z^{\frac{1}{1}}$– a positive integer - is sufficient condition.

1.2.2. The proof for n = 2 and m=1.

$$m = 1 \equiv \frac{(x_1+x_2)^2+(x_1+x_3)^2+(x_2+x_3)^2-(x_1+x_2+x_3)^2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2} =$$

$$= \frac{2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = 1 - \frac{A_2 = 0}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

and A_2 = 0 - necessary condition.

1.2.2.1. Let $x_1 = a^2, x_2 = b^2, a^2 + b^2 = z$ – a positive integer when «a» and «b» arbitrary natural numbers. And A_2 = 0. But if $a^2 + b^2 = c^2$, c = $p^2 + q^2$ - is natural when $a = p^2 - q^2$ and $b = 2pq$ (p and q – arbitrary coprime positive integers). Therefore, $c^2 = z^2$ and $c = z^{\frac{2}{2}}$ – will be natural is sufficient condition, because, as you know, these expressions give all solutions of $a^2 + b^2 = c^2$ in c2.oprime natural numbers.

1.2.2.2. Suppose that $a_1^2 + b_1^2 = z_1$ for all other relatively prime positive integers that can be the solutions of the equation in positive integers $a_1^2 + b_1^2 = c_1^2$. Then, $c_1^4 = z_1^2$ and c $_1$ = $z_1^{\frac{1}{2}}$ cannot be a natural number - the sufficiency of the condition is not satisfied. Thus, for n = 2 when $A_2 = 0$ and $z_1^{\frac{1}{2}}$- solutions in natural numbers there. This suggests the need to consider for n ≥ 1, both conditions: $A_i = 0$, or $A_j \neq 0$ - necessary, $z_n^{\frac{1}{n}}$ - sufficient.

1.2.3. The prof for n = 3, m = 1.

$$m = 1 \neq \frac{(x_1 + x_2)^3 + (x_1 + x_3)^3 + (x_2 + x_3)^3 - (x_1 + x_2 + x_3)^3}{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3} =$$
$$= \frac{2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)}{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3} = 1 - \frac{A_3 = 6\, x_1 x_2 x_3}{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3}$$

$A_3 =$ 6 $x_1 x_2 x_3 \neq 0$- is necessary condition .

1.2.3.1. Let $x_1 = a^3, x_2 = b^3, a^3 + b^3 = z$ –is a positive integer for arbitrary natural a , b and $A_3 \neq 0$. Suppose that $a^3 + b^3 = c^3$. Then, $c^6 = z^2$, c = $z^{\frac{2}{6}} = z^{\frac{1}{3}}$ - It cannot be a natural number - a sufficient condition.

1.2.4. The proof for n > 2 and m = 1 .

$$m = 1 \neq \frac{(x_1 + x_2)^n + (x_1 + x_3)^n + (x_2 + x_3)^n - (x_1 + x_2 + x_3)^n}{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3} =$$
$$= \frac{2(x_1^n + x_2^n + x_3^n) - (x_1^n + x_2^n + x_3^n)}{x_1^n + x_2^n + x_3^n} = 1 - \frac{A_n \neq 0}{x_1^n + x_2^n + x_3^n}$$

If n > 2 $A_n \neq 0$ - is a necessary condition

1.2.5.

$$m \neq \frac{\sum_{i=1, i<j}^{i=m+1, j=m+2} \left(x_i + x_j\right)^n - (x_1 + x_2 + \cdots + x_{m+2})^n}{x_1^n + x_2^n + \cdots + x_{m+2}^n} =$$

$$= \frac{(m+1)(x_1^n + x_2^n + \cdots + x_{m+2}^n) - (x_1^n + x_2^n + \cdots + x_{m+2}^n + A_n \neq 0)}{x_1^n + x_2^n + \cdots + x_{m+2}^n} =$$

$$= m - \frac{A_n \neq 0}{x_1^n + x_2^n + \cdots + x_{m+2}^n}$$

for $n > 2$ $A_n \neq 0$ – is a necessary condition.

