FLORENTIN SMARANDACHE

Asupra unor conjecturi si probleme nerezolvate referitoare la o functie in Teoria Numerelor

In Florentin Smarandache: "Collected Papers", vol. II. Chisinau (Moldova): Universitatea de Stat din Moldova, 1997.

ASUPRA UNOR CONJECTURI ŞI PROBLEME NEREZOLVATE REFERITOARE LA O FUNCŢIE ÎN TEORIA NUMERELOR

1. Introducere

Am construit [19] o functie η care asociază fiecărui întreg nenul n cel mai mic întreg pozitiv m astfel încât $m!$ este multiplu de n.

De aici rezultă că dacă n are descompunerea în factori primi:

$$n = \varepsilon \cdot p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \ldots p_t^{a_t};$$

cu p_i numere distincte, $a_i \in N^*$ şi $\varepsilon = \pm 1$ atunci:

$$\eta(n) = \max_{1 \leq i \leq t} \eta(p_i^{a_i});$$

şi $\eta(\pm 1) = 0$.

Pentru calculul lui $\eta(p_i^{a_i})$ observăm că dacă:

$$\alpha_k(p) = \frac{p^k - 1}{p - 1},\ k = 1, 2, \ldots;$$

atunci din formula lui Legendre:

$$n! = \prod p_i^{\sum\limits_{k>1} \frac{n}{p^k}};$$

rezultă $\eta(p^{\alpha_k(p)}) = p^k$.

Mai general, considerând baza generalizată:

$$[p] : \alpha_1(p), \alpha_2(p), \ldots;$$

şi scriind exponentul a în această bază:

$$a_{[p]} = t_1 \cdot a_{n_1}(p) + \ldots + t_l \cdot a_{n_l}(p);$$

cu $n_1 > n_2 > \ldots > n_e > 0$ şi $t_1 \in [1, p-1]$ pentru $j = 0, 1, \ldots, l-1$ şi $t_l \in [1, p]$, în [19] am arătat că:

$$\eta(p^a) = \sum_{i=1}^{e} t_i p^{n_i}. \quad (1)$$

2. Proprietăţi ale funcţiei η

Din felul în care a fost definită rezultă imediat că funcţia η este pară: $\eta(-n) = \eta(n)$. De asemenea pentru orice $n \in N^*$ avem:

$$\frac{-1}{(n-1)!} \le \frac{\eta(n)}{n} \le 1;$$

Raportul $\frac{\eta(n)}{n}$ este maxim dacă şi numai dacă n este prim sau $n = 4$ şi are valoare minimă dacă şi numai dacă $n = k!$. Evident η nu este o funcţie periodică.

Pentru orice număr prim p funcţia $\eta_p : N^* \to N, \eta_p(a) = \eta(p^n)$ este crescătoare, noninjectivă, dar considerând $\eta_p : N^* \to \{p^k | k = 1, 2, \dots\}$ este verificată surjectivitatea.

Funcţia η este *în general crescătoare* pe N^*, în sensul că:

$$\forall n \in N^* \ (\exists) m_0 \in N^* \ \forall m \ge m_0 \ \eta(m) \ge n.$$

Prin urmare funcţia este *în general descrescătoare* pe Z^*_- adică:

$$\forall n \in Z^*_- \ (\exists) m_0 \in Z^*_- \ \forall m \le m_0 \ \eta(m) \le n.$$

De asemenea nu este injectivă, dar considerând: $\eta : Z^* \to N \setminus \{1\}$ este verificată surjectivitatea.

Definiţia 1. *(P.Erdös şi J.L.Selfridge)*

Numărul n se numeşte barieră pentru funcţia numerică f dacă pentru orice $m < n$ avem $m + f(m) \le n$.

Se observă că pentru orice $\varepsilon \in [0, 1]$ funcţia f definită prin $f(m) = \varepsilon \cdot \eta(m)$ nu are o infinitate de bariere deoarece există $m_0 \in N$ astfel încât pentru orice $n \ge m_0$ avem:

$$\eta(n) \ge \frac{2}{\varepsilon} \text{ dacă } n + \varepsilon \cdot \eta(n) \ge n.$$

Seria $\sum\limits_{n \ge 2} \frac{1}{\eta(n)}$ este divergentă deoarece $\frac{1}{\eta(n)} \ge \frac{1}{n}$.

Avem de asemenea:

$$\eta\underbrace{\left(2^{2^{\cdot^{\cdot^{2^n}}}}\right)}_{k \text{ ori}} = 2 + \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2^n}}}}}_{k-1 \text{ ori}}.$$

Într-adevăr, pentru $m = \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2^n}}}}}_{k-2 \text{ ori}}$ avem $\eta(2^{2^m}) = 2 + 2^m$.

