FLORENTIN SMARANDACHE

Sur la resolution d'équations du second degré a deux inconnues dans *Z*

In Florentin Smarandache: "Généralisations et Généralités". Fès (Maroc): Édition Nouvelle, 1984.

SUR LA RESOLUTION D'EQUATIONS DU SECOND DEGRE A DEUX INCONNUES DANS Z

<u>Propriété 1</u> : L'équation $x^2-y^2 = c$ admet des solutions entières si et seulement si c appartient à 4Z ou est impair.

Preuve : l'équation $(x-y)(x+y) = c$ admet des solutions dans Z ssi il existe c_1 et c_2 de Z tels que $x-y = c_1$, $x+y = c_2$, et $c_1c_2 = c$. D'où $x = \frac{c_1+c_2}{2}$ et $y = \frac{c_2-c_1}{2}$. Mais x et y sont des entiers ssi $c_1+c_2 \in 2Z$, $c_2-c_1 \in 2Z$, c'est-à-dire :

1) ou bien c_1 et c_2 sont impairs, d'où c impair (et réciproquement).

2) ou bien c_1 et c_2 sont pairs, d'où $c \in 4Z$. Réciproquement, si $c \in 4Z$, alors on peut décomposer c en deux facteurs c_1 et c_2 pairs, et tels que $c_1c_2 = c$.

<u>Remarque 1</u> :
La propriété 1 est vraie aussi pour la résolution dans N, puisqu'on peut supposer $c \geqslant 0$ (dans le cas contraire, on multiplie l'équation par (-1)), et on prend $c_2 \geqslant c_1 \geqslant 0$, d'où $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$.

<u>Propriété 2</u> : L'équation $x^2 - dy^2 = c^2$ (où d n'est pas un carré parfait), admet une infinité de solutions dans N .

Preuve : soient $x = ck_1$, $k_1 \in N$ et $y = ck_2$, $k_2 \in N$, $c \in N$.

Il en résulte que $k_1^2 - dk_2^2 = 1$, où l'on reconnaît l'équation de Pell-Fermat, qui admet une infinité de solutions dans N , (u_n,v_n). Alors $x_n=cu_n$, $y_n=cv_n$ constituent une infinité de solutions naturelles de notre équation.

<u>Propriété 3</u> : L'équation $ax^2-by^2 = c \ (\neq 0)$, où $ab = k^2$ $(k \in Z)$, admet un nombre fini de solutions naturelles.

Preuve : on peut considérer a,b,c comme des nombres positifs : dans le cas contraire, on multiplie éventuellement l'équation par (-1) et on change le nom des variables. Multiplions l'équation par a, on aura :

$z^2-t^2 = d$ avec $z = ax \in N$, $t = ky \in N$ et $d = ac > 0$. **(1)**

On résout comme dans la propriété 1, ce qui donne z et t. Mais dans (1) on a un nombre fini de solutions naturelles, parce qu'il existe un nombre fini de diviseurs entiers pour un nombre de N^*. Comme les couples (z,t) sont en nombre limité, bien sûr les couples (z/a,t/k) aussi, ainsi que les couples (x,y).

<u>Propriété 4</u> : Si $ax^2-by^2 = c$, où $ab \neq k^2$ $(k \in Z)$, admet une solution particulière non triviale dans N, alors elle admet une infinité de solutions dans N.

Preuve : on pose :
$$(2) \begin{cases} x_n = x_0 u_n + b y_0 v_n \\ y_n = y_0 u_n + a x_0 v_n \end{cases} \qquad (n \in N)$$
où (x_0, y_0) est la solution particulière naturelle pour l'équation initiale, et $(u_n, v_n)_{n \in N}$ est la solution générale naturelle pour l'équation : $u^2-abv^2 = 1$, nommée la résolvante Pell, qui admet une infinité de solutions.

Alors $ax_n^2-by_n^2 = (ax_0^2-by_0^2)(u_n^2-abv_n^2) = c$.

Donc (2) vérifie l'équation initiale.