FLORENTIN SMARANDACHE

Une généralisation de l'inégalité de Minkowski

In Florentin Smarandache: "Généralisations et Généralités". Fès (Maroc): Édition Nouvelle, 1984.

UNE GENERALISATION DE L'INEGALITE DE MINKOWSKI

Théorème : Si p est un nombre réel $\geqslant 1$ et $a_i^{(k)} \in \mathbb{R}^+$, avec $i \in \{1,2,\dots,n\}$ et $k \in \{1,2,\dots,m\}$, alors :

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} a_i^{(k)}\right)^p\right)^{1/p} \leqslant \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} \left(a_i^{(k)}\right)^p\right)^{1/p}$$

Démonstration par récurrence sur $m \in \mathbb{N}^*$.

Tout d'abord on montre que :

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^{(1)}\right)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^{(1)}\right)^p\right)^{1/p}$$

, ce qui est évident et prouve que l'inégalité est vraie pour $m=1$.
(Le cas $m=2$ constitue justement l'inégalité de Minkowski, qui est naturellement vraie !).

On suppose l'inégalité vraie pour toutes les valeurs inférieures ou égales à m.

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m+1} a_i^{(k)}\right)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^{(1)}\right)^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=2}^{m+1} a_i^{(k)}\right)^p\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^{(1)}\right)^p\right)^{1/p} + \sum_{k=2}^{m+1}\left(\sum_{i=1}^{n} \left(a_i^{(k)}\right)^p\right)^{1/p}$$

et cette dernière somme vaut $\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1}\left(\sum_{i=1}^{n} \left(a_i^{(k)}\right)^p\right)^{1/p}$

donc l'inégalité est vraie au rang $m+1$.