FLORENTIN SMARANDACHE

Funny Problems

In Florentin Smarandache: “Collected Papers”, vol. III. Oradea (Romania): Abaddaba, 2000.

FUNCŢII ARITMETICE

Este bine cunoscută importanţa funcţiilor aritmetice în teoria nimerelor, importanţă datorată pe de-o parte bogăţiei rezultatelor ce se obţin cu ajutorul acestor funcţii, şi pe de altă parte frumuseţii acestor rezultate.

Este într-adevăr nu numai util, dar şi frumos să ştim că dacă $\Pi(x)$ este numărul numerelor prime mai mici sau egale cu x, atunci $\Pi(x)$ este asimptotic egal cu $x \ln x$ sau că dacă se cunoaşte functia sumatoare $F(n) = \sum f(d)$ pentru funcţia numerică f, atunci f se poate exprima cu ajutorul funcţiei F prin formula de inversiune

$$f(n) = \sum \mu(d) F(n/d).$$

În cele ce urmează vom prezenta o funcţie numerică definită recent [19] ale cărei proprietăţi sunt deci prea puţin cunoscute până acum.

Această funcţie $f : Z^* \to N$ este caracterizată de proprietăţile:

(i) $\forall n \in Z^* (\eta(n)! = M \cdot n)$ (multiplu de n);

(ii) $\eta(n)$ este cel mai mic număr natural cu proprietatea (i).

Lema 1 *Pentru orice $k, p \in N^*, p \neq 1$, numărul k se poate scrie în mod unic sub forma:*

$$k = t_1 a_{n_1}(p) + t_2 a_{n_2}(p) + \ldots + t_l a_{n_l}(p) \tag{1}$$

unde $a_{n_i}(p) = \dfrac{(p^{n_i} - 1)}{(p-1)}$, *pentru* $i = 1, \ldots, l, n_1 > n_2 > \ldots > n_l > 0$ *şi* $t_i \in [1, p-1] \cap N$ *pentru* $j = 1, \ldots l - 1$, *iar* $t_l \in [1, p] \cap N$.

Demonstraţia este evidentă, fiind vorba be scrierea numărului k în baza generalizată:

$$[p] a_1(p), a_2(p), \ldots, a_n(p), \ldots$$

Pentru fiecare număr prim $p \in N^*$ putem defini acum o funcţie :

$$\eta_p : N^* \to N$$

având proprietăţile:

$$(\eta_1) \quad \eta_p(a - n(p)) = p^n;$$

$$(\eta_2) \quad \eta_p(t_1 a_{n_1}(p) + t_2 a_{n_2}(p) + \ldots + t e a_{n_e}) = t_1 \eta_p(a_{n_1}(p) + t_2 \eta_p(a_{n_2}(p)) + \ldots + t_e \eta_p(a_{n_e}(p)).$$

Într-adevăr, utilizând lema precedentă orice număr $k \in N^*$ poate fi scris sub forma (1) şi atunci putem defini:

$$\eta_p(k) = t_1 p^{n_1} + t_2 p^{n_2} + \ldots + t_e p^{n_e}.$$

Teorema 1 *Fiecare funcţie η_p, cu $p > 0$ număr prim, are proprietăţile:*

(iii) $\forall k \in N^*(\eta_p(k))! = M \cdot p^k$;

(iv) $\eta_p(k)$ *este cel mai mic număr natural având proprietatea (iii).*

Demonstraţie. Se ştie că exponentul $e_{p,n}$ la care apare p în descompunerea în factori a lui $n!$ este dat de formula lui Legendre:

$$e_{p,n} = \sum \left[\frac{n}{p^i}\right].$$

Prin urmare exponentul la care apare p în descompunerea în factori a lui $(\eta_p(k))!$ este:

$$e_{p,\eta(k)} = \sum \left[\frac{t_1p^{n_1} + t_2p^{n_2} + \ldots + t_ep^{n_e}}{p^i}\right] = \left[\frac{t_1p^{n_1} + t_2p^{n_2} + \ldots + t_ep^{n_e}}{p}\right] +$$

