FLORENTIN SMARANDACHE

Quelques propriétés des medianes

In Florentin Smarandache: “Généralisations et Généralités”. Fès (Maroc): Édition Nouvelle, 1984.

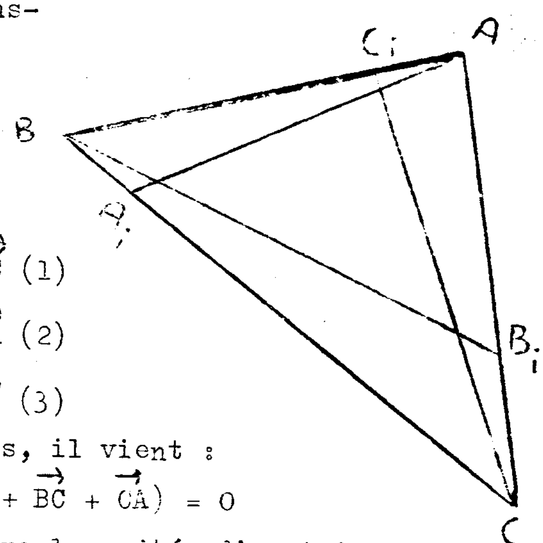
QUELQUES PROPRIETES DES MEDIANES

Cet article généralise ceratins résultats sur les médianes (voir [1] p.97-99). On appelle médianes les segments de droite qui passent par un sommet du triangle et partagent le côté opposé en n parties égales. Une médiane est appelée d'ordre i si elle partage le côté opposé dans le rapport i/n.

Pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, les médianes d'ordre i (c'est-à-dire AA_i, BB_i et CC_i) ont les propriétés suivantes :

1° Avec ces 3 segments on peut construire un triangle.

2° $|AA_i|^2 + |BB_i|^2 + |CC_i|^2 = \dfrac{i^2 - i.n + n^2}{n^2}(a^2+b^2+c^2)$.



Preuves.

$$\overrightarrow{AA_i} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_i} = \overrightarrow{AB} + \frac{i}{n}\overrightarrow{BC} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{BB_i} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB_i} = \overrightarrow{BC} + \frac{i}{n}\overrightarrow{CA} \quad (2)$$

$$\overrightarrow{CC_i} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC_i} = \overrightarrow{CA} + \frac{i}{n}\overrightarrow{AB} \quad (3)$$

En additionnant ces 3 relations, il vient :

$$\overrightarrow{AA_i} + \overrightarrow{BB_i} + \overrightarrow{CC_i} = \frac{i+n}{n}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = 0$$

donc les 3 médianes peuvent être les côtés d'un triangle.

(2) En élevant au carré les 3 relations et en faisant la somme on obtient :

$$|AA_i|^2 + |BB_i|^2 + |CC_i|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \frac{i^2}{n^2}(a^2+b^2+c^2) + $$
$$+ \frac{i}{n}(2\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + 2\,\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} + 2\,\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}) \qquad (4)$$

Puisque $2\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -2\,ca\cos B = b^2 - c^2 - a^2$ (th. du cosinus) , en reportant ceci dans la relation (4) on a la relation cherchée.

Bibliographie :

[1] Vodă, Dr.Viorel Gh. - "Surprize în matematica elementară", Editura Albatros, Bucarest, 1981.