1.2.5. 1.

Let $x_1 = a^n, x_2 = b^n, a^n + b^n = z$ - is a positive integer for arbitrary

natural «a» and «b». Suppose that n > 2 $a^n + b^n = c^n$. Then,

$c^{2n} = z^2$ and c = $z^{\frac{1}{n}}$, which is only possible for n = 1 and n = 2 (with considering 1.2.2.)- is a sufficient condition.

1.3. Thus, for n >2 $A_n \neq 0$ and c = $z^{\frac{1}{n}}$ are necessary and sufficient condition for insolvability of the equation $a^n + b^n = c^n$ in the natural number a,b,c .

1.4. From §1, in the end, it follows that for n> 2, $A_n \neq 0$ is a necessary and sufficient condition for unsolvability of equations

$a^n + b^n = c^n$ in the natural numbers a, b, c. The proof is complete.

1.5. Another variant of the proof of the FLT. example.(3) ,item..2.2.

§2

The proof of Beal's Conjecture

2.1. Beal conjecture : «If A^x + B^y =C^z,where A,B,C,x,y,z - are natural numbers with x,y,z>2 then A,B,C have a common prime factor » (Wikipedia. "Open mathematical problems," in particular, the open (unresolved) mathematical problems).

2.1.1. Let in addition to the .2.1. § 2 in the A^x + B^y =C^z (A,B,C)=1- coprime (As will be shown in §3, addition significantly), x_1=A^x , x_2=B^y, A^x +B^y=r_C a natural numbers for arbitrary natural A and B.

Suppose that A^x + B^y =C^z for x,y,z>2. Then, similar to the § 1 the above C^{2z} = r_C^2 and C = $r_C^{\frac{1}{z}}$- cannot be a natural number.

2.1.2. By analogy with 2.1.1. § 2 – operations with C^z– B^y =A^x = r_A and C^z– A^x = B^y=r_B.

2.1.3. Thus, the equation A^x + B^y =C^z for (A,B,C) = 1 and x,y,z >2 – natural insoluble in natural numbers, and therefore cannot have a common prime factor. The proof is complete.

2.1.4. Finally, taking into account §§1 and 2, the equation A^x+ B^y = C^z at

(A, B, C) = 1 - are relatively prime natural numbers and x, y, z> 2 - natural

numbers each, including x = y = z = n, has no solution in the natural numbers A, B, C.

§3

3.1 If, in particular, A +B=C, (A, B, C) =1- is coprime, then the equation A_1+B_1= C_1 ((A_1, B_1, C_1)≠1 – functions A, B, C) are infinite number of solutions in positive integers when, particularly, (x,y,z)=1- are arbitrary natural and have a common prime factor.

3.2.1. Let

$$A + B \equiv C,$$

where A, B - are arbitrary natural numbers, as

$$A^{\alpha x - pyz = 1} + B^{\beta y - qxz = 1} \equiv C^{\gamma z - mxy = 1} \ [\mathbf{1}]$$

Multiplying $[\mathbf{1}]$ by

$$A^{pyz} B^{qxz} C^{mxy}$$

, we obtain

$$(A^{\alpha} B^{qz} C^{my})^x + (A^{pz} B^{\beta} C^{mx})^y \equiv$$

$$\equiv (A^{py} B^{qx} C^{\gamma})^z \ [\mathbf{2}].$$

All values are indicators $[\mathbf{2}]$ we obtain from the equations

$$\begin{aligned} \alpha x - pyz &= 1 \\ \beta y - qxz &= 1 \quad [\mathbf{3}] \\ \gamma z - mxy &= 1 \end{aligned}$$

, where $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, p, q, m$ - corresponding solution $[\mathbf{3}]$ natural numbers.