$$+ \left[\frac{t_1p^{n_1} + t_2p^{n_2} + \ldots + t_{ep}p^{n_e}}{p_2}\right] + \ldots \left[\frac{t_1p^{n_1} + t_2p^{n_2} + \ldots + t_ep^{n_e}}{p^{n_1}}\right] =$$

$$= (t_1p^{n_1} - 1 + t_2p^{n_2} - 1 + \ldots + t_ep^{n_e} - 1) + (t_1p^{n_1} - 2 + t_2p^{n_2} - 2 + \ldots) + \ldots + t_1 =$$

$$= t_1(p^{n_1} - 1 + p^{n_2} - 1 + \ldots + p^0) + t_2(p^{n_1} - 1 + p^{n_2} - 2 + \ldots + p^0) + \ldots + t_e(p^{n_e} - 1 + p^{n_e} - 2 + \ldots)$$

Deci:

$$e_{p,\eta(k)} = k;$$

şi teorema este demonstrată.

Funcţia $\eta : Z \to N$ se poate construi cu ajutorul funcţiilor η_p în felul următor:

(a) $\eta(\pm 1) = 0$;

(b) pentru orice $n = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_t^{\alpha_t}$, cu $\varepsilon = \pm 1$ şi p_i numere prime distincte, iar $\alpha_i \geq 1$ definim:

$$\eta(n) = \max \eta_p(\alpha_i).$$

Teorema 2 *Funcţia η definită prin condiţiile (a) şi (b) are proprietăţile (i) şi (ii).*

Demonstraţie. (i) este evident[, deoarece $(\eta(n)! = \max_i(\eta_p(\alpha_i)))$, deci $\eta(n)!$ este divizibil cu n. Proprietatea (ii) rezultă din (iv). Să observăm că funcţiile η_p sunt crescătoare, nu sunt injective, dar considernd $\eta_p : N^* \to \{p^k/k = 1, 2, \ldots\}$ se verifică surjectivitatea. Funcţia η nu este nici ea injectivă, dar $\eta : Z^* \to N \setminus \{1\}$ este surjectivă.

Consecinţă. Fie $n \geq 4$. Atunci n este număr prim dacă şi numai dacă $\eta(n) = n$.

Demonstraţie. Dacă $n = p$ este număr prim, cu $p \geq 5$, atunci $\eta(n) = \eta_p(1) = p$.

Fie acum $\eta(n) = n$. Dar $\eta(n) = \max \eta(p_i)$, deci $n = p$.

APLICAŢII

1. Care este cel mai mic număr natural n cu proprietatea: $n! = M(2^{31}.3^{27}.7^{13})$?

Soluţie.

Pentru a calcula $\eta_2(31)$ scriem numărul $\alpha_1 = 31$ în baza generalizată [2], unde:

[2]: 1, 3, 7, 15, 31, 63, ...

Pentru a calcula $\eta_3(27)$ considerăm baza generalizată

[3]: 1, 4, 13, 40, ... şi deducem $27 = 2*13+1 = 2a_3(3)+a_1(3)$, deci $\eta_3(27) = 2*3^3+1*3^1 = 57$.

Analog obţinem $\eta_7(13) = 84$. Deci $\eta(\pm 2^{31} * 3^{27} * 7^{13}) = \max(32, 57, 84) = 84$. Prin urmare 84! este divizibil cu $\pm 2^{31} * 3^{27} * 7^{13}$ şi este cel mai mic număr natural cu această proprietate.

2. Care sunt numerele ale căror factoriale se termină în o mie de zerouri?

Soluţie: Dacă $n = 10^{1000}$ atunci $\eta(n)! = M10^{1000}$ şi este cel mai mic număr natural cu această proprietate.

Avem:

$\eta(10^{1000}) = \eta(2^{1000} * 5^{1000}) = \max(\eta_2(1000), \eta_5(1000)) = \eta_5(1000)$, iar cum:

$[5] = 1, 6, 31, 156, 781, \ldots$

deducem $1000 = 1*a_3(5)+1*a_4(5)+2a_3(5)+a_1(5)$, deci $\eta_5(1000) = 1*5^3+1*5^4+1*5 = 4005$.