3. Formule de calcul pentru $\eta(n)$

În [2] se arată c[formula (1) poate fi scrisă sub forma:

$$\eta(p^{a_{[p]}}) = p(a_{[p]})_{(p)} \tag{2}$$

adică pentru a calcula pe $\eta(p^a)$ scriem exponentul a în baza generalizată $[p]$ şi "îl citim" în baza standard (p):

$$(p): \ 1, p, p^2, \dots, p^n, \dots$$

Să observăm că "cititrea" în baza (p) presupune uneori calcule cu *cifra* p, care nu este cifră în această bază, dar poate apare ca cifră în baza $[p]$. Vom exemplifica utilizarea formulei (2) pentru calculul lui $\eta(3^{89})$. Parcurgem următoarele etape:

(i) scriem exponentul $a = 89$ în baza

$[3]: \ 1, 4, 13, 40, 121, \dots$

obţinem $3_{[3]} = 2021$;

(ii) "citim" numărul 2021 în baza $(3): \ 1, 3, 9, 27, \dots$. Avem $2021_{(3)} = 183_{(10)}$, deci $\eta(3^{89}) = 183$, ceea ce înseamnă că cel mai mic număr natural al cărui factorial este divizibil cu 3^{89} este 189.

Într-adevăr: $\sum_{i\leq 1}\left[\frac{183}{3^i}\right] = 89$.

Facem observaţia că în baza generalizată $[p]$ tehnica de lucru este esenţial diferită de tehnica de lucru din baza standard (p); aceasta datorită faptului că şirul $b_n(p) = p^n$, care determînă baza (p) satisface relaţia de recurenţă:

$$b_{n+1}(p) = p \cdot bn(p);$$

În timp ce şirul $an(p) = (p^n - 1)/(p-1)$ cu ajutorul căruia se generează baza $[p]$ satisface relaţia de recurenţă:

$$a_{n+1}(p) = p \cdot a_n(p) + 1. \tag{3}$$

Datorită relaţiei (3) pentru a face adunarea în baza $[p]$ procedăm astfel: începem adunând cifrele de ordinul zecilor şi nu al unităţilor (cifrele corespunzătoare coloanei $a_2(p)$). Dacă adunând aceste cifre obţinem numărul $pa_2(p)$, vom utiliza o unitate din clasa unităţilor (coeficienţii lui $a_1(p)$) pentru a obţine $pa_2(p) + 1 = a_3(p)$.

Continuând adunarea pe coloana "zecilor" dacă obţinem din nou $pa_2(p)$, vom utiliza o nouă unitate din clasa unităţilor, etc. De exemplu pentru:

$$m_{[5]} = 441, n_{[5]} = 412 \text{ şi } r_{[5]} \text{ avem}$$

$$\begin{array}{r} m+n+r = 442+ \\ 412 \\ 44 \\ \hline dcba \end{array}$$

Începem adunarea cu coloana zecilor:

$$4 \cdot a_2(5) + a_2(5) + 4 \cdot a_2(5) = 5 \cdot a_2(5) + 4 \cdot a_2(5);$$

şi utilizând o unitate din coloana unităţilor obţinem:

$$a_3(5) + 4 \cdot a_2(5), \text{ deci } b = 4.$$

Continuând obţinem:

$$4 \cdot a_3(5) + 4 \cdot a_3(5) + a_3(5) = 5 \cdot a_3(5) + 4 \cdot a_3(5);$$

şi utilizând o nouă "unitate":

$$a_4(4) + 4 \cdot a_3(5), \text{ deci } c = 4 \text{ şi} d = 1.$$

În sfârşit, adunând unităţile rămase:

$$4 \cdot a_1(5) + 2 \cdot a_1(5) = 5 \cdot a_1(5) + a_1(5) = 5 \cdot a_1(5) + 1 = a_2(5),$$

rezultă că trebuie modificat şi $a = 0$. Deci $m + n + r = 1450_{[5]}$.

Aplicarea formulei (2) la calculul valorilor lui η pentru toate numerele între $N_1 = 31000000$ şi $N_2 = 31001000$, pe un PC 386 a dus la obţinerea unui timp de lucru de mai mult de 16 minute, din care cea mai mare parte a fost utilizată pentru descompunerea numerelor în factori primi.