3.2.2. If $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, p_0, q_0, m_0$ any (or minimal) solutions of equations positive integers for fixed values x, y, z
(G.Devenport,”THE HIGHER ARITHMETIC”,”Science”,Fizmatgiz,Moscow, 1965,p.88-89,item5”),

then

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + yzQ_1 \quad p = p_0 + xQ_1 \\ \beta &= \beta_0 + xzQ_2 \quad q = q_0 + yQ_2 \\ \gamma &= \gamma_0 + xyQ_3 \quad m = m_0 + zQ_3, \end{aligned}$$

$Q_1, Q_2, Q_3 -$ are arbitrary natural (whole) numbers, or zero, and

$$\begin{aligned} &(A^{\alpha_0 + yzQ_1} B^{q_0 z + yzQ_2} C^{m_0 y + yzQ_3})^x + \\ &+ (A^{p_0 z + xzQ_1} B^{\beta_0 + xzQ_2} C^{m_0 x + xzQ_3})^y = \qquad [4] \\ &= (A^{p_0 y + xyQ_1} B^{q_0 x + xyQ_2} C^{\gamma_0 + xyQ_3})^z. \end{aligned}$$

3.3 Let $AP + BP \equiv CP$ $[\mathbf{5}]$ for arbitrary natural numbers A and B ,where P -is arbitrary prime number. Then, with respect to $[\mathbf{2}]$

$$(P^{\alpha + qz + my} A^{\alpha} B^{qz} C^{my})^x + (P^{pz + \beta + mx} A^{pz} B^{\beta} C^{mx})^y \equiv$$
$$\equiv (P^{py + qx + \gamma} A^{py} B^{qx} C^{\gamma})^z \ [\mathbf{6}]$$

3.3.1 $A = 2; B = 3; C = 5; P = 7$

$$x = 4; y = 5; z = 7$$

Since,

$$\begin{gathered} \alpha \times 4 - p \times 5 \times 7 = 1 \\ \alpha = 9; p = 1 \\ \beta \times 5 - q \times 4 \times 7 = 1 \\ \beta = 17; q = 3 \\ \gamma \times 7 - m \times 4 \times 5 = 1 \\ \gamma = 3; m = 1. \end{gathered}$$

Thus,

$$(7^{35}\times 2^{9}\times 3^{21}\times 5^{5})^{4}+(7^{28}\times 2^{7}\times 3^{17}\times 5^{4})^{5}=$$
$$=(7^{20}\times 2^{5}\times 3^{12}\times 5^{3})^{7}.$$

3.3.2. An identity: $[(2A^{xy+1})^{y}\ ]^{x}\ +\ [(2A^{xy+1}))^{x}\ ]]^{y}\ \equiv (2A^{xy})^{xy+1}$.
Here, A, x, y - positive arbitrary integer numbers, including zero.

3.3.2.1. This identity allows us to obtain the following equation:

$[(2A^{abxy+1})^{aby}]^{x}\ +\ \ [(2A^{abxy+1})^{abx}]^{y}\ =\ \ [(2A^{abxy})^{c}]^{z}$.

Here, (x, y, z) = 1- a, particularly arbitrary coprime integers,

cz = abxy + 1, a, b, c are found from the equation cz - abxy = 1 (example 3.2.2.).

For example: x = 5, y = 7, z = 11, 11c - 5.7.ab = 1 11.86 - 35.27 = 1, where,

a = 3, b = 9, c = 86 and

$$[(2A^{27.35+1}\ )^{27.7}]^{5}\ +\ [(2A^{27.35+1})^{27.5}]^{7}\ =[(2A^{27.35})^{86}]^{11}.$$

Thus, you can get all the countless decisions that equation.

§ 4

4.1. One option of finding solutions in positive integers the equation

$A^{4}\ +\ \ B^{3}\ =C^{2}$ at (A, B, C) = 1, or A, B, C - of all even violating values

performance of the original equation degrees when cutting.