Aşadar numărul 4005 este cel mai mic număr natural al cărui factorial se termină cu 1000 de zerouri. Factorialul numerelor 4006, 4007, 4008 şi 4009 se termină şi el cu o mie de zerouri, dar $4010! = 4009! \cdot 4010$ are 1001 zerouri.

În legătură cu funcţia η am alcătuit [20] o listă de probleme nerezolvate. Iată câteva dintre acestea:

(1) Să se găsească formule pentru exprimarea lui $\eta(n)$.

În [1] şi [2] se dau astfel de formule. În fond, din cele prezentate mai sus putem spune că dacă $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_t^{\alpha_t}$, atunci $\eta(n) = \max_i \eta(p_i^{\alpha_i}) = \max_i \eta_{p_i}(\alpha_i)$, adică $\eta(n) = \max_{i=\overline{1,t}} \eta(p_i(\alpha_i)_{[p_i D_t]})$, deci $\eta(p_i^{\alpha_i})$ se obţine înmulţind numărul p_i cu numărul obţinut scriind exponentul α_i în baza generalizată $[p_i]$ şi "citind" rezultatul în baza standard $(p) : 1, p, p^2, \ldots, p^n, \ldots$.

(2) Există exprimări asimptotice pentru $\eta(n)$?

(3) Pentru un număr întreg fixat m, în ce condiţii $\eta(n)$ divide diferenţa $n-m$? (în particular pentru $m = 1$). Desigur, pentru $m = 0$ avem soluţiile $n = k!$ sau n este un număr liber de pătrate.

(4) Este η o funcţie algebrică? Mai general, să spunem că g este o f-funcţie, f nenulă, dacă $f(x, g(x)) = 0$ pentru orice x şi $f \in R[x, y]$. Este η o f-funcţie?

(5) Fie A o mulţime de numere naturale nenule consecutive. Să se determine max *card* A pentru care η este monotonă pe A. Se poate observa că avem max *card* $A \geq 5$ deaoarece pentru $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ valorile lui η sunt respectiv $0, 2, 3, 4, 5$.

(6) Un număr se spune că este număr η algebric de grad n dacă el este rădăcina polinomului: $P_\eta(x) = \eta(n) \cdot x^n + \eta(n-1) \cdot x^{n-1} + \ldots + \eta(1) \cdot x^1$. Pentru ce fel de numere n există numere algebrice de ordinul n care să fie numere întregi?

(7) Sunt numerele $P_n = \eta(n)/n$ uniform distribuite în intervalul $(0, 1)$? Răspunsul este negativ şi a fost demonstrat de Gh.Ashbacher.

(8) Este numărul $0,0234537465114\ldots$, format prin concatenarea valorilor lui $\eta(n)$, un număr iraţional ? Răspunsul este afirmativ şi a fost demonstrat de Gh.Ashbacher.

(9) Se pot reprezenta numerele întregi n sub forma:

$$n = \pm\eta(a_1)^{a_2} \pm \eta(a_2)^{a_3} \pm \ldots \pm \eta(a_k)^{a_1},$$

unde întregii $k, a_1, a_2, \ldots a_k$ şi semnele sunt convenabil alese?

Dar sub forma:

$$n = \pm a_1^{\eta(a_1)} \pm \ldots \pm a_k^{\eta(a_k)}?$$

Sau sub forma:

$$n = \pm a_1^{\eta(a_2)} \pm a_2^{\eta(a_2)} \pm \ldots \pm a_k^{\eta(a_1)}?$$

(10) Găsiţi o formă generală a exprimării în fracţii continue a lui $\eta(n)/n$, pentru $n \geq 2$.

(11) Există întregii m, n, p, q cu $m \neq n$ sau $p \neq q$ pentru care:

$$\eta(m) + \eta(m+1) + \ldots + \eta(m+p) = \eta(n) + \eta(n+1) + \ldots + \eta(n+q)?$$

(12) Există întregii m, n, p, k sau $m \neq n$ şi $p > 0$ astfel încât:

$$\frac{\eta(m)^2 + \eta(m+1)^2 + \ldots + \eta(m+p)^2}{\eta(n)^2 + \eta(n+1)^2 + \ldots + \eta(n+p)^2} = k?$$

(13) Câte numere prime au forma $\eta(n) \cdot \eta(n+1) \cdot \ldots \eta(n+k)$ pentru o valoare fixată a lui k? Se observă că $\eta(2) \cdot \eta(3) = 23$ şi $\eta(5) \cdot \eta(6) = 53$ sunt prime.