Algoritmul a fost următorul:

1. Descompunerea numerelor n în factori primi $n = p_1^{d_1} p_2^{d_2} \dots p_t^{d_t}$;

2. Pentru n fixat, determinarea valorii $\max p_i \cdot d_i$;

3. $\eta_0 = \eta(p_i^{d_i})$, pentru i determinat la 2;

4. Deoarece $\eta(p^{d_i}) \leq p_j \cdot d_j$ ignorăm factorii pentru care $p_i \cdot a_1 \leq \eta_0$;

5. Calculăm $\eta(p_j^{d_j})$ pentru $p_j \cdot a_j > \eta_0$ şi determinăm cea mai mare dintre aceste valori, care va fi $\eta(n)$. Pentru punctele $2 - 5$ din program au trebuit mai puţin de 3 secunde.

Pentru a obţine alte formule de calcul pentru funcţia η (de fapt pentru $\eta(p^a)$) să considerăm exponentul a scris în cele două baze:

$$a_{(p)} = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot p^i \text{ şi } a_{[p]} = \sum_{j=1}^{v} k_j a_j(p) = \sum_{j=1}^{v} k_j \cdot \frac{p^j - 1}{p - 1}.$$

Obţinem:

$(p-1) \cdot a = \sum_{j=1}^{v} k_j p^j - \sum_{j=1}^{v} k_j$, deci notând:

$\sigma_{(a)} = \sum_{i=0}^{n} c_i$ - suma cifrelor lui a scris în baza (p);

$\sigma_{[p]}(a) = \sum_{j=1}^{v} k_j$ -suma cifrelor lui a scris în baza $[p]$; şi ţinând cont de faptul că $\sum_{j=1}^{v} k_j p^j = p(a_{[p]})_{(p)}$ obţinem:

$$\eta(p^a) = (p-1) \cdot a + \sigma_{[p]}(a). \tag{4}$$

Ţinând cont de exprimarea lui a în baza (p) obţinem:

$$p \cdot a_{(p)} = \sum_{i=0}^{n} c_i(p^{i+1} - 1) + \sum_{i=0}^{n} c_i \text{ sau:}$$

$$\frac{p}{p-1} \cdot a = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot a_{i+1}(p) + \frac{1}{p-1} \cdot \sigma_{(p)}(a), \tag{5}$$

prim urmare:

$$a = \frac{p-1}{p} \cdot (a_{[p]})_{[p]} + \frac{1}{p} \cdot \sigma_{(p)}(a) \tag{6}$$

Înlocuind această valoare a lui a în (4), se obţine:

$$\eta(p^a) = \frac{(p-1)^2}{p} \cdot (a_{(p)})_{[p]} + \frac{p-1}{p} \cdot \sigma_{(p)}(a) + \sigma_{[p]}(a). \tag{7}$$

Notând cu $E_{n,p}$ exponentul lui p în expresia lui $n!$,

$$E_{n,p} = \sum_{i \geq 1} \left[\frac{n}{p^i}\right];$$

se ştie [18] că $E_{n,p} = (n - \sigma_{(p)}(n))/(p-1)$, deci exprimând pe $\sigma_{(p)}(a)$ din (6), se deduce:

$$E_{n,p} = (a_{(p)})_{[p]} - a. \tag{8}$$

O altă formulă pentru $E_{n,p}$ se poate obţine astfel:

$$a = C_n \cdot p^n + C_{n-1} \cdot p^{n-1} + \ldots + C_1 \cdot p + C_0 \text{ deci:}$$

$$E_{a,p} = \frac{a}{p^n} + \frac{a}{p^{n-1}} + \ldots \frac{a}{p} = C_n + (C_n p + C_{n-1}) + \ldots + (C_n p^{n-1} + C_{n-1} p^{n-2} + \ldots + C_1) =$$
$$= C_n a_n(p) + C_{n-1} a_{n-1}(p) + \ldots + C_1 a_1.$$

Cu alte cuvinte dacă $a_{(p)} = \overline{C_n \cdot C_{n-1} \cdot \ldots \cdot C_1 \cdot C_0}$ atunci:

$$E_{a,p} = ((a - C_0)_{(p)})_{[p]} \equiv \left(\left(\left[\frac{a}{p}\right]\right)_{(p)}\right)_{[p]}.$$

Din (7) şi (8) se obţine:

$$\eta(p^a) = \frac{(p-1)^2}{p} \cdot (E_{a,p} + a) + \frac{p-1}{p} \cdot \sigma_{(p)(a)} + \sigma_{[p]}(a);$$

iar din (2) ţi (7) se deduce:

$$p \cdot \sigma_{[p]}(a) + (p-1) \cdot \sigma_{(p)}(a) = p^2 \cdot (a_{[p]})_{(p)} - (p-1)^2 \cdot (a_{(p)})_{[p]}.$$

4. FUNCŢIA SUMATOARE F_η

Se ştie că oricărei funcţii numerice f i se poate ataşa funcţia sumatoare F_f definită prin:

$$F_f(n) = \sum_{d/n} f(d);$$

şi că f se poate exprima cu ajutorul lui F_f prin formula de inversiune:

$$f(n) = \sum_{i,j=n} \mu(i) \cdot F(j), \tag{9}$$

unde μ este funcţia lui Möbius ($\mu(1) = 1, \mu(k) = (-1)^q$) dacă numărul i este produsul a q numere prime diferite şi $\mu(i) = 0$ dacă i este divizibil cu un pătrat).

