FLORENTIN SMARANDACHE

Une application de la generalisation du théorème du Ceva

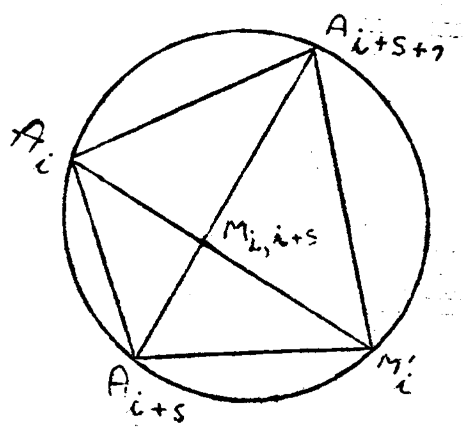
In Florentin Smarandache: "Généralisations et Généralités". Fès (Maroc): Édition Nouvelle, 1984.

UNE APPLICATION DE LA GENERALISATION DU THEOREME DE CEVA

<u>Théorème</u> : Soit un polygone $A_1A_2\ldots A_n$ inscrit dans un cercle. Soient s et t deux naturels non nuls tels que $2s + t = n$. Par chaque sommet A_i passe une droite d_i qui coupe les droites $A_{i+s}A_{i+s+1}$, ... , $A_{i+s+t-1}A_{i+s+t}$ aux points $M_{i,i+s}$, ... , respectivement $M_{i+s+t-1}$, et le cercle au point M'_i. Alors on a :

$$\prod_{i=1}^{n}\ \prod_{j=i+s}^{i+s+t-1}\frac{\overline{M_{ij}A_j}}{\overline{M_{ij}A_{j+1}}}=\prod_{i=1}^{n}\frac{\overline{M'_iA_{i+s}}}{\overline{M'_iA_{i+s+t}}}\ .$$

<u>Preuve</u> :
Soit i fixé.
1°) Cas où le point $M_{i,i+s}$ se trouve à l'intérieur du cercle :



On a les triangles $A_iM_{i,i+s}A_{i+s}$ et $M'_iM_{i,I+S}A_{i+s+1}$ semblables, puisque les angles $M_{i,i+s}A_iA_{i+s}$ et $M_{i,i+s}A_{i+s+1}M'_i$ d'une part, et $A_iM_{i,i+s}A_{i+s}$ et $A_{i+s+1}M_{i,i+s}M'_i$ sont égaux. Il en résulte que :

$$(1)\ \frac{\overline{M_{i,i+s}A_i}}{\overline{M_{i,i+s}A_{i+s+1}}}=\frac{\overline{A_iA_{i+s}}}{\overline{M'_iA_{i+s+1}}}\ .$$

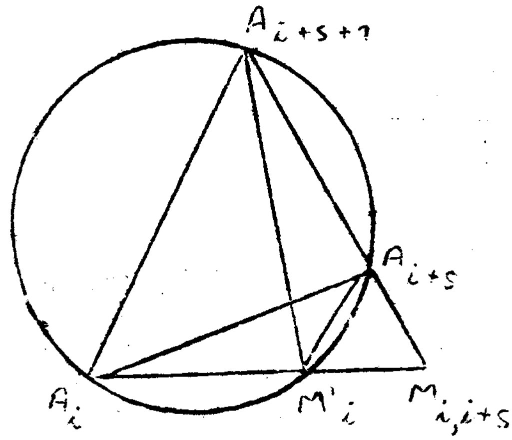
De manière analogue, on montre que les triangles $M_{i,i+s}A_iA_{i+s+1}$ et $M_{i,i+s}A_{i+s}M'_i$ sont semblables, d'où :

$$(2)\ \frac{\overline{M_{i,i+s}A_i}}{\overline{M_{i,i+s}A_{i+s}}}=\frac{\overline{A_iA_{i+s+1}}}{\overline{M'_iA_{i+s}}}$$

. On divise (1) par (2) et on obtient :

$$(3)\ \frac{\overline{M_{i,i+s}A_{i+s}}}{\overline{M_{i,i+s}A_{i+s+1}}}=\frac{\overline{M'_iA_{i+s}}}{\overline{M'_iA_{i+s+1}}}\cdot\frac{\overline{A_iA_{i+s}}}{\overline{A_iA_{i+s+1}}}\ .$$

2°) Le cas où $M_{i,i+s}$ est extérieur au cercle est similaire au prmier, parce que les triangles (notés comme au 1°) sont semblables aussi dans ce nouveau cas. On a les mêmes raisonnements et les mêmes rapports, donc on a aussi la relation (3).



