Razmatranje nekih primena generalizacije Riemann – Liouvilleovih integrala u fizici

Z. B. Vosika

Abstract. U ovom preliminarnom radu će se pokušati generalisati pojam frakcione gustine koju je uveo Tarasov [1]. Njen smisao pokazaće se na jednom elementarnom primeru. U istom duhu razviće se par generalizacija Kontinualnog (Path) integrala, od koji će jedna biti povezana sa Langevinovom teorijom. U matematičkom smislu razmatra se novi tip Ne – Lévy slučajnih procesa. Ostala osnovna literatura koja je bitna za tumačenje rezultata je [2], [3], [4]. U tekstu su mahom citirane monografije: one su, uglavnom, izvor adekvatnih radova.

1. Uvod

Frakcioni račun praktično je nastao paralelno sa uobičajenim. Sa matematičkog stanovišta, frakcioni kalkulus predstavlja upotpunjenje klasičnog, prelaz sa celobrojnih (ali ne i u okviru skupa celih brojeva, ovo je je jedan poseban, nerešen, interesantan problem) stepena operatora izvoda-integrala na "ostale" brojne itd stepene. Standardna knjiga u tom smislu je [5]. Moguće su razne generalizacije ovog računa [6]. Postoje formalni razlozi zbog čega ovaj račun nije mogao na početku da zaživi. Neki od osnovnih razloga su nepostojanje funkcionalne analize, teorije mere i teorije generalisanih funkcija. Posmatrano sa fizičke strane [3], postoje četiri ishodišta frakcionog računa: 1) Hereditarnost; 2) Stepeni zakoni; 3) Automodelni slučajni procesi; 4) Sličnost (fraktali). Jedna od osnovnih primena tehnika frakcionog integriranja u kvantnoj teoriji polja je računanje integrala u necelobrojno dimenzionom prostoru prilikom razmatranja Feynmanovih dijagrama. Osnovni koncept u svim slučajevima je Riemann – Liouvilleov integral. U ovom tekstu će se pokušati što jasnije razmatrati **koncept frakcione gustine**, a polazište za ovo razmatranje upravo je ovaj integral. Pri tome će se vršiti njegova generalizacija, a na osnovu nje i zasnovati novi frakcioni račun. Organizacija rada je sledeća: u drugom paragrafu zasnovaće se neke relacije saglasno [1], [3], [4], [5]. U trećem odeljku opisaće se inovirani frakcioni Riemann – Liouvilleov integral, ali i uvesti novi kalkulus. U četvrtom su prikazane primene ovih koncepata u vidu teorijskih primera fizičkih sistema.

2. Osnovne relacije frakcionog računa

2.1. Frakcioni integrali

Ako se razmotri ponovljeni integral od realne funkcije $f(x)$ (obično $f(x) \in L_p([a,b]), p \geq 1$, na ograničenom sa obe strane segmentu $[a,b] \subset \mathbb{R}$)

$$I^n f(x) := \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \ldots \int_a^{x_{n-1}} dx_n f(x_n), n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

tada važi Cauchy formula

$$I^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x dx'(x-x')^{n-1} f(x'). \tag{2}$$

Ako je $\alpha > 0$ tada se prethodna formula generališe na sledeći način

$$I^\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x dx'(x-x')^{\alpha-1} f(x'). \tag{3}$$

Zna se da je gama funkcija $\Gamma(\alpha)$ generalizacija faktorijela i da je $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$. Po pretpostavci se za sve izvode i integrale ubuduće razmatra skup adekvatnih funkcija na kojima oni deluju. Levi i desni Riemann-Liouvilleov frakcioni integral definišu se jednačinama

$$I_{a+}^\alpha f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x dx'(x-x')^{\alpha-1} f(x') \tag{4}$$

i

$$I_{b-}^\alpha f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b dx'(x'-x)^{\alpha-1} f(x'). \tag{5}$$

Za $\alpha = 1$ obe prethodne jednačine predstavljaju poznate uobičajene integrale. Ako je $\alpha < 0$ integrali predstavljaju odgovarajuće izvode, a za $\alpha = 0$ nulti stepen integrala je jedinični operator. Ako je $x = b$ u (4), nulti stepen integrala daje vrednost funkcije u tački: $f(b)$ (isto važi, za (5) kad je $x = a$). Za $\alpha = -n$, $n \in \mathbb{N}$, ovi integrali predstavljaju, do na multiplikativnu konstantu, operatore izvoda: $I_{a+}^{\alpha=-n} f(x) = D^n f(x) = D_x^n f(x)$ i $I_{b-}^{\alpha=-n} f(x) = (-1)^n D^n f(x)$. Ako je u Eq. (4) $a = -\infty$ a u Eq. (5) $b = \infty$ dobijaju se tzv. Liouvilleovi frakcioni integrali I_+^α i I_-^α. Oni se dobro ponašaju u odnosu na Fourierovu transformaciju i mogu se definisati preko nje. Oba Riemann-Liouvilleov frakciona integrala mogu se zapisati u vidu specijalnih Grünwald-Letnikovljevih integralnih suma (interval $[a,b]$ obično je podeljen je na N jednakih intervala, $h = (b-a)/N$, očigledno dobro za numeriku, $f(x) \in L(\mathbb{R})$, $\alpha > 0$)

$$I_{a+}^\alpha f(x) = \lim_{h\to 0} h^\alpha \sum_{k=0}^{[(x-a)/h]} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x + (\alpha - k)h) \tag{6}$$

i

$$I_{b-}^\alpha f(x) := \lim_{h\to 0} h^\alpha \sum_{k=0}^{[((b-x)/h]} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x + (\alpha + k)h). \tag{7}$$

Alternativna definicija ovih suma je $(I^{\alpha}_{a+}f)(x) = \lim\limits_{h\to 0} h^{\alpha} \sum_{k=0}^{[(x-a)/h]} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x-kh)$ i $(I^{\alpha}_{b-}f)(x) := \lim\limits_{h\to 0} h^{\alpha} \sum_{k=0}^{[((b-x)/h]} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x+kh)$ (ovo je važnija definicija!). Postoji literatura o povezanosti ovih sa drugim frakcionim operatorima - integralima i izvodima. Smatraće se da funkcije koje zadovoljavaju prethodne četiri relacije postoje i koriste se. Za potrebe ovog rada ove sume - integrali su od suštinskog značaja. One zadovoljavaju svojstvo semigrupe na operacije naizmenične primene istovrsnih operatora (samo integralnog ili samo diferencijalnog tipa). Od interesa je definisati sledeće izraze ($k \in \mathbb{N}_0$)

$$\left[\begin{array}{c}\alpha\\k\end{array}\right] := (-1)^k \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)}{k!}, \left[\begin{array}{c}\alpha\\0\end{array}\right] := 1 \tag{8}$$

i sledeće delovanje $-\alpha$ stepena ($\alpha \in \mathbb{R}$) operatora prve razlike ${}_{\infty}\Delta$ nad beskonačnim nizom $a(k)$

$${}_{\infty}\Delta^{-\alpha} a(k) := \sum_{k=0}^{\infty} \left[\begin{array}{c}\alpha\\k\end{array}\right] a(k). \tag{9}$$