Pentru η avem:

$$F(n) = F_\eta(n) = \sum_{d/n} \eta(d) \text{ şi}$$
$$F(p^a = \eta(1) + \eta(p) + \ldots + \eta(p^a).$$

Din (4) deducem $\eta(p^j) = (p-1) \cdot j + \sigma_{[p]}(j)$ deci:

$$F(p^a) = \sum_{j=0}^{a} \eta(p^j) = (p-1) \cdot \sum_{j=1}^{a} j + \sum_{j=1}^{a} \sigma_{[p]}(j) = (p-1) \cdot \frac{a \cdot (a+1)}{2} + \sum_{j=1}^{a} \sigma_{[p]}(j).$$

În consecinţă:

$$F(p^a) = (p-1) \cdot \frac{a \cdot (a+1)}{2} + \sum_{j=1}^{a} \sigma_{[p]}(j) \tag{10}$$

Să considerăm acum:

$$n = p_t \cdot p_{t-1} \cdot \ldots \cdot p_1$$

cu $p_1 < p_2 < \ldots < p_t$ numere prime nu neapărat consecutive

Desigur $\eta(n) = p_t$ şi din:

$$F(1) = \eta(1) = 0;$$

$$F(p_1) = \eta(1) + \eta(p_1) = p_1;$$

$$F(p_1 \cdot p_2) = p_1 + 2p_2 = F(p_1) + 2p_2;$$

$$F(p_1 \cdot p_2 \cdot p_3) = p_1 + 2p_2 + 2^2 p_3 = F(p_1 \cdot p_2) + 2^2 p_3;$$

rezultă prin inducţie:

$$F(p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_t) = F(p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{t-1}) + 2^{t-1} p^t;$$

adică:

$$F(p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_t) = \sum_{i=1}^{t} 2^{i-1} p_i.$$

Egalitatea (9) devine:

$$p_t = \eta(n) = \sum_{u,v=n} \mu(u) \cdot F(v) = F(n) - \sum_i F\left(\frac{n}{p_i}\right) + \sum_{i,j} F\left(\frac{n}{p_i \cdot p_j}\right) + \ldots + (-1)^{t-1} \cdot \sum_{i=1}^{t} F(p_i);$$

şi deoarece $F(p_i) = p_i$, obţinem:

$$F\left(\frac{n}{p_i}\right) = F(p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{i-1} \cdot p_{i+1} \cdot \ldots \cdot p_k) = \sum_{j=1}^{i-1} 2^{j-1} \cdot p_j + \sum_{j=i+1}^{t} 2^{j-1} \cdot p_j =$$

$$= F(p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{i-1}) + 2^{i-1} \cdot F(p_{i+1} \cdot p_{i+2} \cdot \ldots \cdot p_t).$$

În mod analog avem

$$F\left(\frac{n}{p_i p_j}\right) = F(p_1 \cdot p_2 \cdots p_{i-1}) + 2^{i-1} \cdot F(p_{i+1} \cdot p_{i+2} \cdots p_{j-1}) + 2^{j-1} F(p_{j+1} \cdot p_{j+2} \cdots p_t).$$

Notând $N_{ij} = p_i \cdot \ldots \cdot p_j$, obţinem atunci:

$$\sum_{i=1}^{t-1} p_i = -F(n) + \sum_i F(N_{i-1} + 2^{i-1} \cdot F(_{i+1,t})) - \sum_{i<j} (F(N_{i-1}) + 2^{i-1} \cdot F(N_{i+1,j-1}) +$$

$$+ 2^{j-1} \cdot F(N_{j+1,t})) + \ldots$$

Generalizări ale funcşiei η

I.Bălăcenoiu [3] propune trei funcţii care generalizează funcţia η. În cele ce urmează vom prezenta aceste generalizări.

Fie X o mulţime nevidă, r o relaţie de echivalenţă pe X pentru care notăm cu X_r mulţimea cât şi $(I, \leq)$ o mulţime total ordonată. Dacă $g : X \to I$ este o funcţie injectivă oarecare, atunci funcţia $f : X \to I, f(x) = g(x)$ se spune că este o funcţie de standartizare. În acest caz despre mulţimea X se spune că este $(r, (I, \leq), f)$ stadartizată.

