FLORENTIN SMARANDACHE

Une généralisation de l’inegalité de Hölder

In Florentin Smarandache: “Généralisations et Généralités”. Fès (Maroc): Édition Nouvelle, 1984.

UNE GENERALISATION DE L'INEGALITE DE HÖLDER

On généralise l'inégalité de Hölder grâce à un raisonnement par récurrence. Comme cas particuliers, on obtient une généralisation de l'inégalité de Cauchy-Buniakovski-Schwartz, et des applications intéressantes.

<u>Théorème</u> : Si $a_i^{(k)} \in \mathbb{R}_+$ et $p_k \in]1, +\infty[$, $i \in \{1,2,\dots,n\}$, $k \in \{1,2,\dots,m\}$, tels que : $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\dots+\frac{1}{p_m} = 1$, alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{m} a_i^{(k)} \leqslant \prod_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(a_i^{(k)}\right)^{p_k} \right)^{\frac{1}{p_k}} \quad \text{avec } m \geqslant 2.$$

<u>Preuve</u> : Pour m = 2 on obtient justement l'inégalité de Hölder, qui est vraie. On suppose l'inégalité vraie pour les valeurs inférieures strictement à un certain m. Alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{m} a_i^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\prod_{k=1}^{m-2} a_i^{(k)} \right) \cdot \left(a_i^{(m-1)} \cdot a_i^{(m)} \right) \right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\prod_{k=1}^{m-2} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(a_i^{(k)}\right)^{p_k} \right)^{\frac{1}{p_k}} \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \left(a_i^{(m-1)} \cdot a_i^{(m)} \right)^{p} \right)^{\frac{1}{p}} ,$$

où $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_{m-2}} + \frac{1}{p} = 1$ et $p_h > 1$, $1 \leqslant h \leqslant m-2$, $p > 1$;

mais $$\sum_{i=1}^{n} \left(a_i^{(m-1)}\right)^p \cdot \left(a_i^{(m)}\right)^p \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\left(a_i^{(m-1)}\right)^p \right)^{t_1} \right)^{\frac{1}{t_1}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\left(a_i^{(m)}\right)^p \right)^{t_2} \right)^{\frac{1}{t_2}}$$

où $\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} = 1$ et $t_1 > 1$, $t_2 > 1$. Il en résulte :

$$\sum_{i=1}^{n} \left(a_i^{(m-1)}\right)^p \left(a_i^{(m)}\right)^p \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \left(a_i^{(m-1)}\right)^{pt_1} \right)^{\frac{1}{pt_1}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \left(a_i^{(m)}\right)^{pt_2} \right)^{\frac{1}{pt_2}} ,$$

avec $\frac{1}{pt_1} + \frac{1}{pt_2} = \frac{1}{p}$.

Notons $pt_1 = p_{m-1}$ et $pt_2 = p_m$. Donc $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m} = 1$, et on a $p_j > 1$ pour $1 \leqslant j \leqslant m$: il en résulte l'inégalité du théorème.

<u>Remarque</u> : Si on pose $p_j = m$ pour $1 \leqslant j \leqslant m$ et si on élève à la puissance m cette inégalité, on obtient une généralisation de l'inégalité de Cauchy-Buniakovski-Schwartz :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{m} a_i^{(k)}\right)^m \leqslant \prod_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \left(a_i^{(k)}\right)^m .$$

<u>Application</u> : Soient les réels positifs a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2.

Montrer que :

$$(a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2)^6 \leqslant 8\,(a_1^6 + a_2^6)\,(b_1^6 + b_2^6)\,(c_1^6 + c_2^6) .$$

Solution :

Utilisons le théorème antérieur. Posons $p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=6$, il en découle que :

$$a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2)^{\frac{1}{2}}\,(b_1^3 + b_2^3)^{\frac{1}{3}}\,(c_1^6 + c_2^6)^{\frac{1}{6}}$$, ou encore :

$$(a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2)^6 \leqslant (a_1^2 + a_2^2)^3(b_1^3 + b_2^3)^2(c_1^6 + c_2^6) ,$$

et sachant que $(b_1^3 + b_2^3)^2 \leqslant 2(b_1^6 + b_2^6)$

et que $(a_1^2 + a_2^2)^3 = a_1^6 + a_2^6 + 3(a_1^4a_2^2 + a_1^2a_2^4) \leqslant$

$$\leqslant 4(a_1^6 + a_2^6) ,$$

puisque $a_1^4\,a_2^2 + a_1^2a_2^4 \leqslant a_1^6 + a_2^6$ (parce que :

$-\,(a_2^2 - a_1^2)^2(a_1^2 + a_2^2) \leqslant 0$),

il en résulte l'exercice proposé.