Poslednja jednačina opisuje delovanje frakcionog stepena sledećeg operatora prve razlike nad beskonačnim nizom $a(k)$: ${}_{\infty}\Delta^1 a(k) = a(0) - a(1)$. Ako je $\alpha = 1$, jednačina (9) opisuje poznati operator sumiranja. Za $\alpha \leq 0$, $\alpha \neq -l$, $l \in \mathbb{N}_0$, važi ${}_{\infty}\Delta^{-\alpha} a(k) \simeq -\Gamma(-\alpha+1) \cdot \Delta a(k)$ ($\Delta a(k) = a(k+1) - a(k)$)– Jumarie ($\alpha \geq 0$!). Zamena $\infty \to N$, tj. ${}_{N}\Delta^{-\alpha}$ označava da se prešlo na konačan niz ili sumu. Za Riemann-Liouvilleove frakcione integrale važiće

$$I^{\alpha}_{a+}(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+\alpha+\beta)}(x-a)^{\alpha+\beta} \tag{10}$$

i

$$I^{\alpha}_{b-}(b-x)^{\beta} = \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+\alpha+\beta)}(b-x)^{\alpha+\beta} \tag{11}$$

za $\beta > -1$ i $\alpha \geq 0$. Integrali od konstante C jednaki su

$$I^{\alpha}_{a+}C = \frac{C}{\Gamma(1+\alpha)}(x-a)^{\alpha} \tag{12}$$

i

$$I^{\alpha}_{b-}C = \frac{C}{\Gamma(1+\alpha)}(b-x)^{\alpha}. \tag{13}$$

Liouvilleovi frakcioni integrali zadovoljavaju sledeće formule

$$I^{\alpha}_{\pm}e^{\pm ax} = a^{-\alpha}e^{\pm ax}, a > 0, \alpha > 0, \tag{14}$$

$$I^{\alpha}_{\pm}sin(bx) = b^{-\alpha}sin(bx \mp \frac{\alpha\pi}{2}), \tag{15}$$

a važe i

$$I^{\alpha}_{+}(b-ax)^{\beta} = \frac{\Gamma(-\alpha-\beta)}{\Gamma(-\beta)}(b-ax)^{\alpha+\beta} \tag{16}$$

gde je $a \geq 0, b - ax > 0$ i $\alpha + \beta < 1$, odnosno

$$I_{-}^{\alpha} x^{\beta} = \frac{\Gamma(-\alpha-\beta)}{\Gamma(-\beta)} x^{\alpha+\beta} \tag{17}$$

uz uslove $\alpha + \beta < 1$ i $\alpha > 0$. Na kraju izlaganja o frakcionim integralima razmotriće se njihovo definisanje preko konvolucije na tzv. karakterističnim stepenim funkcijama [3], za $\alpha \notin \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} = \mathbb{N}_0^-$ i $x_{a+} := \{x | x > a\}$, (Šilov i Uchaikin !)

$$\Phi_{\alpha}(x) := \frac{x_{a+}^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \tag{18}$$

i, za $\alpha \to -m, m \in \mathbb{N}_0$, dobijaju se odgovarajući stepeni izvoda Dirakove δ - funkcije

$$\lim_{\alpha \to -m} \Phi_{\alpha}(x) := \frac{x_{a+}^{-m-1}}{\Gamma(-m)} = (-1)^m \cdot \delta^{(m)}(x). \tag{19}$$

Tada je za $\alpha \in \mathbb{R}$

$$I_{a+}^{\alpha} f(x) = \Phi_{\alpha}(x) \star f(x) = \int_a^x dx' \Phi_{\alpha}(x - x') f(x'). \tag{20}$$

Ovakva adaptacija frakcionih integrala preko konvolucije dobra je u slučaju $a = 0$ za korišćenje Laplaceove transformacije. Pored toga, moguće je definisati frakcioni izvod Dirakove δ - funkcije preko odgovarajućeg stepenovanja karakteristične stepene funkcije ([3], str 177).

2.2. Frakcioni izvodi

U ovoj sekciji ukratko će se (re)definisati Riemann – Liouvilleovi i Caputovi frakcioni izvodi i prikazati njihove neke osnovne osobine i relacije. Frakcioni Riemann – Liouvilleov izvod stepena $\alpha > 0$ definiše u dva slučaja. Prvi

$$D_{a+}^{\alpha} f(x) = D^n I_{a+}^{n-\alpha} f(x) \tag{21}$$

a drugi

$$D_{b-}^{\alpha} f(x) = (-1)^n D^n I_{b-}^{n-\alpha} f(x), \tag{22}$$

gde je $n = [\alpha] + 1$. Pokazuje se da da je ova definicija kompatibilna sa definicijama preko odgovarajućih Riemann – Liouvilleovih frakcionih integrala, te se svodi na njih, ali uz transformaciju pod integralima $\alpha \to -\alpha$, pa i za $\alpha = 0$. Frakcioni Riemann – Liouvilleov izvod od konstante nije jednak nuli. I Caputov frakcioni izvod definiše se u dva slučaja, uz uslove $\alpha > 0$ i $\alpha \notin \mathbb{N}$, prvi

$$^{C}D_{a+}^{\alpha} f(x) = I_{a+}^{n-\alpha} D^n f(x) \tag{23}$$

i drugi

$$^{C}D_{b-}^{\alpha} f(x) = (-1)^n I_{b-}^{n-\alpha} D^n f(x), \tag{24}$$

gde je, standardno, $n = [\alpha] + 1$. Za $\alpha = n$ ovi izvodi ponašaju se indentično kao i Riemann – Liouvilleovi. Slično tome, mogu se koristiti formule (10) i (11) uz smenu $\alpha \to -\alpha$, osim u slučaju konstante, $\beta = 0$, kada su Caputovi izvodi jednaki nuli. Ova činjenica upućuje na okolnost da Caputovi izvodi mogu biti interesantniji za primene. Takođe, važe relacije: ${}^C D^0_{a+} f(x) = f(x) - f(a)$ i ${}^C D^0_{b-} f(x) = f(b) - f(x)$. Veza između Riemann – Liouvilleovog i Caputovog frakcionog izvoda je poznata, ovde će se ona zapisati samo u slučaju $0 < \alpha < 1$ za levostrane izvode

$$ {}^C D^\alpha_{a+} f(x) = D^\alpha_{a+} f(x) - \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}. \tag{25}$$

Ako se definiše Mittag-Lefflerova jednoparametarska funkcija (MLF)

$$E_\alpha(x^\alpha) := 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)}; \alpha, x \geq 0 \tag{26}$$

tada je $({}^C D^\alpha_{a+} E_\alpha((x-a)^\alpha / x_0^\alpha)) = (1/x_0^\alpha) E_\alpha((x-a)^\alpha / x_0^\alpha)$. Za $\alpha = 1$ je $E_1((x-a)^1/x_0^1) = exp((x-a)/x_0)$. Jedan od kriterijuma razvijenosti frakcionog računa je činjenica da se MLF može brzo i efikasno numerički računati kao i eksponencijalna funkcija. Moguće je definisati i odgovarajuće Liouvilleove frakcione izvode, što se ovde neće razmatriti.