Dacă r_1 şi r_2 sunt două relaţii de echivalenţă pe X se ştie că relaţia $r = r_1 \bigwedge r_2$ unde:

$$xry \Leftrightarrow xr_1y \text{ şi } xr_2y$$

este o relaţie d echivalenţă.

Despre funcţiile $f_i : X \to I, i = \overline{1,s}$ se spune că au aceeaşi monoticitate dacă pentru orice $x, y \in X$ avem :

$$f_i(x) \leq f_i(y) / f_i(x) \leq f_i(y)$$

pentru orice $i, j = \overline{1,s}$.

În [3] se demonstrează următoarea teoremă:

Dacă funcţiile de standardizare $f_i : X \to I$ corespunzătoare relaţiilor de echivalenţă $r_i, i = \overline{1,s}$ sunt de aceeaţi monotonie atunci funcţia $f = \max f_i$ este funcţia de standardizare corespunzătoare relaţiei $r = \bigwedge\limits_i r_i$ şi are aceeaşi monotonie cu funcţiile f_i. Un alt element preliminar considerării celor trei generalizări ale funcţiei η prezentate în [3] este definiţia următoare.

Dacă $\top$şi $\perp$ sunt legi binare pe X respectiv I, spunem despre funcţia de standardizare $f : X \to I$ că este $\sum$ compozabilă dacă tripletul $(f(x), f(y), f(x \top y))$ satisface condiţia $\sum$. În acest caz se mai spune că funcţia f $\sum$ standardizează structura $(X, \top)$ pe structura $(I, \leq, \perp)$.

De exemplu funcţia η determină următoarele standardizări:

(a) funcţia η standardizează $\sum_1$ structura $(N^*, \cdot)$ pe structura $(N^*, \leq, +)$ prin:

$$\sum_1 : \eta(a \cdot b) \leq \eta(a) + \eta(b);$$

(b) funcţia η standardizează $\sum_2$ aceleaşi structuri, considernd:

$$\sum_2 : \max\{\eta(a), \eta(b)\} \leq \eta(a \cdot b) \leq \eta(a) \cdot \eta(b).$$

Funcţia Smarandache $\eta : N^* \to N$ a fost definită în [16] cu ajutorul următoarelor funcţii η_p:

Pentru orice număr prim p fie $\eta_p : N^* \to N^*$ astfel

(i) $(\eta_p(n))!$ este divizibil cu p^n;

(ii) $\eta_p(n)$ este cel mai mic întreg pozitiv cu proprietatea (i).

Pentru fiecare $n \in N^*$ să considerăm şi relaţiile $r_n \subset N^*XN^*$ definite prin condiţiile:

1. Dacă n este de forma $n = p^i$ cu $p = 1$ sau p număr prin şi $i \in N^*$ vom spune că a este în relaţia r_n cu b dacă şi numai dacă $\min\{k/k! = Mp^s\}$;

2. Dacă $n = p_1^{i_1}, p_2^{i_2}, \dots, p_t^{i_t}$ atunci

$$r_n = r_{p_1}^{i_1} \bigwedge r_{p_2}^{i_2} \bigwedge \dots \bigwedge r_{p_t}^{i_t}.$$

Definiţia 2. *Pentru orice $n \in N^*$ funcţia Smarandache de primul tip este funcţia $\eta_n : N^* \to N^*$ definită astfel:*

1. Dacă $n = p^i$, cu $p = 1$ sau p număr prim atunci $S_n(a) = k, k$ fiind cel mai mic întreg pozitiv pentru care $k! = M_{p^{ia}}$;

2. Dacă $n = p_1^{i_1}, p_2^{i_2}, \dots, p_t^{i_t}$ atunci $\eta_k = \max_{j=1,t} \eta_{p_j^{ij}}(a)$.

Se observă că:

a) Funcţiile η_n sunt funcţii de satndarduzare, corespunzătoare relaţiilor r_n şi pentru $n = 1$ avem $X_{r_1} = N^*$;

b) Dacă $n = p$ atunci η_n este funcţia η_p definită în [16];

c) Funcţiile η_n sunt crescătoare, deci sunt de aceeaşi monotonicitate, în sensul dat mai sus.

