FLORENTIN SMARANDACHE

Où se trouve la faute dans ce raisonnement par reccurence?

In Florentin Smarandache: "Généralisations et Généralités". Fès (Maroc): Édition Nouvelle, 1984.

OU SE TROUVE LA FAUTE DANS CE RAISONNEMENT PAR RECURRENCE ???

A un concours d'entrée en faculté on a posé le problème suivant :

" Trouver les polynômes $P(x)$ à coefficients réels tels que $xP(x-1) = (x-3)P(x)$, pour tout x réel. "

Quelques candidats ont cru pouvoir démontrer par récurrence que les polynômes de l'énoncé sont ceux qui vérifient la propriété suivante : $P(x) = 0$ pour tout entier naturel.

En effet, disent-ils, si on pose $x = 0$ dans cette relation, il en résulte que $0.P(-1) = -3.P(0)$, donc $P(0) = 0$.
De même, avec $x = 1$, on a :

$$1.P(0) = -2.P(1) \text{ , donc } P(1) = 0, \text{ etc...}$$

On suppose que la propriété est vraie pour $(n-1)$, càd que $P(n-1) = 0$, et on regarde ce qu'il en est pour n :

On a : $n.P(n-1) = (n-3).P(n)$, et puisque $P(n-1) = 0$, il en résulte que $P(n) = 0$.

Où la démonstration pèche-t-elle ???

<u>Réponse</u> : Si les candidats avaient essayé le rang $n = 3$, ils auraient trouvé :

$$3.P(2) = 0.\ P(3) \text{ donc } 0 = 0.P(3),$$ ce qui n'entraîne pas que $P(3)$ est nul : en effet cette égalité est vraie pour tout réel $P(3)$.
L'erreur provient donc de ce que l'implication :

"$(n-3).P(n) = n.P(n-1) = 0 \Longrightarrow P(n) = 0$" n'est pas juste.

On peut trouver facilement que $P(x) = x(x-1)(x-2)K,\ K \in \mathbb{R}$.