FLORENTIN SMARANDACHE

Coefficients *K*-Nomiaux

In Florentin Smarandache: “Généralisations et Généralités”. Fès (Maroc): Édition Nouvelle, 1984.

COEFFICIENTS K-NOMIAUX

Dans cet article on élargit les notions de "coefficients binomiaux" et de "coefficients trinomiaux" à la notion de "coefficients k-nomiaux" et on obtient quelques propriétés générales de ceux-ci. Comme application, on généralisera le "triangle de Pascal".

On considère un nombre naturel $k \geqslant 2$; soit $P(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{k-1}$ le polynôme formé de k monômes de ce type : on l'appellera "k-nôme".

On appelle <u>coefficients k-nomiaux</u> les coefficients des puissances de x de $(\cancel{1+x+}x^2+\dots+x^{k-1})^n$, pour n entier positif. On les notera Ck_n^h avec $h \in \{0,1,2,\dots,2pn\}$.

Par la suite on va construire par récurrence un triangle de nombres qui va être appelé <u>"triangle des nombres d'ordre k"</u>.

CAS 1 : $k = 2p + 1$.

Sur la première ligne du triangle on écrit 1 et on l'appelle "ligne 0".

(1) On convient que toutes les cases qui se trouvent à gauche et à droite du premier (respectivement du dernier) nombre de chaque ligne seront considérées comme contenant 0. Les lignes suivantes sont appelées "ligne 1", "ligne 2", etc... Chaque ligne contiendra 2P nombres de plus que la précédente : p nombres à gauche du premier nombre, p nombres à droite du dernier nombre de la ligne précédente. Les nombres de la ligne i+1 s'obtiennent à partir de ceux de la ligne i de la façon suivante :

Ck_{i+1}^j est égal à l'addition des p nombres situés à sa gauche sur la ligne i et des p nombres situés à sa droite sur la ligne i, au nombre situé au-dessus de lui (voir fig.1). On va tenir compte de la convention 1.

Fig.1 : ligne i $\quad \overbrace{\cdot\cdots\cdots\cdot}^{p \text{ nombres}} \circ \overbrace{\cdot\cdots\cdots\cdot}^{p \text{ nombres}}$

ligne i+1 $\quad \bullet Ck_{i+1}^j$

<u>Exemple</u> pour k=5 :

1

1 1 1 1 1

1 2 3 4 5 4 3 2 1

1 3 6 10 15 18 19 18 15 10 6 3 1

1 4 10 20 35 52 68 80 85 80 68 52 35 20 10 4 1

....

Le nombre $C5_1^0 = 0+0+0+0+1 = 1$; $C5_1^3 = 0+1+0+0+0 = 1$,

$C5_2^3 = 0+1+1+1+1 = 4$; $C5_3^7 = 4+5+4+3+2 = 18$, etc...

Propriétés du triangle de nombres d'ordre k :

1) La ligne i a 2pi+1 éléments.

2) $Ck_n^h = \sum_{i=0}^{2p} Ck_{n-1}^{h-i}$ où par convention $Ck_n^t = 0$ pour $\begin{cases} t<0 \text{ et} \\ t>2pr \end{cases}$.

Ceci est évident d'après la construction du triangle.

3) Chaque ligne est symétrique par rapport à l'élément central.

4) Les premiers éléments de la ligne i sont 1 et i.

5) La ligne i du triangle de nombres d'ordre k représente les coefficients k-nomiaux de $(1 + x + x^2 + \ldots + x^{k-1})^i$.

La démonstration se fait par récurrence sur i de N^* :

a) Pour i=1 c'est évident, (on fait la propriété serait encore vraie pour i=0).

b) Supposons la propriété vraie pour n. Alors

$$(1+x+x^2+\ldots+x^{k-1})^{n+1} = (1+x+x^2+\ldots+x^{k-1})(1+x+x^2+\ldots+x^{k-1})^n$$

$$= (1+x+x^2+\ldots+x^{2p}).\sum_{j=0}^{2pn} Ck_n^j.x^j = \sum_{t=0}^{2p(n+1)} \sum_{\substack{i+j=t \\ 0\leqslant j\leqslant 2p \\ 0\leqslant i\leqslant 2pn}} Ck_n^i.x^i.x^j$$

$$= \sum_{t=0}^{2p(n+1)} \left(\sum_{j=0}^{2p} Ck_n^{t-j} \right) x^t = \sum_{t=0}^{2p(n+1)} Ck_{n+1}^t.x^t .$$

6) La somme des éléments situés sur la ligne n est égale à k^n.