Theorem 1. *Funcţiile $\eta_n, \sum_1$ standardizează structura $(N^*, +)$ pe structura $(N^*, \leq, +)$ prin:*

$\sum_1 : \max\{\eta_n(a), \eta_n(b)\} \leq \eta_n(a+b) \leq \eta_n(a) + \eta_n(b)$ pentru orice $a, b \in N^*$ şi deasemenea $\sum_2$ standardizează $(N^*, +)$ pe $(N, \leq, .)$ prin

$\sum_2 : \max\{\eta_n(a), \eta_n(b)\} \leq \eta_n(a+b) \leq \eta_n(a) * \eta_n(b)$ pentru orice $a, b \in N^*$.

Demonstraţia este dată în [3].

Definiţia 3. *Funcţiile Smarandache de al doilea tip sunt funcţiile $\eta^k : N^* \to N^*$ definite prin $\eta^k(n) = \eta^n(k)$ pentru orice $k \in N^*$, unde η_n sunt funcţiile Smarandache de primul tip.*

Observăm că pentru $k = 1$ funcţia η^k este funcţia η definită în [17], cu modificarea $\eta(1) = 1$. Întradevăr, pentru $n > 1$ avem:

$$\eta^1(n) = \eta_n(1) = \max_j \eta_{p_j^{ij}}(1) = \max_j \eta_{p_j}(ij) = \eta(n).$$

Theorem 2. *Funcţiile Smarandache de al doilea tip* $\sum_3$ *standardizează structura* $(N^*, *)$ *pe structura* $(N^*, \leq, t)$ *prin*

$\sum_3 : \max\{\eta^k(a), \eta^k(b)\} \leq \eta^k(a * b) \leq \eta^k(a) + \eta^k(b)$ *pentru orice* $a, b \in N^*$ *şi* $\sum_4$ *standardizează* $(N^*, *)$ *pe* $(N^*, \leq, *)$ *prin*

$\sum_4 : \max\{\eta^k(a), \eta^k(b)\} \leq \eta^k(a * b) \leq \eta^k(a) * \eta^k(b)$ *pentru orice* $a, b \in N^*$.

Pentru a defini funcşiile Smarandache de al treilea tip să considerăm şirurile:

$$(a)\ 1 = a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

$$(b)\ 1 = b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

staisfăcând relaţii de recurenţă $a_{kn} = a_k * a_n$ şi respectiv $b_{kn} = b_k * b_n$.

Desigur există oricâte astfel de şiruri deoarece putem alege o valoare arbitrară pentru a_2 şi apoi să determinăm ceilalţi termeni cu ajutorul relaţiei de recurenţă. Cu ajutorul şirurilor (a) şi (b) definim funcţia $f_a^b : N^* \to N^*$ prin

$f_a^b(n) = \eta_{a_n}(b_n)$, unde η_{a_n} este funcţia Smarandache de primul tip. Se observă că:

(u) Dacă $a_n = 1$ şi $b_n = 1$ pentru orice $n \in N^*$ atunci $f_a^b = \eta_1$;

(v) Dacă $a_n = n$ şi $b_n = 1$ pentru orice $n \in N^*$ atunci $f_a^b = \eta^1$.

Definiţia 4. *Funcţiile Smarandache de al treilea tip sunt funcţiile* $\eta_a^b = f_a^b$ *în cazul în care şirurile (a) şi (b) sunt diferite de cele de la (u) şi (v).*

Theorem 3. *Funcţiile* f_a^b *realizează standardizarea* $\sum_5$ *între structurile* $(N^*, *)$ *şi* $(N^*, \leq, +, *)$ *prin*

$$\sum_5 : \max\{f_a^b(k), f_a^b(n)\} \leq f_a^b(k * n) \leq b_n f_a^b(k) + b_k f_a^b(n).$$

Demonstraţia acestei teoreme este deasemenea dată în [3]. De aici rezultă că funcţiile Smarandache de al treilea tip satisfac:

$$\sum_6 : \max\{\eta_a^b(k), \eta_a^b(n)\} \leq \eta_a^b(k \cdot n) \leq b_n \eta_a^b(k) + b_k \eta_a^b(n).$$

Exemplu: Considerând şirurile (a) şi (b) date prin $a_n = b_n = n$, pentru orice $n \in N^*$, funcţia Smarandache de al treilea tip corespunzătoare este $\eta_a^b : N^* \to N^*, \eta_a^b(n) = \eta_n(n)$ şi $\sum_6$ devine:

$$\max\{\eta_k(k), \eta_n(n) \leq \eta_{kn}(k \cdot n) \leq n\eta_k(k) + k\eta_n(n)$$

pentru orice $k, n \in N^*$.