4.1.1. We have the identity: $[y(y^{2}+\ \ 3)]^{2}$ - $(3y^{2}\ \ +\ \ 1)\ ^{2}$= $(y^{2}\ \ -\ \ 1)^{3}$.

Let $3y^{2}\ +\ 1\ =\ x^{2}$. Then, $x^{2}\ -\ 3y^{2}\ =\ 1$ and $[y(y^{2}+\ \ 3)]^{2}\ -\ x^{4}\ =\ (y^{2}\ \ -\ \ 1)^{3}$.

According V.Serpinskomu ("On reshengii equations in integers" Fizmatgiz, Moscow, 1961 str.29-30)

$x_{k+1}\ \ =x_{1}\,x_{k}\ +\ 3y_{1}y_{k}\qquad y_{k+1}\ =\boldsymbol{y_{1}\,x_{k}\ +\ x_{1}\,y_{k}}$ **for 1≤ $\kappa < \infty$. When $\boldsymbol{x_{1}}$=2, $\boldsymbol{y_{1}}$=1**

2^{2} - 3 . 1 = 1 , and tdi etc. recursively to infinity:

$7^{4}\ +\ 15^{3}\ =\ 76^{2}$, $26^{4}\ +\ 224^{3}\ =\ 3420^{2}$, $97^{4}\ +\ 3135^{3}\ =\ 175784^{2}$, etc.

4.2.Tam same (page 63) is a process for the preparation of similar solutions, such as:

$28^{2}\ +\ 8^{3}\ =\ 6^{4}$, $1176^{2}\ +\ 49^{3}\ =\ 35^{4}$and (method not specified) $27^{2}\ +\ 18^{3}\ =\ 9^{4}$,

$63^{2}\ +\ 36^{3}\ =\ 15^{4}$.

References:

1. H.DABENPORT, "THE HIGHER ARITHMETIC", HARPER & SROTHERS, NEW YORK

2. V.Serpinsky, "On reshengii equations in integers" Fizmatgiz, Moscow,

1961p.p.29-30

(3). Reuven Tint (www.ferm-tint.blogspot.co.il) " "»"Unique invariant identity and the ensuing unique consequences (elementary aspect"»".

Доказательство гипотезы Била – следствие свойств инвариантного тождества определенного типа (элементарный аспект)

Reuven Tint

Number Theorist, Israel

Email: reuven.tint@gmail.com

www.ferm-tint.blogspot.co.il

Аннотация. Предложен вариант решения гипотезы Била с помощью прямого доказательства» Великой» теоремы Ферма элементарными методами. Новыми являются «инвариантное тождество « (ключевое слово) и полученные нами приведенные в тексте работы тождества, позволившие напрямую решить ВТФ и гипотезу Била,и ряд других.

§1

Доказательство ВТФ

1.1.Получено следующее тождество:

$$\boldsymbol{m} = \frac{(\boldsymbol{x_1}+\boldsymbol{x_2})^2+(\boldsymbol{x_1}+\boldsymbol{x_3})^2+\cdots+(\boldsymbol{x_1}+\boldsymbol{x_{m+2}})^2+(\boldsymbol{x_2}+\boldsymbol{x_3})^2+\cdots}{\boldsymbol{x_1^2}+\boldsymbol{x_2^2}+\cdots+\boldsymbol{x_{m+2}^2}}$$

$$\frac{\ldots+(\boldsymbol{x_2}+\boldsymbol{x_{m+2}})^2+\cdots+(\boldsymbol{x_{m+1}}+\boldsymbol{x_{m+2}})^2-(\boldsymbol{x_1}+\boldsymbol{x_2}+\cdots+\boldsymbol{x_{m+2}})^2}{\boldsymbol{x_1^2}+\boldsymbol{x_2^2}+\cdots+\boldsymbol{x_{m+2}^2}}$$

Здесь,
$0 \le m < \infty$- произвольные целые положительные числа, включая нуль;
x_i- произвольные элементы произвольных числовых систем, включая нуль;
$1 \le i \le m+2$ - индексы.
Значение каждого "m" не зависит от значений элементов множеств, входящих в это инвариантное тождество.