La première méthode de démonstration utilise le raisonnement par récurrence. Pour n=1 l'assertion est évidente. On suppose la propriété vraie pour n, c'est-à-dire que la somme des éléments situés sur la ligne n est égale à k^n. La ligne n+1 se calcule à partir des éléments de la ligne n. Chaque élément de la ligne n fait partie de la somme qui calcule chacun des p éléments situés à sa gauche sur la ligne n+1, chacun des p éléments situés à sa droite sur la ligne n+1 et celui qui est situé en dessous : donc il est utilisé pour calculer k nombres de la ligne n+1.

Donc la somme des éléments de la ligne n+1 est k fois plus grande que la somme de ceux de la ligne n,

donc elle vaut k^{n+1}.

7) La différence entre la somme des coefficients k-nomiaux de rang pair et la somme des coefficients k-nomiaux de rang impair situés sur la même ligne $(Ck_n^0-Ck_n^1+Ck_n^2-Ck_n^3+\ldots)$ est égale à 1.

On l'obtient si dans $(1+x+x^2+\ldots+ x^{k-1})^n$ on prend x = -1.

8) $Ck_n^0.Ck_m^h+Ck_n^1.Ck_m^{h-1}+\ldots+Ck_n^h.Ck_m^0 = Ck_{n+m}^h$

Ceci résulte de ce que, dans l'identité

$$(1+x+x^2+\ldots+x^{k-1})^n.(1+x+x^2+\ldots+x^{k-1})^m = (1+x+x^2+\ldots+x^{k-1})^{n+m}$$

le coefficient de x^h dans le membre de gauche est $\sum_{i=0}^{h} Ck_n^i . Ck_m^{h-i}$

et celui de x^h à droite est Ck_{n+m}^h.

9) La somme des carrés des coefficients k-nomiaux situés sur la ligne n est égale au ceffici ent k-nomial situé au milieu de la ligne 2n.
Pour la preuve on prend n=m=h dans la propriété 8.

On peut trouver beaucoup de propriétés et applications de ces coefficients k-nomiaux parce qu'ils élargissent les coefficients binomiaux dont les applications sont connues.

CAS 2 : k = 2p.

La construction du triangle de nombres d'ordre k est analogue :
Sur la première ligne on écrit 1 ; on l'appelle ligne 0.
Les lignes suivantes sont appelées ligne 1, ligne 2, etc... Chaque ligne aura 2p-1 éléments de plus que la précédente ; comme 2p-1 est un nombre impair, les éléments de chaque ligne seront placés entre les éléments de la ligne précédente (à la différence du cas 1 où ils se plaçaient en-dessous).
Les éléments situés sur la ligne i+1 s'obtiennent en utilisant ceux de la ligne i de la façon suivante :
Ck_{i+1}^j est égal à l'addition des p éléments situés à sa gauche sur la ligne i aux p éléments situés à sa droite sur la ligne i. (Fig.2).

Fig.2 : ligne i $\overbrace{\circ\cdots\circ\ \circ}^{p\ \text{nbres}}\ \overbrace{\bullet\cdots\bullet}^{p\ \text{nbres}}$
ligne i+1 $\circ\ Ck_{i+1}^j$

Exemple pour k=4 :

1
1 1 1 1
1 2 3 4 3 2 1
1 3 6 10 12 12 10 6 3 1
1 4 10 20 31 40 44 40 31 20 10 4 1
....

D'où la propriété 1' : $Ck_n^h = \sum_{i=0}^{2p-1} Ck_{n-1}^{h-i}$.

En réunissant les propriétés 1 et 1' : $Ck_n^h = \sum_{i=0}^{k-1} Ck_{n-1}^{h-i}$.

Les autres propriétés du Cas 1 se conservent dans le cas 2, avec des preuves analogues. Cependant dans la propriété 7, on voit que la différence entre la somme des coefficients k-nomiaux de rang pair et celle des coefficients k-nomiaux de rang impair situés sur la même ligne est égale à 0.