2.3. Tarasovljevo definisanje frakcione gustine

Frakciona gustina definiše se nad metričkim potprostorima Euklidskih prostora. Najvažniji je slučaj fraktala W masene dimenzije D – radi se o rasporedu masa na njemu (u sklopu toga pristupa, sa stepena frakcionog izvoda ili integral α prelazi se na D). Tada se, u slučaju box-counting mere u slučaju sfernog pokrivanja fraktala $d\mu_B$, integral nad D-dimenzionim metričkim prostorom neke funkcije f zapisuje u vidu

$$\int_W f d\mu_B = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} \int_0^\infty f(r) r^{D-1} dr. \tag{27}$$

Zapis preko Liouvilleovog frakcionog integrala je sledeći

$$\int_W f d\mu_B = \frac{2\pi^{D/2}\Gamma(D)}{\Gamma(D/2)} I^D_- f(0). \tag{28}$$

Ovo je jedna od prvih meni interesantnih indikacija o povezanosti fraktala i frakcionih integrala. U Odeljcima (1.10) i (1.11) svoje knjige, Tarasov povezuje prethodnu formulu sa integralom po Hausdorffovoj meri (na Borelovoj familiji skupova), koja je generalizacija Lebesguove mere (važni odeljci za ovaj tekst su (1.15) – (1.21)). Sferno (ili preko hiperkocaka) pokrivanje fraktala po Tarasovu ne daje korektne vrednosti za Hausdorffovu dimenziju i meru. Hausdorffova mera, inače, za razliku od Lebesguove, diskriminiše – razlikuje pojedine skupove mere nula (fraktale različite dimenzije, za koje se ovde i koristi). Integral po ovoj meri se piše– definiše za metrički prostor (fraktal) Hausdorffove fraktalne dimenzije D, u obliku

$\int_W \cdot f(x)d\mu_{HD}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i \cdot \mu_{HD}(E_i, D)$ za $W \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$, ($E_i$ je prebrojiva familija metričkih Lebesgue merljivih podkupova od $\mathbb{R}^n$, takva da je $diam(E_i) \leq \varepsilon$, $\forall i$). Nad ovom familijom važi za $f(x) = f_i = f(x_i)$ kada $x \in E_i$, $\int_W f(x)d\mu_{HD}(x) = \omega(D) \lim_{diam(E_i)\to 0} \sum_{E_i} f(x_i)[diam(E_i)]^D$ ($\omega(D)$ je odgovarajuća funkcija fraktalne dimenzije D). Naglašavam da je $dim_B(W) \geq dim_H(W)$. Tarasov u knjizi napominje na strani 24 da box–counting mera (dimenzija) pomoću sfera, iako se lako računa, ne može uvek dati ispravnu vrednost ni Hausdorffove mere ni dimenzije. Zato on u knjizi upravo koristi navedenu opštu definiciju Hausdorfove mere. Sve napisano znači, na primer, da zbir masa na tačkama određenog fraktala može biti konačna veličina. U daljem tekstu razmotriće se, radi jednostavnosti, a u duhu prethodnog teksta, metrički potprostori od $1d$ Euklidskog prostora $\mathbb{R}^1$. Neka je zadat fraktal $W = \{x : x \in [a,b] \in \mathbb{R}\}$ – segment realne ose. Tada je masa $M_D(W)$ u odnosu na generalisan, frakcioni integral (jednačina (1.110) u [1]) stepena D za zadatu funkciju gustine $\lambda(x)$

$$M_D(W) = \frac{1}{\Gamma(D)} \int_a^b \lambda(x)|x-y|^{D-1}dx. \tag{29}$$

Treba da se naglasi da je ovde $D = 1$. Za $D < 1$, kada W nije segment realne ose, na primer, za $D = 0$, je, zbog (19), $M_D(W) = M(y)$. Tarasov fiksira y jednačinom $y = a$, odnosno, radi se o tački mase $M_D(W)$ sa koordinatom $x = a$. On je, u principu, mogao fiksirati i drugu tačku na segmentu $[a,b]$. Dalje se može pisati

$$M_D(W) = \int_a^b \lambda(x)d\mu_{HD}([a,x]) \tag{30}$$

gde je

$$d\mu_{HD}([a,x]) = d\mu_D([a,x]) = d\mu_{HxD}([a,x]) = c_1(D, x-a)dx, \tag{31}$$

s tim da je

$$c_1(D, x-a) = \frac{(x-a)^{D-1}}{\Gamma(D)} \tag{32}$$

i, za $x \in \mathbb{R}$,

$$c_1(D, x) = \frac{|x|^{D-1}}{\Gamma(D)} \tag{33}$$

Za $\lambda(x) = 1$ je (jednačina (1.102) u [1])

$$\mu_{HD}([a,b]) = \frac{(b-a)^D}{\Gamma(D+1)}. \tag{34}$$

Zbog poglavlja (1.11) u [1] $d\mu_D([a,x])$ se može indentifikovati, do na izraz $\Gamma(D+1)$ ($\omega(D) = \frac{1}{\Gamma(D+1)}$), sa diferencijalom Hausdorffove mere $d\mu_{HD} = d\mu_D = d\mu_{HxD} = d\mu_{HDx} = dH^D([a,x])$, dok je D njena odgovarajuća fraktalna Hausdorffova dimenzija.

Smenom $b \to x$ u prethodnoj jednačini i nalaženjem njenog diferencijala dobija se (31). Tada je

$$M_D(W) = \int_a^b \lambda(x) c_1(D, x-a) dx. \tag{35}$$

Sada se lako vidi da je, za homogenu gustinu $\lambda(x) = \lambda_0$ i $0 < D \leq 1$ (oblast W nije samo segment realne ose) važi svojstvo homogenosti

$$M_D([a_1, b_1]) = M_D([a_2, b_2]) \tag{36}$$

ako je $|b_1 - a_1| = |b_2 - a_2|$, dok svojstvo fraktalnosti znači da važi

$$M_D([a_1, b_1]) = k^D M_D([a_2, b_2]) \tag{37}$$

kada je $|b_1 - a_1| = k^D |b_2 - a_2|$ $(k > 0, k \neq 1)$. Naravno, ako je $D \neq 1$, poslednja relacija ne opisuje segment realne ose. Ovakav tip skaliranja karakterističan je za fraktale masene Hausdorffe dimenzije D, čija je vrednost dobijena box–counting metodom. Poznato je da se fraktalni region W opisuje masenim zakonom skaliranja $M_D(W) \sim R^D$ (R je radijus odgovarajuće lopte koja ga omeđuje). On je, po definiciji, homogen ako je translatorno invarijantan. Ako se sa $L_d(W)$ označe linearne dimenzije fraktalnog regiona W, tada za konstatnu gustinu $\lambda(x) = \lambda_0 = const$ iz $L_d(W_1) = L_d(W_2)$ sledi $M_D(W_1) = M_D(W_2)$. Fraktalnost znači da ako je $\lambda(x) = \lambda_0 = const$ i $L_d(W_1) = k^1 L_d(W_2)$ biće $M_D(W_1) = k^D M_D(W_2)$. Sve ovo važi, da naglasim, za $0 < D < 1$. Na kraju, imajući u vidu veze raznih mera, za fraktalni region W masene dimenzije D važi

$$M_D(W, t) = \int_W \lambda(x, t) c_1(D, x-a) dx. \tag{38}$$

3. Razmatranje Tarasovljevog pristupa

Činjenica je da u svojoj knjizi Tarasov nigde nije proučavao slučaj $D = 0$, iako se njegove zamisli mogu koristiti kao osnova i tada, pa i šire, $D \in \mathbb{R}$ ili $D \in \mathbb{C}$. Evidentno je to da odgovor, na osnovu izlaganja posle Eq. (29) sledi iz knjige [3] i, po autoru ovog teksta, dodatnog razmatranja. Prvo, neophodno je formulisati dodatan uslov, da u slučaju kada je $D = 0$, umesto uslova homogenosti i fraktalnosti, važi uslov da se radi o materijalnoj tački koja se nalazi u $x = a$. Međutim, ovaj uslov ima svoju interpretaciju koju ću u daljem tekstu razmotriti. Prvo ću definisati dve nove modifikacije Riemann – Liouvilleovog integrala (levu i desnu)

$$I^\alpha_{x+} f(b) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b dx' (b - x')^{\alpha-1} f(x') \tag{39}$$

i

$$I^\alpha_{x-} f(a) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x dx' (x' - a)^{\alpha-1} f(x'). \tag{40}$$

