FLORENTIN SMARANDACHE

Une généralisation d'une théorème de Carnot

In Florentin Smarandache: "Généralisations et Généralités". Fès (Maroc): Édition Nouvelle, 1984.

UNE GENERALISATION D'UN THEOREME DE CARNOT

Théorème de Carnot : Soit un point M sur la diagonale AC d'un quadrilatère quelconque ABCD. Par M on trace une droite qui coupe AB en α et BC en β. Puis on trace une autre droite, qui coupe CD en γ et AD en δ. Alors on a :

$$\frac{A\alpha}{B\alpha}\cdot\frac{B\beta}{C\beta}\cdot\frac{C\gamma}{D\gamma}\cdot\frac{D\delta}{A\delta} = 1 .$$

Généralisation : Soit un polygone $A_1 \dots A_n$. Sur une diagonale A_1A_k de celui-ci on prend un point M par lequel on trace une droite d_1 qui coupe les droites $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{k-1}A_k$ respectivement aux points $P_1, P_2, \dots, P_{k-1}$, et une autre droite d_2 qui coupe les autres droites $A_kA_{k+1}, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ respectivement aux points P_k, $\dots, P_{n-1}, P_n$. Alors on a :

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{A_iP_i}{A_{\varphi(i)}P_i} = 1 \text{ , où } \varphi \text{ est la permutation circulaire } \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}.$$

Démonstration : Soit $1 \leqslant j \leqslant k-1$. On montre facilement que :

$$\frac{A_jP_j}{A_{j+1}P_j} = \frac{D(A_j, d_1)}{D(A_{j+1}, d_1)}$$

où $D(A,d)$ représente la distance du point A à la droite d, puisque les triangles $P_jA_jA'_j$ et $P_jA_{j+1}A'_{j+1}$ sont semblables. (On note A'_j et A'_{j+1} les projections dus points A_j et A_{j+1} sur la droite d_1.)

Il en résulte que :

$$\frac{A_1P_1}{A_2P_1}\cdot\frac{A_2P_2}{A_3P_2}\cdots\frac{A_{k-1}P_{k-1}}{A_kP_{k-1}} = \frac{D(A_1,d_1)}{D(A_2,d_1)}\cdot\frac{D(A_2,d_1)}{D(A_3,d_1)}\cdots\frac{D(A_{k-1},d_1)}{D(A_k,d_1)} =$$

$$= \frac{D(A_1,d_1)}{D(A_k,d_1)} .$$

De manière analogue, pour $k \leqslant h \leqslant n$, on a :

$$\frac{A_hP_h}{A_{\varphi(h)}P_h} = \frac{D(A_h,d_2)}{D(A_{\varphi(h)},d_2)} \quad \text{et} \quad \prod_{h=k}^{n} \frac{A_hP_h}{A_{\varphi(h)}P_h} = \frac{D(A_k,d_2)}{D(A_1,d_2)} .$$

Le produit du théorème est égal à :

$$\frac{D(A_1,d_1)}{D(A_k,d_1)}\cdot\frac{D(A_k,d_2)}{D(A_1,d_2)} \text{ , mais } \frac{D(A_1,d_1)}{D(A_k,d_1)} = \frac{A_1M}{A_kM} \quad \text{puisque les}$$

triangles $MA_1A'_1$ et $MA_kA'_k$ sont semblables. De même, puisque les triangles $MA_1A''_1$ et $MA_kA''_k$ sont semblables (on note A''_1 et A''_k les projections respectives de A_1 et A_k sur la droite d_2) , on a :

$$\frac{D(A_k,d_2)}{D(A_1,d_2)} = \frac{A_kM}{A_1M} .$$

Le produit de l'énoncé est donc bien égal à 1.

Rem : si on remplace n par 4 dans ce théorème, on retrouve le théorème de Carnot.