Această relaţie este echivalentă cu relaţia următoare, scrisă cu ajutorul funcţiei η:

$$\max\{\eta(k^k), \eta(n^n)\} \leq \eta((kn)^{kn}) \leq n\eta(k^k) + k\eta(n^n).$$

5. Probleme rezolvate şi probleme nerezolvate referitoare la funcţia η

În [20] se dă o listă cuprinzătoare de probleme deschise referitoare la funcţia η. În [22] M.Mudge reia o parte din aceste probleme. Apari'ia articolului lui M.Mudge ca şi apariţia unei reviste dedicată studiului funcţiei η (Smarandache Function Journal în colaborare cu Facultatea de Matematică din Craiova şi Number Theory Publishing Co. din Glendale, Arizona) au determinat creşterea interesului pentru această funcţie. În cele ce urmează vom enumera câteva dintre problemele propuse în [8] şi reluate în [22] arătând stadiul rezolvării lor, dar vom aminti şi alte probleme interesante apărute ulterior articolului lui M.Mudge.

1. Să se investigheze şirurile $i, i+1, i+2, \ldots, i+x$ pentru care valorile lui η sunt crescătoare (descrescătoare). Răspunsul la această problemă au dat J.Duncan [7] şi Grønas [11]. Acesta din urmă arată că există şiruri crescătoare $u_1 < u_2 < \ldots < u_r$ de lungime oricât de mare pentru care valorile funcţie η sunt decrescătoare.

Referitor la următoarele trei probleme nu cunoaştem publicarea vreunui rezultat.

2. Găsiţi cel mai mic număr natural k astfel încât pentru orice n mai mic sau egal cu n_0 cel puţin unul dintre numerele: $\eta(n), \eta(n+1), \ldots, \eta(n+k-1)$ este:

(A) un pătrat perfec;

(B) un divizor al lui k^n.

Ce se întâmplă pentru k şi n_0 tinzând la infinit?

3. Construiţi numere prime având forma $\overline{\eta(n)\eta(n+1)\ldots\eta(n+k)}$ unde $\overline{ab}$ desemnează întregul obţinut prin concatenarea numerelor a şi b.

Un şir $1 \leq a_1 \leq \ldots$ de numere întregi se spune că este un A-şir dacă nici un a_i nu este suma a cel puţin doi termeni din şir.

4. Investigaţi posibilitatea construirii unui A-şir astfel încât şirul asociat $\eta(a_1), \eta(a_2), \ldots, \eta(a_n), \ldots$ este de asemenea un A-şir.

Notând $D_n(x) = |\eta(x+1) - \eta(x)|$ şi $D_n^{(k+1)}(x) = |D_n^{(k)}(x+1) - D_n^{(k)}(x)|$, pentru $k \in N^*$, unde $D_n^{(1)}(x) = D_n(x)$ articolul lui M.Mudge reia următoarea problemă.

5. Investigaţi conjectura $D_n^{(k)}(x)$ are valoarea unu sau zero pentru oricare $k \geq 2$.

J.Duncan [8] verifică conjectura pentru toate numerele naturale până la 32000. În acelaşi articol se arată că raportul între numărul de 1-uri şi numărul zerourilor este aproximativ egal cu 1 pentru valori mari ale lui k. De asemenea se arată că pentru $k > 100$ şi până la 32000 raportul $D_n^{(k)}(x)/D_n^{(k-1)}(x)$ este aproximativ egal cu -2.

T.Yau [24] pune următoarea problemă: pentru ce triplet de numere consecutive $n.n+1, n+2$ funcţia η verifică o egalitate de tip Fibonacci, adică $\eta(n) + \eta(n+1) = \eta(n+2)$. El observă că în primele 1200 de numere naturale există două soluţii şi anume $n = 11$ şi $n = 121$, dar nu găseşte o soluţie generală.

P.Gronas [10] dă răspuns următoarei întrebări: "Există o funcţie de numere n pentru care $\sigma_\eta(n) = n$?" unde $\sigma_\eta(n) = \sum\limits_{d/n:d>0} \eta(d)$. El arată că singurele soluţii ale acestei ecuaţii sunt $n \in \{8, 12, 18, 20, 2p\}$ unde p este număr prim.

M.Costewitz [15] abordează pentru prima oară problema găsirii cardinalului mulţimii $M_n = \{x/\eta(x) = x\}$. În [25] se arată că dacă descompunerea lai n în factori primi este $n_0 = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_t^{a_t}$ cu $p_1 < p_2 < \ldots < p_t$ şi notăm $e_i = \sum[n/p_i^j]$ iar $n_0 = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_t^{e_t}$ şi $p_1^{e_1 - a_1} \cdot p_2^{e_2 - a_2} \cdot \ldots \cdot p_t^{e_t - a_t}$, atunci $card\ M_n = (\sigma(n_0) - \sigma(n_0)\sigma(Q))$ unde $\sigma(n)$ este suma divizorilor lui n, iar $Q = \prod\limits_k q_k^{f_k}$, numerele $q_1, q_2, \ldots, q_r$ fiind toate numerele prime mai mici decât n şi care nu sunt divizori ai lui n. Exponentul f_k este $f_k = \sum\limits_j \left[\frac{n}{q_k^j}\right]$.