1.2. "Великая теорема Ферма ". "Для любого натурального n >2 уравнение $a^n + b^n = c^n$ не имеет натуральных решений a,b ,c."

1.2.1. Доказательство для n = 1 и,например, m=1 .

$$m = 1 \equiv \frac{(x_1+x_2)^1+(x_1+x_3)^1+(x_2+x_3)^1-(x_1+x_2+x_3)^1}{x_1^1+x_2^1+x_3^1} =$$

$$= \frac{2(x_1^1+x_2^1+x_3^1)-(x_1^1+x_2^1+x_3^1)}{x_1^1+x_2^1+x_3^1} = 1 - \frac{A_1 = 0}{x_1^1+x_2^1+x_3^1}$$

$A_1 = 0$ – условие необходимое.

1.2.1.1. Пусть $x_1 = a^1, x_2 = b^1, a^1 + b^1 = z$ – натуральное число при произвольных натуральных «a « и «b». Но $a^1 + b^1 = c^1 = z$, значит,

$c = z^{\frac{1}{1}}$– натуральное число – условие достаточное.

1.2.2. Доказательство для n = 2 и m=1 .

$$m = 1 \equiv \frac{(x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - (x_1 + x_2 + x_3)^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} =$$
$$= \frac{2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = 1 - \frac{A_2 = 0}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

и $A_2 = 0$ – условие необходимое.

1.2.2.1. Пусть $x_1 = a^2, x_2 = b^2, a^2 + b^2 = z$ – натуральное число при «a» и «b» произвольных натуральных числах . И $A_2 = 0$.Но если $a^2 + b^2 = c^2$, c = $p^2 + q^2$ - будет натуральным при $a = p^2 - q^2$ и $b = 2\,p\,q$ (p и q – произвольные взаимно простые целые положительные числа). Тогда, $c^2 = z^2$ и $c = z^{\frac{2}{2}}$ – будет натуральным -условие достаточное, поскольку, как известно, эти выражения дают все решения уравнения $a^2 + b^2 = c^2$ во взаимно простых натуральных числах.

1.2.2.2. Предположим,что $\mathrm{a}_1^2 + \mathrm{b}_1^2 = \mathrm{z}_1$ для всех остальных взаимно простых натуральных чисел,которые может быть могут являться решениями в натуральных числах уравнения $\mathrm{a}_1^2 + \mathrm{b}_1^2 = \mathrm{c}_1^2$. Тогда, $\mathrm{c}_1^4 = \mathrm{z}_1^2$ и $\mathrm{c}_1 = \mathrm{z}_1^{\frac{1}{2}}$ не может быть натуральным числом – условие достаточности не выполнено. Таким образом, для $\mathrm{n} = 2$ при $\mathrm{A}_2 = 0$ и $\mathrm{z}_1^{\frac{1}{2}}$ - решений в натуральных числах нет. А это говорит о необходимости рассмотрения для $\mathrm{n} \geq 1$ обоих условий: $\mathrm{A}_\mathrm{i} = 0$, или $\mathrm{A}_\mathrm{j} \neq 0$ – необходимых, $\mathrm{z}_\mathrm{n}^{\frac{1}{\mathrm{n}}}$ – достаточного.

1.2.3. Доказательство для n = 3 , m = 1.

$$m = 1 \neq \frac{(x_1 + x_2)^3 + (x_1 + x_3)^3 + (x_2 + x_3)^3 - (x_1 + x_2 + x_3)^3}{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3} =$$
$$= \frac{2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)}{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3} = 1 - \frac{A_3 = 6\,x_1 x_2 x_3}{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3}$$

$A_3 =$ 6 $x_1x_2x_3 \neq$ 0- условие необходимое.