Calculons le produit :

$$\prod_{j=i+s}^{i+s+t-1} \frac{\overline{M_{ij}A_j}}{\overline{M_{ij}A_{j+1}}} =$$

$$= \prod_{j=i+s}^{i+s+t-1} \left(\frac{\overline{M'_iA_j}}{\overline{M'_iA_{j+1}}} \cdot \frac{\overline{A_iA_j}}{\overline{A_iA_{j+1}}} \right) =$$

$$= \frac{\overline{M'_iA_{i+s}}}{\overline{M'_iA_{i+s+1}}} \cdot \frac{\overline{M'_iA_{i+s+1}}}{\overline{M'_iA_{i+s+2}}} \cdots \frac{\overline{M'_iA_{i+s+t-1}}}{\overline{M'_iA_{i+s+t}}} \cdot$$

$$\cdot \frac{\overline{A_iA_{i+s}}}{\overline{A_iA_{i+s+1}}} \cdot \frac{\overline{A_iA_{i+s+1}}}{\overline{A_iA_{i+s+2}}} \cdots \frac{\overline{A_iA_{i+s+t-1}}}{\overline{A_iA_{i+s+t}}} = \frac{\overline{M'_iA_{i+s}}}{\overline{M'_iA_{i+s+t}}} \cdot \frac{\overline{A_iA_{i+s}}}{\overline{A_iA_{i+s+t}}} .$$

Donc le produit initial est égal à :

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\overline{M'_iA_{i+s}}}{\overline{M'_iA_{i+s+t}}} \cdot \frac{\overline{A_iA_{i+s}}}{\overline{A_iA_{i+s+t}}} \right) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\overline{M'_iA_{i+s}}}{\overline{M'_iA_{i+s+t}}} ,$$

puisque :

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{\overline{A_iA_{i+s}}}{\overline{A_iA_{i+s+t}}} = \frac{\overline{A_1A_{1+s}}}{\overline{A_1A_{1+s+t}}} \cdot \frac{\overline{A_2A_{2+s}}}{\overline{A_2A_{2+s+t}}} \cdots \frac{\overline{A_sA_{2s}}}{\overline{A_sA_n}} \cdot \frac{\overline{A_{s+1}A_{2s+1}}}{\overline{A_{s+1}A_1}} \cdot$$

$$\frac{\overline{A_{s+2}A_{2s+2}}}{\overline{A_{s+2}A_2}} \cdots \frac{\overline{A_{s+t}A_n}}{\overline{A_{s+t}A_t}} \cdot \frac{\overline{A_{s+t+1}A_1}}{\overline{A_{s+t+1}A_{t+1}}} \cdot \frac{\overline{A_{s+t+2}A_2}}{\overline{A_{s+t+2}A_{t+2}}} \cdots \frac{\overline{A_nA_s}}{\overline{A_nA_{s+t}}} = 1$$

(en tenant compte du fait que $2s + t = n$).

<u>Conséquence 1</u> : Si on a un polygone $A_1A_2\ldots A_{2s-1}$ inscrit dans un cercle, et que de chaque sommet A_i on trace une droite d_i qui coupe le côté opposé $A_{i+s-1}A_{i+s}$ en M_i, et le cercle en M'_i, alors :

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{\overline{M_iA_{i+s-1}}}{\overline{M_iA_{i+s}}} = \prod_{i=1}^{n} \frac{\overline{M'_iA_{i+s-1}}}{\overline{M'_iA_{i+s}}} .$$

En effet pour $t = 1$, on a n impair et $s = \frac{n+1}{2}$.

Si on fait $s = 1$ dans cette conséquence, on retrouve la note mathématique de [1], pages 35-37.

<u>Application</u> : si dans le théorème, les droites d_i sont concourantes, on obtient :

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{\overline{M_i' A_{i+s}}}{\overline{M_i' A_{i+s+t}}} = (-1)^n .$$

(Pour cela, voir [2]).

Bibliographie :

[1] Dan Barbilian, Ion Barbu - "Pagini inedite", Editura Albatros , Bucarest , 1981 (Ediţie ingrijità de Gerda Barbilian, V.Protopopescu, Viorel Gh.Vodă).

[2] Florentin Smarandache - "Généralisations du théorème de Céva".