FLORENTIN SMARANDACHE

# Une généralisation de l'inegalité de Tcebychev

*In* Florentin Smarandache: "Généralisations et Généralités". Fès (Maroc): Édition Nouvelle, 1984.

# UNE GENERALISATION D'UNE INEGALITE DE TCHEBYCHEV

Enoncé : Si $a_i^{(k)} \geqslant a_{i+1}^{(k)}$ , $i \in \{1,2,\dots,n-1\}$ , $k \in \{1,2,\dots,m\}$ ,

alors : $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{m} a_i^{(k)} \geqslant \frac{1}{n^m} \prod_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_i^{(k)}$ .

Démonstration par récurrence sur m .

Cas m=1 évident : $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i^{(1)} \geqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i^{(1)}$

Quant au cas m=2, c'est l'inégalité de Tchebychev elle-même:

Si $a_1^{(1)} \geqslant a_2^{(1)} \geqslant \dots \geqslant a_n^{(1)}$ et $a_1^{(2)} \geqslant a_2^{(2)} \geqslant \dots \geqslant a_n^{(2)}$ , alors :

$$\frac{a_1^{(1)}a_1^{(2)}+a_2^{(1)}a_2^{(2)}+\dots+a_n^{(1)}a_n^{(2)}}{n} \geqslant \frac{a_1^{(1)}+a_2^{(1)}+\dots+a_n^{(1)}}{n} \times \frac{a_1^{(2)}+\dots+a_n^{(2)}}{n} .$$

On suppose l'inégalité vraie pour toutes les valeurs inférieures ou égales à m. Il faut passer au rang m+1 :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{m+1} a_i^{(k)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left( \prod_{k=1}^{m} a_i^{(k)} \right) . a_i^{(m+1)} .$$

Ceci est $\geqslant \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{m} a_i^{(k)} \right) . \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i^{(m+1)} \right) \geqslant$

$$\geqslant \left( \frac{1}{n^m} \prod_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_i^{(k)} \right) . \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i^{(m+1)} \right)$$

et ceci vaut justement $\frac{1}{n^{m+1}} \prod_{k=1}^{m+1} \sum_{i=1}^{n} a_i^{(k)}$ (cqfd).