(14) Există două numere distincte k şi n pentru care:

$\log_{\eta(k^n)} \eta(n^k)$ este număr întreg?

(15) Este numărul:

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\eta(k)} - \ln \eta(n)\right)$ număr finit?

Răspunsul este negativ [9].

(16) Verifică η o condiţie de tip Lipschitz?

Răspunsul este negativ şi aparţine tot lui Gh.Ashbacher.

(17) Există o formulă de recurenţă pentru şirul $a_n = \eta(n)$?

Un alt grup de probleme nerezolvate este următorul:

Există numere nenule nonprime $a_1, a_2, \ldots, a_n$ în relaţia P astfel încât $\eta(a_1), \eta(a_2), \ldots, \eta(a_n)$ să fie în relaţia R? Căsiţi cel mai mare n cu această proprietate (unde P şi R reprezintă una din următoarele categorii de numere):

(i) numere abundente: $a \in N$ este abundent dacă $\sigma(a) > 2a$.

(ii) numere aproape perfecte: a este aproape perfect dacă $\sigma(a) = 2a - 1$;

(iii) numere amicale: a şi b sunt amicale dacă $\sigma(a) = \sigma(b) = a + b$;

(iv) numere Bell: $S_n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)$, unde $S(n,k)$ sunt numerele Stirling de categoria a doua $S(0,0) = 1$, iar $S(n,k)$ se deduc din $x^n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k) \cdot x^k, x^{(k)} = x(x-1)\ldots(x_k+1)$, pentru $1 \leq k \leq n$;

(v) numerele Cullen: $C_n = n * 2^n + 1, n \geq 0$;

(vi) numerele Fermat: $F_n = 2^{2^n} + 1$;

(vii) numerele Fibonacci: $f_1 = f_2 = 1, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$;

(viii) numerele armonice: a este armonic dacă media armonică a divizorilor lui a este număr întreg;

(ix) numerele Mersenne: $M_p = 2^p - 1$;

(x) numerele perfecte: $\sigma(a) = 2a$ şi desigur lista ar putea continua.

Desigur se pot formula probleme interesante conţinând funcţia η, probleme în legătură cu funcţii numerice sau categorii speciale de numere (printre care sunt şi cele enumărate mai sus). Rezolvarea acestor probleme va oferi legătura încă necunoscută, dintre funcţia η şi celelalte categorii de funcţii numerice.

Demersul spre această legăturaă poate fi făcut de exemplu şi cu ajutorul ecuaţiilor (inecuaţiilor) diofantice. Iată câteva dintre aceastea:

(i) $\eta(m * x + n) = A$, unde A poate fi: C_n^m,

- P_n (al n-lea număr prim),

- $[\Theta(x)]$ ($\Theta(x) = \sum_{p \leq x} \ln p$, este funcţia Θ a lui Cebâşev),

- $[\Psi(x)]$ ($\Psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$, unde $\Lambda(n)$ are valoarea lui p dacă n este o putere întreagă a numărului prim p şi este zero în caz contrar),

- $S(n, x)$ sau $S(m, x)$,

- $\Pi(x)$ (numărul numerelor prime ce nu depăşesc pe x) şi desigur lista posibilităţilor pentru A poate continua.

(ii) $\eta(mx+n) < B$, unde B poate fi:

-$d(x)$ (numărul divizorilor pozitivi ai lui x),

- $\Gamma(x)$ (funcţia lui Euler de speţa întâi),

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{e^t} dt,$$

- $1/\beta(x,x)$ (funcţia lui Euler de speţa a doua, $\beta(x,y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$),

- $\mu(x)$ (funcţia lui Mobius).

Există multe posibilităţi de a alege pe B. Rămâne de descoperit cele într-adevăr interesante, care dau legătura lui η cu noţiuni devenite clasice în teoria numerelor.

Bibliografie

[1] M.Andrei, C.Dumitrescu, V.Seleacu, L.Tuţescu, Şt.Zamfir, La fonction de Smarandache, une nouvelle fonction dans la théorie des nombres (Conngres International Henri Poincaré, Nancy, 14-18 May, 1994).