Za $\alpha = 1$ obe prethodne jednačine predstavljaju poznate uobičajene integrale. Njima odgovaraju sledeće Grünwald-Letnikovljeve integralne sume

$$I_{x+}^{\alpha} f(b) = \lim_{h \to 0} h^{\alpha} \sum_{k=0}^{[(b-x)/h]} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(b + (\alpha - k)h) \tag{41}$$

i

$$I_{x-}^{\alpha} f(a) := \lim_{h \to 0} h^{\alpha} \sum_{k=0}^{[((x-a)/h]} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(a + (\alpha + k)h). \tag{42}$$

Alternativna definicija ovih suma je $(I_{x+}^{\alpha} f)(x) = \lim\limits_{h \to 0} h^{\alpha} \sum_{k=0}^{[(b-x)/h]} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(b - kh)$ i $(I_{x-}^{\alpha} f)(x) := \lim\limits_{h \to 0} h^{\alpha} \sum_{k=0}^{[((x-a)/h]} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(a + kh)$. Očigledno, ove modifikacije fokusiraju se na granice intervala a ne na tekuće tačke. Takođe, primećuje se da je Tarasov preko jednačine (40) definisao svoju frakcionu gustinu. Naravno, u tom smislu moguća je i druga formula (41). Tarasov je mogao da odabere neku tačku $y \in (a, b)$, ali tada bi postojala dva integrala, po gornjoj i donjoj granici koja bi se svela na kombinaciju (39) i (40), za dato x. On nije razmatrao ove mogućnosti. Dakle, **pristup u ovom tekstu je opštiji od Tarasovljevog (generališu se Riemann – Liouvilleovi integrali)**. Za $\alpha = 0$ je $I_{x-}^{0} f(a) = f(a)$ i $I_{x+}^{0} f(b) = f(b)$. Kada je $\alpha = -n$, $n \in \mathbb{N}$, ovi integrali predstavljaju, do na multiplikativnu konstantu, operatore izvoda u odgovarajućoj rubnoj tački: $I_{x+}^{\alpha=-n}(b) = D_b^n f(b) = D_{x=b}^n f(x)$ i $I_{x-}^{\alpha=-n} f(a) = (-1)^n D_a^n f(a)$. Ako je u Eq. (39) $b = \infty$ a u Eq. (40) $a = -\infty$ dobijaju se tzv. novi Liouvilleovi frakcioni integrali I_{n+}^{α} i I_{n-}^{α}. Ako je $\alpha < 0$, radi se o novim izvodima, koji su fokusirani na krajeve intervala. Na primer, važe sledeće formule

$$I_{x-}^{\alpha} (x - a)^{\beta} = \frac{\Gamma(1 + \beta)}{\Gamma(1 + \alpha + \beta)} (x - a)^{\alpha + \beta} \tag{43}$$

i

$$I_{x+}^{\alpha} (b - x)^{\beta} = \frac{\Gamma(1 + \beta)}{\Gamma(1 + \alpha + \beta)} (b - x)^{\alpha + \beta} \tag{44}$$

za $\beta > -1$ i $\alpha \geq 0$. Integrali od konstante C jednaki su

$$I_{x-}^{\alpha} C = \frac{C}{\Gamma(1 + \alpha)} (x - a)^{\alpha} \tag{45}$$

i

$$I_{x+}^{\alpha} C = \frac{C}{\Gamma(1 + \alpha)} (b - x)^{\alpha}. \tag{46}$$

Na primer, može se raditi konvolucija na novim karakterističnim stepenim funkcijama, za $\alpha \notin \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ i $x_{b-} := \{x | x < b\}$

$$\Phi_{\alpha}(x) := \frac{x_{b-}^{\alpha - 1}}{\Gamma(\alpha)} \tag{47}$$

i, za $\alpha = -m, m \in \mathbb{N}_0$, dobijaju se odgovarajući stepeni Dirakove δ - funkcije

$$\lim_{\alpha \to -m} \Phi_\alpha(x) := \lim_{\alpha \to -m} \frac{x_{b-}^{\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} = (-1)^m \cdot \delta^{(m)}(b). \tag{48}$$

Tada je nova konvolucija za $\alpha \in \mathbb{R}$

$$I_{b-}^{\alpha} f(x) = \Phi_\alpha(x) \star_N f(x) = \int_x^b dx' \Phi_\alpha(b - x') f(x'). \tag{49}$$

Pošto se radi o distribuciji mase, moguće je definisati i frakcionu Dirakovu δ - funkciju $\delta_\alpha(x' - x'')$, na primer, u odnosu na (40)

$$\delta_\alpha(x' - x'') = \Gamma(\alpha)(x' - a)^{1-\alpha} \delta(x' - x''). \tag{50}$$

Slično je, kada $\alpha \in \mathbb{R}$, $x_{x-} := \{x' | x' < x\}$ $(x' \in [a, x))$, te je $\Phi_\alpha(x) := \frac{x_{x-}^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ i $I_{x-}^{\alpha} f(x) = \Phi_\alpha(x) \star_{NN} f(x) = \int_{a-}^{x} dx' \Phi_\alpha(x' - a) f(x') = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a-}^{x} dx' (x' - a)^{\alpha-1} f(x')$, ili, nepreciznije, $I_{x-}^{\alpha} f(x) = \Phi_\alpha(x) \star_{NN} f(x) = \int_a^x dx' \Phi_\alpha(x' - a) f(x') = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x dx'(x' - a)^{\alpha-1} f(x')$. Frakcioni izvodi mogu se prirodno nastaviti na prethodno. Pošto su za necele vrednosti α Grünwald-Letnikovljeve integralne sume (41) i (42) funkcije od x, odgovarajući frakcioni izvodi se mogu slično definisati kao u (21), (22), (23) i (24), s tim da za $\alpha = -n$ važe već navedene formule. Sličnost znači da se diferencira po fiksnim granicama kao da su promenljive, a onda se njihove vrednosti fiksiraju. Za segmente realnih brojeva te definicije su uglavnom u redu, međutim, kakva je situacija kada se radi o skupovima sa nepozitivnom fraktalnom (Hausdorffovom) dimenzijom? U sledećem izlaganju koristiće se i rezultati radova [13 – 19]. Relacije (41) i (42) sugerišu sledeće razmatranje, koje nije detaljno, već samo okvirno. Flag funkcija $\theta(x)$ za skup – presek fraktala F dimenzije D nad realnim intervalom $[a, b] \subset \mathbb{R}$ i samog intervala, za $D \leq 1$ (umesto α piše se D) jednaka je 1 za $F \cap [a, b] \neq \emptyset$ i 0 u suprotnom. Neka $x \in F \cap [a, b] = W$ (može biti i $W \subset \bigcup_{l=0}^{\infty} E_l$, za već definisane E_l, a razmatra se i pogodna funkcija – frakciona – fraktalna gustina $y = f = f(x) : F \cap [a, b] \to \mathbb{R}$ za $D \geq 0$; sigurno je tada pogodna funkcija – jednostavna flag funkcija $\theta(x)$). U opštem slučaju koristiće se, kao što će se iz daljeg izlaganja videti stepena flag funkcija $\theta_D(x) = \frac{(\theta(x))^D}{\Gamma(D+1)}$ i funkcija $y_D = f_D = f_D(x) : F \cap [a, b] \to \mathbb{R}^D$ (ove činjenice treba imati ubuduće u vidu). Podela $P_{[a,x]}$ (ili samo P) intervala $[a, x]$, za $a < x \leq b$, je konačan diskretan skup tačaka $P_{[a,x]} = \{a = x_0, x_1, \cdots, x_n = x\}$, $x_i < x_{i+1}$. Svaki interval $[x_i, x_{i+1}]$, $i \in 0, 1, 2, ..., n-1$ naziva se komponentni interval, svaki od njih ima dužinu $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i > 0$. Tada je $x_i = x_0 + \sum_{k=1}^{i} h_k$. Neka je $|P| = h = max\{h_1, h_2, ..., h_n\}$ parametar podele. Skup podela nad intervalom $F \cap [a, b]$ označava se $\mathcal{P} = \{P_{[a,x]} = P\}$. Podela $Q \subsetneqq P$, je, po definiciji, grublja od podele P, odnosno, P je finija podela od podele Q. Onda je, kada postoji, za $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}) = [x_k, x_{k+1}] \setminus \{x_{k+1}\}$, karakteristična frakciono – fraktalna (masena) mera $\sigma_{x-}^{D}[f(x), F \cap [a, b], P] = \sum_{k=0}^{n-1} h_{k+1}^{D} \cdot \left[\begin{array}{c} D \\ k \end{array} \right] \cdot f(\xi_k)$. Za svako $\delta > 0$ i $a \leq b$, krupnozrna raspodela mase (krupnozrna masena funkcija) frakciono – fraktalne gustine $f(x)$ jeste reprezent $\gamma_{x-,\delta}^{D}(f(x), F \cap [a, b])$ skupa funkcija $\Gamma_{x-,\delta}^{D}(f(x), F \cap$

