FLORENTIN SMARANDACHE

Sur quelques progressions

In Florentin Smarandache: “Généralisations et Généralités”. Fès (Maroc): Édition Nouvelle, 1984.

SUR QUELQUES PROGRESSIONS

Dans cet article on construit des ensembles qui ont la propriété suivante : quel que soit leur partage en deux sous-ensembles, au moins l'un de ces sous-ensembles contient au moins trois éléments en progression arithmétique (ou bien géométrique).

Lemme 1 : L'ensemble des nombres naturels ne peut pas être partagé en deux sous-ensembles ne contenant ni l'un ni l'autre 3 nombres en progression arithmétique.

Supposons le contraire, et soient M_1 et M_2 les deux sous-ensembles. Soit $k \in M_1$.

a) Si $k+1 \in M_1$, alors $k-1$ et $k+2$ sont dans M_2, sinon on pourrait construire une progression arithmétique dans M_1. Pour la même raison, puisque $k-1$ et $k+2$ sont dans M_2, alors $k-4$ et $k+5$ sont dans M_1. Donc :

$k+1$ et $k+5$ sont dans M_1 donc $k+3$ est dans M_2 ;

$k-4$ et k sont dans M_1 donc $k+4$ est dans M_2 ;

on a obtenu que M_2 contient $k+2$, $k+3$ et $k+4$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

b) si $k+1 \notin M_1$ alors $k+1 \in M_2$. Analysons l'élément $k-1$.

Si $k-1 \in M_1$; on est dans le cas (a) où deux éléments consécutifs appartiennent au même ensemble.

Si $k-1 \in M_2$. Alors, puisque $k-1$ et $k+1$ sont dans M_2, il en résulte que $k-3$ et $k+3 \notin M_2$, donc $\in M_1$. Mais on obtient la progression arithmétique $k-3$, k, $k+3$ dans M_1, contradiction.

Lemme 2 : Si on met à part un nombre fini de termes de l'ensemble des entiers naturels, l'ensemble obtenu garde encore la propriété du lemme 1.

Dans le lemme 1, le choix de k était arbitraire, et pour chaque k on obtenait, au moins dans l'un des ensembles M_1 ou M_2, un triplet d'éléments en progression arithmétique : donc au moins un de ces deux ensembles contient une infinité de tels triplets.

Si on met à part un nombre fini de naturels, on met aussi à part un nombre fini de triplets en progression arithmétique. Mais l'un au moins des deux ensembles M_1 ou M_2 conservera un nombre infini de triplets en progression arithmétique.

Lemme 3 : Si $i_1, \ldots, i_s$ sont des naturels en progression arithmétique,

et si $a_1, a_2, \ldots$ est une progression arithmétique (respectivement géométrique), alors $a_{i_1}, \ldots, a_{i_s}$ est aussi une progression arithmétique (respectivement géométrique).

Démonstration : pour chaque j on a : $2i_j = i_{j-1} + i_{j+1}$.

a) Si $a_1, a_2, \ldots$ est une progression arithmétique de raison r:

$$2a_{i_j} = 2\,(a_1+(i_j-1)r) = (a_1+(i_{j-1}-1)r) + (a_1+(i_{j+1}-1)r)$$
$$= a_{i_{j-1}} + a_{i_{j+1}} .$$

b) Si $a_1, a_2, \ldots$ est une progression géométrique de raison r :

$$(a_{i_j})^2 = (a.r^{i_j-1})^2 = a^2.r^{2i_j-2} = (a.r^{i_{j-1}-1}).(a.r^{i_{j+1}-1}).$$
$$= a_{i_{j-1}}.a_{i_{j+1}} .$$

<u>Théorème 1</u> : N'importe la manière dont on partage l'ensemble des termes d'une progression arithmétique (respectivement géométrique) en 2 sous-ensembles : dans l'un au moins de ces sous-ensembles il y aura au moins 3 termes en progression arithmétique (respectivement géométrique).

Démonstration : D'après le lemme 3, il suffit d'étudier le partage de l'ensemble des indices des termes de la progression en 2 sous-ensembles, et d'analyser l'existence (ou non) d'au moins 3 indices en progression arithmétique dans l'un de ces sous-ensembles.

Mais l'ensemble des indices des termes de la progression est l'ensemble des nombres naturels, et on a démontré au lemme 1 qu'il ne peut pas être partágé en 2 sous-ensembles sans qu'il y ait au moins 3 nombres en progression arithmétique dans l'un de ces sous-ensembles : le théorème est démontré.

<u>Théorème 2</u> : Un ensemble M qui contient une progression arithmétique (respectivement géométrique) infinie, non constante, conserve la propriété du théorème 1.

En effet, cela découle directement du fait que tout partage de M implique le partage des termes de la progression.

<u>Application</u> : Quelle que soit la façon dont on partage l'ensemble $A = \{1^m, 2^m, 3^m, \ldots\}$ $(m \in R)$ en 2 sous-ensembles, au moins l'un de ces sous-ensembles contient 3 termes en progression géométrique.

(Généralisation du problème 0:255 de la "Gazeta Matematica", Bucarest, n°10/1981, p.400).

La solution résulte naturellement du théorème 2, si on remarque que A contient la progression géom. $a_n = (2^m)^n$, $(n \in N^*)$.

De plus on peut démontrer que dans l'un au moins des sous-ensembles il y a une infinité de triplets en progression géométrique, parce que A contient une infinité de progressions géométriques differentes : $a_n^{(p)} = (p^m)^n$ avec p premier et $n \in N^*$, auxquelles on peut appliquer les théorèmes 1 et 2.