[2] M.Andrei, C.Dumitrescu, V.Seleacu, L.Tuţescu, Şt.Zamfir, Some Remarks on the Smarandache Function, (Smarandache Function Journal, vol. 4-5, No. 1, p. 1-5).

[3] Ion Bălăcenoiu, Smarandache Numerical Functions (Smarandache Function Journal, vol. 4-5, No. 1, p. 6-13).

[4] John C. Mc Carthy, Calculate $S(n)$ (Smarandache Function Journal, vol. 2-3, No. 1, (1993), p. 19-32).

[5] M.Costewitz, Généralisation du problème 1075 (Smarandache Function Journal, vol. 4-5, No. 1, (1994), p. 43-44).

[6] C.Dumitrescu, A Brief History of the "Smarandache Function": (Smarndache Function Journal, vol. 2-3, No. 1, (1993), p. 3-9).

[7] J.Duncan, Monotonic increasing and descreasing sequences of $S(n)$ (Smarandache Function Journal, vol. 2-3, No.1, (1993), p. 13-16).

[8] J.Duncan, On the conjecture $D_n^k(1) = 1$ or 0 for $k \geq 2$, (Smarandache Function Journal, vol. 2-3, No. 1, (193), p. 17-18).

[9] Pàl Crònàs, A proof of the non-existence of "Samma" (Smarandache Function Journal, vol. 2-3, No. 1, (1993), p. 34-35).

[10] Pàl Crònàs, The solution of the Diphantine equation $\sigma_s(n) = n$, (Smarandache Function Journal, vol. 4-5, No.1 (1994), p. 14-16).

[11] Pàl Crònàs, Solution of the problem J.Rodriguez, (Smarandache Function Journal, vol. 4-5, No. 1, (1994), p. 37).

[12] M.Mudge, The Smarandache Function, together with a sample of The Infinity of Unsolved Problems associated with it, presented by M.Mudge, (Personal Computer World, No. 112, (1992), p. 420).

[13] Henry Ibsted, The Smarandache Function Journal $S(n)$, (Smarandache Function Journal, vol. 2-3, No. 1, (1993), p. 33-71).

[14] Pedro Melendez, Proposed problem (4), (Smarandache Function Journal, vol. 4-5, No. 1, (1994), p. 4).

[15] M.Andrei, I.Bălăcenoiu, C.Dumitrescu, E.Rădescu, N.Rădescu, V.Seleacu, A linear Combination with the Smarandache Function to obtain a identuty (26^{th} Annual Iranian Mathematics Conference, Kerman, Iran, March 28-31, 1995).

[16] E.Rădescu, N.Rădescu, C.Dunitrescu, On the summatory Function Associated to the Smarandache Function (Smarandache Function Journal, vol. 4-5, No. 1, (1994), p. 17-21).

[17] J.Rodryguez, Problem (1), (2) (Smarandache Function Journal, vol. 4-5, No. 1, (1994), p. 36-38).

[18] P.Radovici-Mărculescu, Probleme de teoria elementară a numerelor (ed. Tehn. Bucureşti, 1986).

[19] Florentin Smarandache, A Function in the Number Theory, An. Univ. Timişoara, ser. Şt. Mat., vol. XVIII, fasc. 1, (1980), p. 79-88.

[20] Florentin Smarandache, An Infinity of Unsolved Problems Concerning a Function in Number Theory, (International Congress of Mathematicians, Univ. of Berkeley, CA, August 3-11, 1986).

[21] F.Smarandache, Some linear equations involving a function in the Number Theory, (Smarandache Function Journal, vol. 1, No. 1, (1990)).

[22] A.Stuparu, D.Sharpe, Problem of number Theory (5), (Smarandache Function Journal, vol. 4-5, No. 1, (1994), p. 41).

[23] J.R.Sutton, Calculating the Smarandache Function Without Factorising, (Smarandache Function Journal, vol. 4-5, No. 1, (1994), p. 27-31).

[24] T.Yau, The Smarandache Function, (Math. Spectrum, vol. 26, No. 3, (1993/4), p. 84-85).