$[a,b]) = \{\sigma^D_{x-}[f(x), F\cap[a,b], P]\}_{\{P_{[a,x]}:|P|\leq\delta\}}$. Odgovarajuća masena funkcija, ako postoji, definisana je jednačinom: $\gamma^D_{x-}(f(x), F\cap[a,b]) = \lim_{\delta\to 0}\gamma^D_{x-,\delta}(f(x), F\cap[a,b])$. Tada je $\gamma^D_{x-}(f(x), F\cap[a,b]) = I^D_{x-}f(a) := \frac{1}{\Gamma(D)}\int_a^x dx'(x'-a)^{D-1}f(x')$ $(x' \in F\cap[a,x])$, što predstavlja **novi lokalni frakcioni integral**. Ako se uvede **nova frakciona mera** $\mu_{vDx-}(F\cap[a,b]) = \frac{1}{\Gamma(D)}\int_a^x dx'(x'-a)^{D-1}\theta(x') = \int_a^x \theta(x')d\mu_{vDx-}(x', F\cap[a,b])$, gde je $\mu_{vDx-}(x', F\cap[a,b]) = \frac{1}{\Gamma(D+1)}(x'-a)^D \in \mathbb{R}^D$, važi $\frac{(a\pm b)^D}{\Gamma(D+1)} = \frac{a^D}{\Gamma(D+1)} \pm \frac{b^D}{\Gamma(D+1)}, \frac{(\pm a)^D}{\Gamma(D+1)} = \pm\frac{a^D}{\Gamma(D+1)}$, što opisuje skupove frakcionih brojeva $\mathbb{R}^D \ni x_D = \frac{x^D}{\Gamma(D+1)}$. Za $D=0$ je $\mathbb{R}^{D=0} = \{0,1\} \ni x_{D=0}$. Za, na primer, $D=-1$, važi $\delta(a\pm b) = \delta(a)\pm\delta(b)$ i $\delta(\pm a) = \pm\delta(a)$, simbol δ označava Dirakovu delta funkciju, odnosno, $x_{D=-1} = \delta(x) \in \mathbb{R}^{D=-1}$ (generalisane funkcije su brojevi). Diskretna ε – verzija prethodne mere za skup W je $\mu_{vDx-}(W, D, \varepsilon) = inf\{_\infty\Delta^{-D}\frac{(diam(E_k))^D}{\Gamma(D+1)}|W \subset \bigcup_{k=0}^\infty E_k \wedge diam(E_k) \leq \varepsilon\}$ (očigledno, u opštem slučaju **važan** je redosled skupova E_k u prethodnoj uniji, odnosno, oni su totalno uređeni i međusobno različiti, skup $\{E_l\}$ ima osobinu da su mu svi skupovi takvi da ne mogu za problem koji se proučava da se napišu kao unija dva ili više neprazna podskupa, osnovni razlog tome je frakciona suma u kojoj se ne može promeniti redosled sumiranja), ili, kada $\varepsilon\to 0$, $\mu_{vDx-}(W,D) = \lim_{\varepsilon\to 0}\mu_{vD}(W,D,\varepsilon)$. Iz definicije navedeneh suma primećuje se da je $\mu_{vD=0x-}(W,0) = \mu_{vD=0x-}(E_0,0) = 1$ (ako skup E_0 nema nulti dijametar, jer za nulti dijametar mera je, po definiciji, jednaka nuli) i $\mu_{vD=-1x-}(W,-1) = \mu_{vD=-1x-}(E_0,-1) - \mu_{vD=-1x-}(E_1,-1) = \delta(diam(E_0)) - \delta(diam(E_1))$ ($\delta(...)$ je singularna Dirakova mera, δ – funkcija). Na kraju, piše se $\gamma^D_{x-}(f(x), F\cap[a,b]) = I^D_{x-}f(a) := \int_a^x f(x')d\mu_{vDx-}(x', F\cap[a,b]) = \frac{1}{\Gamma(D)}\int_a^x dx'(x'-a)^{D-1}f(x')$. Ostale osobine ove frakcione mere neće se analizirati. Umesto toga, napomenuće se da je za $D=0$, $\sigma^{D=0}_{x-}[f(x), F\cap[a,b], P] = h^0_1\cdot 1\cdot f(\xi_1)$, $\xi_1\in[a,x_1)$, jedan izbor $\gamma^{D=0}_{x-\delta}(f(x), F\cap[a,b]) \in \{f(\xi_1)\}_{\{P_{[a,x]}:|P|\leq\delta\}} = f(a)$ (i za opšte $f(\xi_1)$ je isto); tada je, i za $\delta\to 0$, $\xi_1\to a$ i $\gamma^{D=0}_{x-}(f(x), F\cap[a,b]) = f(a)$. Za $D=0$ rezultat je samo pogodna funkcija u tački. Ta činjenica sugeriše da frakciono – fraktalna gustina za nultu dimenziju predstavlja masu skoncentrisanu u tački. Ako je, na primer, $D=-1$, $\sigma^{D=-1}_{x-}[f(x), F\cap[a,b], P] = h_1^{-1}\cdot f(\xi_1) - h_2^{-1}\cdot f(\xi_2)$, $\gamma^{D=-1}_{x-\delta}(f(x), F\cap[a,b]) \in \{\sigma^{D=-1}_{x-}[f(x), F\cap[a,b], P]\}_{\{P_{[a,x]}:|P|\leq\delta\}}$, za $\xi_1\in[a,x_1)$ i $\xi_2\in[x_1,x_2)$, te, kada $\delta\to 0$ sledi $h_1 = h+o(h)$ i $h_2 = h+o(h)$ i $\xi_1,\xi_2\to a$, odnosno, $\xi_1 = a+h+o(h)$ i $\xi_2 = a+2h+o(h)$ pa je $\gamma^{D=-1}_{x-}(f(x), F\cap[a,b]) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h+o(h))-f(a+2h+o(h))}{h+o(h)} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a+2h)}{h} = -f'(a)$. Poslednja dva rezultata kompatibilna su sa osobinama karakterističnih stepenih funkcija. Generalisana lokalna neprekidnost funkcije $y_D = f_D = f_D(x)$ (ne mora biti frakciono – fraktalna gustina, pisaće se bez indeksa D: $y = f = f(x)$) u tački $x = x_0$ je takođe evidentna: $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon^D}{\Gamma(D+1)}$ ako postoji kada $0 < |x-x_0| < \delta$ za $\varepsilon, \delta > 0$. To se piše: $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Ako je ova funkcija generalisano lokalna frakciono neprekidna u svakoj tački intervala (a,b) to se opisuje rečima da je $f(x)$ generalisano lokalno frakciono neprekidna funkcija nad (a,b) i zapisuje $f(x) = f_D(x) \in C_{vDx-}(a,b)$. Generalisani lokalni frakcioni izvod po meri, sa svim uslovima koji se pri tome podrazumevaju, $\mu_{vDx-}(F\cap[a,b])$, u tački x za ovakve funkcije definiše se na sledeći način $y^{(D)}_x := \frac{df(x)}{d\mu_{vDx-}}$. Kada je $D=1$, radi se o običnom poznatom diferencijalno – integralnom računu i skupu $\mathbb{R}$. Sve navedeno je kratak prikaz potpuno novog frakcionog kalkulusa. Delta funkcija kao novi tip broja (analogno važi za ostale generalisane funkcije) sugeriše da se radi o novom shvatanju Colombeauovih algebri, te da se ona shvata u smislu graničnih vrednosti u njihovom okviru. S druge strane posmatrano, ako je $D = 0$, zbog $\mathbb{R}^{D=0} = \{0, 1\}$, u pitanju je logika. Dakle, brojevi i generalisane funkcije mogu se shvatiti kao logičke valence. Autor ovog teksta ih je prvi put i zapazio u tom kontekstu – koncepciji generalizacije pojma gustine (mase). Kasnije prilaze ovoj problematici nije vezivao za fiziku.