1.2.3.1. Пусть $x_1 = a^3, x_2 = b^3, a^3 + b^3 = z$ –натуральное число при произвольных натуральных a , b и $A_3 \neq$ 0 .Предположим,что a^3 +b^3 = c^3. Тогда, c^6 = z^2 , c = $z^{\frac{2}{6}}$ = $z^{\frac{1}{3}}$ - не может быть натуральным числом – условие достаточное.

1.2.4. Доказательство для n > 2 и m = 1 .

$$m = 1 \neq \frac{(x_1 + x_2)^n + (x_1 + x_3)^n + (x_2 + x_3)^n - (x_1 + x_2 + x_3)^n}{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3} =$$

$$= \frac{2(x_1^n + x_2^n + x_3^n) - (x_1^n + x_2^n + x_3^n)}{x_1^n + x_2^n + x_3^n} = 1 - \frac{A_n \neq 0}{x_1^n + x_2^n + x_3^n}$$

Для n > 2 $A_n \neq$ 0 - условие необходимое.

1.2.5.

$$m \neq \frac{\sum_{i=1,i<j}^{i=m+1,j=m+2}\left(x_i + x_j\right)^n - (x_1 + x_2 + \cdots + x_{m+2})^n}{x_1^n + x_2^n + \cdots + x_{m+2}^n} =$$

$$= \frac{(m+1)(x_1^n + x_2^n + \cdots + x_{m+2}^n) - (x_1^n + x_2^n + \cdots + x_{m+2}^n + A_n \neq 0)}{x_1^n + x_2^n + \cdots + x_{m+2}^n} =$$

$$= m - \frac{A_n \neq 0}{x_1^n + x_2^n + \cdots + x_{m+2}^n}$$

для $n > 2$ $A_n \neq$ 0 - условие необходимое.

1.2.5. 1. Пусть $x_1 = a^n, x_2 = b^n, a^n + b^n = z$ - натуральное число при произвольных натуральных «a» и «b» .Предположим ,что для n > 2 $a^n + b^n = c^n$. Тогда , c^{2n} = z^2 и c = $z^{\frac{1}{n}}$, что возможно только для n = 1 и n = 2 (с учетом п.1.2.2.) - условие достаточное.

1.3. Таким образом , для n >2 $A_n \neq 0$ $и$ c = $z^{\frac{1}{n}}$ являются необходимыми и достаточными условиями неразрешимости уравнения $a^n + b^n = c^n$ в натуральных числах a,b,c .

1.4. Из §1, в конечном итоге, следует,что для n > 2 $A_n \neq 0$ является необходимым и достаточным условием неразрешимости уравнения $a^n + b^n = c^n$ в натуральных числах a,b,c. Доказательство завершено.

1.5. Другой вариант доказательства ВТФ см.в (3) ,п.2.2.

§2

Доказательство гипотезы Била

2.1. Гипотеза Била : «Верно ли,что если $A^x + B^y = C^z$,где A,B,C,x,y,z-натуральные и x,y,z>2 ,то A,B,C имеют общий простой делитель» (Википедия. «Открытые математические проблемы»,в частности,открытые(нерешенные)математические проблемы).

2.1.1. Пусть дополнительно к п.2.1. § 2 в $A^x + B^y = C^z$ (A,B,C)=1-взаимно просты (как будет показано ниже в §3, дополнение существенно), $x_1 = A^x$, $x_2 = B^y$, $A^x + B^y = r_C$ натуральное число при произвольных натуральных A и B. Предположим,что $A^x + B^y = C^z$ при x,y,z>2. Тогда,по аналогии с § 1 вышеизложенного, $C^{2z} = r_C^2$ и C = $r_C^{\frac{1}{z}}$- не может быть натуральным числом.

2.1.2. По аналогии с п.2.1.1. § 2 – операции с $C^z - B^y = A^x = r_A$ и $C^z - A^x = B^y = r_B$. .