Bibliografie

[1] M.Andrei, C.Dumitrescu, V.Seleacu, L.Tuţescu, Şt.Zamfir, La fonction de Smarandache, une nouvelle fonction dans la théorie des nombres (Conngres International Henri Poincaré, Nancy, 14-18 May, 1994).

[2] M.Andrei, C.Dumitrescu, V.Seleacu, L.Tuţescu, Şt.Zamfir, Some Remarks on the Smarandache Function, (Smarandache Function Journal, vol. 4-5, No. 1, p. 1-5).

[3] Ion Bălăcenoiu, Smarandache Numerical Functions (Smarandache Function Journal, vol. 4-5, No. 1, p. 6-13).

[4] John C. Mc Carthy, Calculate $S(n)$ (Smarandache Function Journal, vol. 2-3, No. 1, (1993), p. 19-32).

[5] M.Costewitz, Généralisation du problème 1075 (Smarandache Function Journal, vol. 4-5, No. 1, (1994), p. 43-44).

[6] C.Dumitrescu, A Brief History of the "Smarandache Function": (Smarndache Function Journal, vol. 2-3, No. 1, (1993), p. 3-9).

[7] J.Duncan, Monotonic increasing and descreasing sequences of $S(n)$ (Smarandache Function Journal, vol. 2-3, No.1, (1993), p. 13-16).

[8] J.Duncan, On the conjecture $D_n^k(1) = 1$ or 0 for $k \geq 2$, (Smarandache Function Journal, vol. 2-3, No. 1, (193), p. 17-18).

[9] Pål Grønås, A proof of the non-existence of "Samma" (Smarandache Function Journal, vol. 2-3, No. 1, (1993), p. 34-35).

[10] Pål Grønås, The solution of the Diophantine equation $\sigma_s(n) = n$ (Smarandache Function Journal, vol. 4-5, No.1 (1994), p. 14-16).

[11] Pål Grønås, Solution of the problem by J.Rodriguez, (Smarandache Function Journal, vol. 4-5, No. 1, (1994), p. 37).

[12] M.Mudge, The Smarandache Function, together with a sample of The Infinity of Unsolved Problems associated with it, presented by M.Mudge, (Personal Computer World, No. 112, (1992), p. 420).

[13] Henry Ibsted, The Smarandache Function $S(n)$, (Smarandache Function Journal, vol. 2-3, No. 1, (1993), p. 38-71).

[14] Pedro Melendez, Proposed problem (4), (Smarandache Function Journal, vol. 4-5, No. 1, (1994), p. 4).

[15] M.Andrei, I.Bălăcenoiu, C.Dumitrescu, E.Rădescu, N.Rădescu, V.Seleacu, A linear Combination with the Smarandache Function to obtain a identity (26^{th} Annual Iranian Mathematics Conference, Kerman, Iran, March 28-31, 1995).

[16] E.Rădescu, N.rădescu, C.Dumitrescu, On the summatory Function Associated to the Smarandache Function (Smarandache Function Journal, vol. 4-5, No. 1, (1994), p. 17-21).

[17] J.Rodryguez, Problem (1), (2) (Smarandache Function Journal, vol. 4-5, No. 1, (1994), p. 36-38).

[18] P.Radovici-Mărculescu, Probleme de teoria elementară a numerelor (ed. Tehn. Bucureşti, 1986).

[19] Florentin Smarandache, A Function in the Number Theory, An. Univ. Timişoara, ser. Şt. Mat., vol. XVIII, fasc. 1, (1980), p. 79-88.

[20] Florentin Smarandache, An Infinity of Unsolved Problems Concerning a Function in Number Theory, (International Congress of Mathematicians, Univ. of Berkeley, CA, August 3-11, 1986).

[21] F.Smarandache, Some linear equations involving a function in the Number Theory, (Smarandache Function Journal, vol. 1, No. 1, (1990)).

[22] A.Stuparu, D.Sharpe, Problem of number Theory (5), (Smarandache Function Journal, vol. 4-5, No. 1, (1994), p. 41).

[23] J.R.Sutton, Calculating the Smarandache Function Without Factorising, (Smarandache Function Journal, vol. 4-5, No. 1, (1994), p. 27-31).

[24] T.Yau, The Smarandache Function, (Math. Spectrum, vol. 26, No. 3, (1993/4), p. 84-85).