Može se, u okviru diskusije, zaključiti da je Tarasov, kada je uvodio frakcionu gustinu, iako to nije primetio, uveo jedan novi tip Riemann – Liouvilleovog zasnovanog frakcionog integrala, za $\alpha > 0$. U ovom tekstu, pored toga što je to primećeno, utvrđeno je da vrednost parametra $\alpha = D$ može da bude ma koji realan ili kompleksan broj (prelaz od pozitivnih ka negativnim fraktalnim dimenzijama je gladak). Za opisanu konstrukciju ne postoji analogon u literaturi niti mogućnost da se svede na prethodne radove – frakcione operatore.

4. Nekoliko primera u fizici

Autor ovog teksta prvo je razmatrao fizičke sisteme, u okviru frakcione generalizacije neprekidne sredine i njene gustine. U ovom poglavlju razmotriće se neki osnovni fizički primeri kojima se on pri tome bavio.

4.1. Gustina Lagrangiana–odnos neprekidne sredine i materijalne tačke i van tih granica

Cilj ovog pododeljka samo je zapis odgovarajućih jednačina u najjednostavnijem $1d$ slučaju neprekidnih sredina i njihovo analiziranje. Varijacioni frakcioni račun, iako je u ovom slučaju nov (stepeni integrala nemaju ograničenja), nije cilj, već pregled rezultata. Razmotrimo sledeću frakcionu gustinu Lagarangiana za polje $\xi = \xi(t, x)$, $x \in F \cap [a, b]$, ovde tip frakcionog izvoda nije u prvom planu,

$$\mathcal{L}_D(x, \xi, \frac{\partial \xi}{\partial \mu_{vDx-}}) = \frac{\lambda_D}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 - \frac{\kappa_D}{2}(\frac{\partial \xi}{\partial \mu_{vDx-}})^2, \tag{51}$$

za koju je dejstvo (videti i (40))

$$S_D = \int dt I^D_{x-} \mathcal{L}_D(x = a = 0, \xi, \frac{\partial \xi}{\partial \mu_{vDx-}}), \tag{52}$$

odnosno, Lagrangian

$$L_D = I^D_{x-} \mathcal{L}_D(x = a = 0, \xi, \frac{\partial \xi}{\partial \mu_{vDx-}}). \tag{53}$$

Precizniji zapis u prethodne dve jednačine je $x = a+ = 0+$. Dakle, za $D = 1$, radi se, redom, o poznatoj gustini Lagrangiana, dejstvu i Lagrangianu za talasnu jednačinu oscilovaja $1d$ neprekidne strune, ξ je polje pomeraja od ravnotežnog položaja a $\lambda_{D=1} = \lambda$ - linijska gustina i $\kappa_{D=1} = \kappa$ - sila. Moguće je nametnuti uslov da je ona pričvršćena na levom kraju za koordinatni početak, dok je na desnom kraju (neka je dužina strune jednaka $b = L$) slobodna. Ako je $D = 0$ zbog već zapisanih relacija za frakcionu gustinu, gustina Lagrangiana je Lagrangian linearnog harmonijskog oscilatora, koji osciluje oko koordinatnog početka, $\lambda_{D=0} = m$ je masa čestice a $\kappa_{D=0} = k$ je koeficijent elastičnosti opruge. U principu treba razmotriti i druge $D \in \mathbb{R}$ (to treba obrazložiti), a λ_D i κ_D su konstante. U (51) ostao je prvi izvod po vremenu zbog toga što se u (52) pojavljuje prvi integral po vremenu. U [9], između ostalog, razmatrana su frakciona polja i fraktori. Međutim, oni nemaju usklađenost sa frakcionom gustinom Lagrangiana. Na ovom mestu,da bi se ova okolnost razjasnila, mora se sprovesti analogiju sa odnosom između uobičajene i Lévy difuzije. Obe se razmatraju u celobrojno dimenzionom prostoru, ali prva je osnovna (normalna) i celobrojna u odnosu na stepene vremenskih i prostornih izvoda i adaptirana (usklađena) na dimenzionalnost. Lévy difuzija se opisuje, generalno, frakcionim izvodima - anomalna je. Ovde se normalna frakciona polja definišu tako da su usklađena sa prostornom frakcionom gustinom, odnosno, da za dve vrednosti jednog indeksa $D = 0$, $D = 1$ i u slučaju $1d$ opisuju jedan diskretan klasičan sistem (materijalnu tačku) i jedan klasičan neprekidan sistem (radi se, redom, o mehanici diskretnih i kontinualnih sredina–sistema). Sva ostala frakciona polja su, po definiciji, anomalna. Takođe, normalna frakciona polja mogu se shvatiti i kao generalizacija pojma polja. Zašto ovakve definicije? Intuitivan odgovor je: nuldimenzioni prostor je tačka a jednodimenzioni je duž (prava, poluprava). Ovo uvodno razmatranje neophodno je proširiti i na vremensku dimenziju (ima komplikacija, FALVA tip problema, frakcione akcije varijacioni problem, na njemu je radila Tatiana, O., Agnieszka). Poslednje tri jednačine opisuju i frakciono Klein-Gordonovo $1d$ kvantno polje bezmasene čestice. Kratka analiza upućuje na to da bi trebalo da se verovatnoća (normirana na jedinicu ili Dirakovu delta funkciju) u uobičajenom slučaju, normira samo na jedinicu u tačkama koje prolazi klasična čestica ovog frakcionog Klein-Gordonovog polja. Pre svega, zbog toga što generelisana normiranost treba da bude na frakcionu delta–funkciju ili jedinicu. U slučaju klasične mehanike, čestica talasa opisanog talasnom funkcijom kvantnog polja predstavlja LHO. U kompleksnoj reprezentaciji oscilovanja, njen kvadrat amplitude treba onda da bude jednaka jedinici (nema integrala gustine verovatnoće) i to na putanji čestice nad kojom postoji dato frakciono kvantno polje (putanja slobodne bezmasene čestice). Verovatnoća bi, dakle, trebalo da se redukuje na klasičnu logiku. Za početak, ovu okolnost bi trebalo ispitati sredstvima verovatnosnih logika, i možda doći do izvesnih generalizacija. Na primer, kvantna logika je jedan specijalan slučaj ovih logika. Radi se o postkvantnoj fizici. Interesantno je uporediti ovu metodologiju sa semiklasičnom ili WKB aproksimacijom kada $\hbar \to 0$. Frakciona gustina Lagrangiana slobodnog frakcionog elektromagnetnog polja trebalo bi da ima slične karakteristike–da ima svoju klasičnu česticu itd. O odnosima polja i njihovih klasičnih čestica pisaše se do kraja ovog odeljka. Posebno treba, čini se, obratiti pažnju na pojavu samofokusiranja elektromagnetnog polja u neuređenim i fraktalnim sredinama pozitivnih i/ili negativnih dimenzija. Poznato je kakav je odnos mehanike i Lagrangiana diskretnog sistema linearnih harmonijskih oscilatora i kontinualne sredine ([10], [11], [12]). U jednostavnim monokristalima, zvučni talasi opisani odgovarajućom talasnom jednačinom u dugotalasnoj aproksimaciji kontinualne sredine sistema diskretnih oscilatora odgovaraju procesu oscilovanja atoma kristalne rešetke koji su vrlo blizu jedan drugoga. U opštem slučaju jednostavnog kristala – skupa diskretnih oscilatora su disperzioni zakoni klasičnih i kvantnih oscilacija indentični. Tako atomi, kvantni objekti, mogu opisivati klasične vibracije. U dugotalasnom sučaju, tada se dobija dobro poznata formula disperzije koja povezuje faznu brzinu, talasnu dužinu i frekvenciju oscilovanja talasa. U slučaju elektromagnetnog polja u vakuumu, potpunog polja i njegove gustine Lagrangiana, eventualne čestice koje vrše analogne oscilacije prethodnim, verovatno bi morale biti manje i prostorno, i po masi, i praktično bi se mogle detektovati preko odstupanja od zakona disperzije $c = \lambda\nu$. Interesantna okolnost je da su one nerelativističke, a da, u tom kontekstu, generalisane, frakcione ϕ^4 teorije opisuju relativističke popravke. Slično bi se mogla razmatrati i kvantna talasna funkcija, uz dopunu da je brzina odgovarajuće čestice grupna brzina talasa opisanog talasnom funkcijom. Problemi prilikom ovakvih merenja se naziru. Pored ovog, direktnog metoda detekcije, postoje i drugi, vezani za detalje interakcije raznih polja. Koliko je autoru ovog teksta poznato, ne postoji evidencija o interakciji kvantnog polja date čestice opisane talasnom funkcijom i nekog poznatog polja (jake interakcije, na primer) nezavisno od čestice (talasna funkcija se uvek pridružuje čestici).