2.1.3. Таким образом ,уравнение $A^x + B^y = C^z$ при (A,B,C) = 1 и x,y,z >2 – натуральных неразрешимо в натуральных числах,а значит, не может иметь общего простого делителя. Доказательство завершено.

2.1.4. Окончательно, с учетом §§1 и 2, уравнение $A^x + B^y = C^z$ при

(A,B,C) = 1 – взаимно простых натуральных числах и x,y,z>2 – натуральных

числах каждое , включая x=y=z=n , не имеет решений в натуральных числах A,B,C.

§3

1. **3.1.** Если, в частности, A +B=C,(A,B,C)=1-взаимно просты,то уравнения $A_1 + B_1 = C_1$ ((A_1, B_1, C_1)≠1 – функции A,B,C)имеют бесчисленное множество решений в натуральных числах при, в частности,(x,y,z)=1-произвольных натуральных ,и имеют общий простой делитель.

3.2.1. Представим

$$A + B \equiv C,$$

где A, B - произвольные натуральные числа, в виде

$$A^{\alpha x - pyz = 1} + B^{\beta y - qxz = 1} \equiv C^{\gamma z - mxy = 1} \quad [\mathbf{1}]$$

Умножив $[\mathbf{1}]$ на $A^{pyz}B^{qxz}C^{mxy}$, получим $(A^{\alpha}B^{qz}C^{my})^{x} + (A^{pz}B^{\beta}C^{mx})^{y} \equiv (A^{py}B^{qx}C^{\gamma})^{z}$ $[\mathbf{2}]$.
Все значения параметров показателей степени $[\mathbf{2}]$ находятся из уравнений

$$\begin{gathered} \alpha x - pyz = 1 \\ \beta y - qxz = 1 \quad [\mathbf{3}] \\ \gamma z - mxy = 1 \end{gathered}$$

, где $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, p, q, m$ -соответствующие решениям уравнений $[\mathbf{3}]$ натуральные числа.

3.2.2. Если $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, p_0, q_0, m_0$ какие-либо (или минимальные) решения уравнений в целых положительных числах при фиксированных значениях x, y, z(Г.Дзвенпорт,»Высшая арифметика»,»Наука»,Главфизматгиз,Москва, **1965,стр.88-89,п.5),**
то

$$\begin{gathered} \alpha = \alpha_0 + yzQ_1 \quad p = p_0 + xQ_1 \\ \beta = \beta_0 + xzQ_2 \quad q = q_0 + yQ_2 \\ \gamma = \gamma_0 + xyQ_3 \quad m = m_0 + zQ_3, \end{gathered}$$

Q_1, Q_2, Q_3 –произвольные натуральные (целые) числа, или нуль, и

$$\begin{gathered} (A^{\alpha_0+yzQ_1}B^{q_0z+yzQ_2}C^{m_0y+yzQ_3})^{x} + \\ +(A^{p_0z+xzQ_1}B^{\beta_0+xzQ_2}C^{m_0x+xzQ_3})^{y} = \qquad [4] \\ = (A^{p_0y+xyQ_1}B^{q_0x+xyQ_2}C^{\gamma_0+xyQ_3})^{z}. \end{gathered}$$

3.3. Пусть $AP + BP \equiv CP$ $[\mathbf{5}]$ при произвольных натуральных числах A и B ,где P -произвольное простое число. Тогда, с учётом $[\mathbf{2}]$

$$\begin{gathered} (P^{\alpha+qz+my}A^{\alpha}B^{qz}C^{my})^{x} + (P^{pz+\beta+mx}A^{pz}B^{\beta}C^{mx})^{y} \equiv \\ \equiv (P^{py+qx+\gamma}A^{py}B^{qx}C^{\gamma})^{z} \quad [\mathbf{6}] \end{gathered}$$

3.3.1. $A = 2; B = 3; C = 5; P = 7$

$$x = 4; y = 5; z = 7$$

Тогда,

$$\begin{gathered} \alpha \times 4 - p \times 5 \times 7 = 1 \\ \alpha = 9; p = 1 \\ \beta \times 5 - q \times 4 \times 7 = 1 \\ \beta = 17; q = 3 \\ \gamma \times 7 - m \times 4 \times 5 = 1 \\ \gamma = 3; m = 1. \end{gathered}$$

Отсюда,

$$\begin{gathered} (7^{35} \times 2^{9} \times 3^{21} \times 5^{5})^{4} + (7^{28} \times 2^{7} \times 3^{17} \times 5^{4})^{5} = \\ = (7^{20} \times 2^{5} \times 3^{12} \times 5^{3})^{7}. \end{gathered}$$

3.3.2. Получено тождество: $[(2A^{xy+1})^{y}\,]^{x} + [(2A^{xy+1}))^{x}\,]]^{y} \equiv (2A^{xy})^{xy+1}$.

Здесь,A,x,y – произвольные целые п оложительные числа,включая нуль.

3.3.2.1.Это тождество позволяет получить следующее уравнение:

$$[(2\mathrm{A}A^{abxy+1})^{aby}]^{x} + [(2A^{abxy+1})^{abx}]^{y}\ ] = [(2A^{abxy})^{c}]^{z}.$$

Здесь,(x,y,z)=1- в ,частности,произвольные взаимно простые натуральные числа,

cz=abxy + 1, a,b,c находятся из уравнения cz – abxy = 1 (см.п3.2.2.).

Например: x=5 , y=7 , z = 11 , 11c – 5.7.ab =1 , 11.86 – 35.27 = 1, откуда,

a=3, b=9 , c = 86 и

$$[(2A^{27.35+1}\ )^{27.7}]^{5} + [(2A^{27.35+1})^{27.5}]^{7} = [(2A^{27.35})^{86}]^{11}.$$

Таким образом ,можно получить все бесчисленное множество решений этого уравнения.

§ 4

4.1. Один из вариантов нахождения решений в натуральных числах уравнения

$A^4 + B^3 = C^2$ при (A,B,C) = 1, или A,B,C - всех четных, нарушающих значения

показателей степеней исходного уравнения при сокращении.

4.1.1. Имеем тождество : $[y(y^2 + 3)]^2$ - $(3y^2 + 1)\ ^2$= $(y^2 - 1)^3$.

Пусть 3$y^2 + 1 = x^2$. Тогда, x^2 - 3y^2 = 1 и $[y(y^2 + 3)]^2 - x^4 = (y^2 - 1)^3$.

По В.Серпинскому(«О решенгии уравнений в целых числах» ,Физматгиз,Москва, 1961,стр.29-30)

$x_{k+1} = x_1\, x_k + 3y_1 y_k \qquad y_{k+1} = \boldsymbol{y_1\, x_k + x_1\, y_k}$ для $1 \leq к < \infty$.

При x_1=2, y_1=1 2^2 - 3. 1 = 1, и т.д.и т.п. рекуррентно до бесконечности:

$7^4 + 15^3 = 76^2$, $26^4 + 224^3 = 3420^2$, $97^4 + 3135^3 = 175784^2$ и т.д.

4.2.Там же (стр.63) приведен способ получения аналогичных решений,например:

$28^2 + 8^3 = 6^4$, $1176^2 + 49^3 = 35^4$ и (способ не указан) $27^2 + 18^3 = 9^4$,

$63^2 + 36^3 = 15^4$.

.

Литература:

1. H.DABENPORT ,“THE HIGHER ARITHMETIC”,HARPER & SROTHERS,NEW YORK

2. В.Серпинский, «О решенгии уравнений в целых числах» ,Физматгиз,Москва,

1961,стр.29-30,63.

(3). Reuven Tint (www.ferm-tint.blogspot.co.il) «Уникальное инвариантное тождество и вытекающие из него уникальные следствия» (элементарный аспект),2016.