4.2. Path integrali za Langevinovu jednačinu

Na početku će se ukratko opisati, saglasno [2] (8. glava), $1d$ Brownovo kretanje i zapisati odgovarajući Path integral ($D = \alpha$) a onda će se zapisati dve njegove frakcione generalizacije, i, za jednu od njih prikazati egzaktni rezultati. Langevinova jednačina glasi

$$m\dot{v} = -m\zeta v + f(t). \tag{54}$$

Ovde je m masa čestice, v njena brzina, ζ koeficijent viskoznog trenja, $f(t)$ slučajna sila, koja može, a ne mora imati fraktalni kodomen. Da bi se definisao odgovarajući Path integral, uvešće se Gaussova distribucija slučajne sile u vremenskom intervalu $[t_0, t_f]$

$$\mathcal{P}[f(t)] = e^{-\int_{t_0}^{t_f} dt \frac{f^2(t)}{4\zeta mkT}}. \tag{55}$$

Ovde je T apsolutna temperatura a k Boltzmannova konstanta. Ako se segment $[t_0, t_f]$ podeli na N jednakih intervala (ravnomerna podela) dužine Δt, tada je $t_i = t_0 + i\Delta t$, $i = 0, 1, ..., N$. Element funkcionalne integracije je

$$\mathcal{D}[f(t)] := \lim_{\Delta t \to 0} \prod_{i=0}^{N} \left(df(t_i) \sqrt{\frac{\Delta t}{4\zeta mkT\pi}} \right). \tag{56}$$

Relacija normalizacije gustine verovatnoće sledećeg Path integrala je

$$\int \mathcal{D}[f(t)]\mathcal{P}[f(t)] :=$$
$$\lim_{\Delta t \to 0} \prod_{i=0}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} \left(df(t_i) \sqrt{\frac{\Delta t}{4\zeta mkT\pi}} \right) e^{-\Sigma_{i=0}^{N} \Delta t \frac{f^2(t_i)}{4\zeta mkT}} = 1. \tag{57}$$

Srednja vrednost slučajne funkcije $A(t') = A(t)\delta_{tt'}$ za $t' \in [t_0, t_f]$ je

$$< A(t') > := \int A(t)\delta_{tt'}\mathcal{P}[f(t)]\mathcal{D}[f(t)], \tag{58}$$

a slično je i za korelaciju. Prethodna relacija važi i za ma koju regularnu slučajnu funkciju $A(t)$. Ako se razmatra Brownovo kretanja i ako se definiše

$$\phi(\tau) := \lambda\delta(\tau) \tag{59}$$

biće, za $t', t'' \in [t_0, t_f]$

$$< f(t') > = 0 \qquad\qquad < f(t')f(t'') > = \phi(t' - t'') \tag{60}$$

i $\lambda = 2\zeta mkT$. Ako se definiše gustina verovatnoće da Brownova čestica ima brzinu η u trenutku t

$$P(\eta, t) := < \delta(\eta - v(t)) > \tag{61}$$

Fokker-Planckova jednačina glasi

$$\dot{P} = \zeta \frac{\partial}{\partial v}(Pv + \frac{kT}{m}\frac{\partial P}{\partial v}). \tag{62}$$

Prethodna jednačina se transformiše u poznatu difuzionu jednačinu čije je jedno rešenje

$$P(v, t) = \left\{ \frac{m}{2\pi kT(1 - e^{-2\zeta t})} \right\}^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{m(v - v_0 e^{-\zeta t})^2}{2kT(1 - e^{-2\zeta t})}}. \tag{63}$$

Za $t \to 0 \Rightarrow P(v, t) \to \delta(v - v_0)$, a za $t \to \infty$ sledi

$$P(v, t) \to \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}. \tag{64}$$

Gustina verovatnoća difunduje od početne, normirane na delta funkciju ka Maxwellovoj raspodeli. Postoji još relacija za navedenu teoriju Brownovog kretanja, ali su ove, po autoru teksta, neophodne. Sada slede dve generalizacije Path integrala. Prva generalizacija se oslanja na definiciju (40) i jednačinu (42). Pretpostaviće se slučajni proces opisan relacijom

$$\mathcal{P}_{\alpha 1}[f(t)] = e^{-I_{t-}^{\alpha} \frac{f^2(t_0)}{4\zeta^{2-\alpha} mkT}}. \tag{65}$$

Ovaj proces nije homogen te nije Lévy slučajni proces, ali je, kao što će se videti, Markovljev. Uz ravnomernu podelu $[t_0, t_f]$ biće

$$\mathcal{D}_1^{\alpha}[f(t)] := \lim_{\Delta t \to 0} \prod_{i=0}^{N} \left(df(t_i) \sqrt{\frac{(\Delta t)^{\alpha} \left[\begin{array}{c} \alpha \\ i \end{array} \right]}{4\zeta^{2-\alpha} mkT\pi}} \right). \tag{66}$$

Tada je uslov normiranja novog frakcionog Path integrala

$$\int_{(1)}^{\alpha} \mathcal{D}_1^{\alpha}[f(t)] \mathcal{P}_{\alpha 1}[f(t)] :=$$
$$\lim_{\Delta t \to 0} \prod_{i=0}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} \left(df(t_i) \sqrt{\frac{(\Delta t)^{\alpha} \left[\begin{array}{c} \alpha \\ i \end{array} \right]}{4\zeta^{2-\alpha} mkT\pi}} \right)$$
$$e^{-\Sigma_{i=0}^{N} (\Delta t)^{\alpha} \left[\begin{array}{c} \alpha \\ i \end{array} \right] \frac{f^2(t_i)}{4\zeta^{2-\alpha} mkT}} = 1. \tag{67}$$

Dakle, "dejstvo" je FALVA tipa. Drugi novi frakcioni Path integral zasniva se na formuli

$$\int_{(2)}^{\alpha} \mathcal{D}_2^{\alpha}[f(t)] \mathcal{P}_{\alpha 2}[f(t)] :=$$
$$\lim_{\Delta t \to 0} \prod_{i=0}^{N} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(df(t_i) \sqrt{\frac{\Delta t}{4\zeta mkT\pi}} \right) \right.$$
$$\left. e^{-\Sigma_{i=0}^{N} \Delta t \frac{f^2(t_i)}{4\zeta mkT}} \right)^{\left[\begin{array}{c} \alpha \\ i \end{array} \right]} = 1. \tag{68}$$

Ovaj drugi frakcioni Path integral baziran je na generalizaciji proizvoda

$$\prod_{i=0}^{N} a(i) = e^{\sum_{i=0}^{N} ln(a(i))} \to (\alpha) \prod_{i=0}^{N} a(i) = e^{({}_N\Delta^{-\alpha}) ln(a(i))}. \tag{69}$$

Oba Path integrala prelaze u jednostruke za $\alpha = 0$ i imaju odgovarajući fizički smisao. Kada je $\alpha = 1$, oba predstavljaju već definisan Path integral. Druga generalizacija Path integrala jeste njegova prava frakciona generalizacija. Predstavlja prelaz od jednostrukog na kontinualan integral (tj. od diskretnog na standardni kontinualni slučaj: od 0d do 1d). Obe generalizacije mogu se kombinovati međusobno a i sa Lévy flightom i relativno lako se simuliraju na računaru. Interesantna je okolnost da i ovde može biti $\alpha < 0$. Prva frakciona generalizacija kontinualnog integrala je i egzaktno tretirana, radi probe. U daljem tekstu, u odnosu na nju će se i ukratko opisati slučajno kretanje čestice.

Za ovaj tip slučajnog kretanja se definiše

$$\phi_\alpha(\tau) := \lambda_\alpha \delta_\alpha(\tau) \tag{70}$$

i biće, za $t', t'' \in [t_0, t_f]$

$$< f(t') >= 0 \qquad\qquad < f(t')f(t'') >= \phi_\alpha(t' - t'') \tag{71}$$

i $\lambda_\alpha = 2\zeta^{2-\alpha}mkT$. Zbog delta funkcije u korelaciji proces je Markovljev. Odgovarajuća Fokker-Planckova jednačina glasi

$$\dot{P} = \zeta \frac{\partial}{\partial v}(Pv + \frac{kT}{m}(\zeta t)^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)\frac{\partial P}{\partial v}). \tag{72}$$

Difuziona konstanta sada je funkcija od vremena. Rešenje ove jednačine, analogno (63) je

$$P(v,t) = \left\{ \frac{m}{2\pi kT(-2)^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)e^{-2\zeta t}(\Gamma(2-\alpha, -2\zeta t) - \Gamma(2-\alpha))} \right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$e^{-\frac{m(v-v_0 e^{-\zeta t})^2}{2kT(-2)^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)e^{-2\zeta t}(\Gamma(2-\alpha,-2\zeta t)-\Gamma(2-\alpha))}}. \tag{73}$$

Ovde je

$$\Gamma(a, z) = \int_z^\infty dt t^{a-1} e^{-t} \tag{74}$$

nekompletna gama funkcija. Za $t \to 0 \Rightarrow P(v,t) \to \delta(v - v_0)$, a za $t \to \infty$ postoji asimptotsko ponašanje oblika $P(v,t) \sim t^{1-\alpha}$ $(\alpha \neq 0)$.

5. Zaključak

Frakcioni račun u ovom tekstu, u pojedinim slučajevima, samo je most prema novim fenomenima ili formalizmima. Koncept frakcione gustine tu je od esencijalnog značaja. Što se tiče statističke fizike, mnoge relacije u vezi slučajnih kretanja i šire, u [2] mogu biti generalisane na egzaktan način. Jedan od pravaca jeste generalizacija Gibsove statističke mehanike. Slično važi za (kvantnu) teoriju polja.

References

[1] Vasily E. Tarasov V. E.: *Fractional Dynamics.* Higher Education Press, Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2010)

[2] Schwabl F.: *Statistical Mechanics.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2006)

[3] Uchaikin V. V.: *Fractional derivatives method.* In Russian, Artishok, Uljanovsk, (2008)

[4] Gorenflo R.: Mainardi F.: *Essentials of Fractional Calulus.* Preprint submitted to MaPhySto Center, preliminary version, (2000)

[5] Samko, S.G., Kilbas, A.A., Marichev, O.I.: *Fractional integrals and derivatives: Theory and applications.* Gordon and Breach, New York (1993)

[6] Kiryakova V.: *Generalized Fractional Calculus and Applications.* Longman, Harlow, UK and John Wiley, N. York, USA, (1994)

[7] Tatiana, O., Agnieszka B. M., Delfim F. M. T.: *Fractional Calculus of Variations in Terms of a Generalized Fractional Integral with Applications to Physics*, arXiv:1203.1961 [math.OC]

[8] Foukzon, J., Potapov, A.A., Podosenov S.A.: *Hausdorff-Colombeau measure and axiomatic quantum field theory in spacetime with negative B.Mandelbrot dimensions*, arXiv:1004.0451 [math.GM]

[9] Herrmann, R.: *Fractional Calculus*. An Introduction For Physicists. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. Singapore (2011)

[10] A. Altland and B. Simons.: *Condensed Matter Field Theory*. Cambridge University Press, Cambridge (2010)

[11] Frank S. Crawford, Jr.: *Waves*. Mcgraw–Hill book company, New York, (1968)

[12] http://www.physics.oregonstate.edu/ stetza/COURSES/ph654/ShortBook.pdf

[13] Parvate Abhay, Gangal AD. Calculus on fractal subsets of real line - I formulation. Fractals 2009;17(1), pp. 53–81

[14] Parvate Abhay, Gangal AD. Calculus on fractal subsets of real line - II. Fractals 2011;19(3), pp. 271–90

[15] Alberto Carpinteri, Pietro Cornetti, Kiran M. Kolwankar. Calculation of the tensile and flexural strength of disordered materials using fractional calculus. Chaos, Solitons and Fractals 21 (2004) 623 – 632

[16] Feng Gao, Xiaojun Yang, Zongxin Kang. Local Fractional Newton's Method Derived from Modified Local Fractional Calculus. 2009 International Joint Conference on Computational Sciences and Optimization

[17] Yang Xiao–Jun. Fractional Trigonometric Functions in Complex-valued Space: Applications of Complex Number to Local Fractional Calculus of Complex Function, arXiv:1106.2783 [math-ph]

[18] Xiao–Jun Yang. Local Fractional Calculus and Its Applications. Proceedings of FDA'12. The 5th IFAC Workshop Fractional Differentiation and its Applications, 1-8

[19] Xiao–Jun Yang. Local Fractional Integral Equations and Their Applications. Advances in Computer Science and its Applications (ACSA) 234 Vol. 1, No. 4, 2012