数论，引人入胜

# 威哉！大衍！

——大衍矩阵的应用

# The Power of *DaYan*

**—The Application of *DaYan* Matrix**

石远东 著

**Author：Shi-YuanDong**

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SYD 出版社

内容提要

本书是作者读秦九韶《数书九章》的学习笔记。作者发现并使用“大衍矩阵”来研究“更相减损”与“缀术”，“大衍求一术”，“正负开方术”，“$p$进制数”之间的关系，并着力研究“大衍矩阵”在解题算法化方面的应用。此外，本人特意将与“大衍求一术”和“正负开方术”相关的资料一并整理于此，以供研究参考。

本书可供具有高中数学水平的读者，以及爱好初等数论的读者学习、参考。

# 目　录

# 序言

## 一、秦九韶的历史贡献

十三世纪的中国古代数学，成绩斐然，其中以秦九韶的《数书九章》最为突出。

秦九韶在数学上的成就是多方面的，其中意义重大的有：

（1）对于一次同余组的解法作出理论概括，提出了相当完备的“大衍求一术”理论；

（2）提出一套完整的，逐步求出高次方程正根的程序，即“正负开方术”，亦称秦九韶算法；

（3）改进了线性方程组的解法，普遍应用互乘相消法代替传统的直除法，已同今天所用的方法完全一致；

（4）在开方运算中，他发展了刘徽开方不尽求微数的思想，最早使用十进小数来表示无理根的近似值；

（5）给出了“三斜求积术”，即已知三角形三边之长求其面积的公式。

以现代数学的眼光来看，“大衍求一术”和“正负开方术”无疑是最有价值的理论贡献。可以说，在中国古代数学家中（截止于清朝），唯有秦九韶能够讲得出个像样的数学道理，是个真正的数学家；其余人等，则皆为“算术家”而已——虽亦超绝非凡，却是不值一顾。

## 二、关于“大衍求一术”的传承

我们引用钱宝琮“求一术源流考”的考证：

秦氏而后，历元、明，以至清代，五百余年来，求一术几失传矣。《永乐大典》及《四库全书》虽均采及《数书九章》，然世莫能读，传者几无人矣。戴震《四库全书提要》有云：“其法虽不尽精密，而大衍数中，所载立天元一法，为郭守敬、李冶所本。欧罗巴之借根方，至为巧妙，亦从此出也。”寥寥数语，颇显其幼稚之极，亦显五百余年吾国数学之状态，吾辈不胜感叹。至嘉庆初，李潢，张敦仁，焦循，李锐，陈杰诸人出，古算复兴。张敦仁得录秦氏书于李潢家，与李锐等日夕讨论。研究秘奥，依秦氏所说略事增删，推而衍之，成《求一算术》三卷。焦循《天元一释》亦论及大衍术，李锐《日法朔余强弱考》则用求一术以推求朔余之强数弱数焉。

张敦仁《求一算术》以浅显之笔，写艰深之术，使尽人能解。其复古之功臣欤？卷上先述“求等”“约分”“求定母”“求衍数”“求乘率”诸术。惟“求总等”一法，弃而未用，余则悉如秦意。卷末结以《孙子》物不知数题，及同类题数问演法，以立求一总术。卷中设题，用数较繁，法亦愈密。卷下为演纪题，推麟德以来四家岁积算法。亦阐明秦氏术者也，演纪设数更繁，依秦术推演，衍数过大，不易入算，故张敦仁分两步推演，于旧术稍为变通。

《求一算术》后，骆腾凤著《艺游录》以求一术解百鸡数及类似之题。时曰淳更推广之，补骆氏术之未备。时曰淳又著《求一术指》一卷，述求一术较张敦仁书更简。丁取忠弟子黄宗宪为之校订，宗宪悟“泛母”（即诸问数）求“定母”捷法。继又悟求乘率简法，成《求一术通解》二卷，卷下更创新术数则，尚简易可用。求一术至是大显于世。

黄宗宪《求一术通解》泛母求定母捷法术云：“析各泛母（即诸问数）为极小数根（素数），遍视各同根（公素因数），取某行最多者用之，余所有弃之不用。两行等多者随意用之。以所用数根连乘之即得各行定母。若某行各根皆少于他行者。则此行无定母”。盖以析公素因数入算，无求总等，及连环求等，约奇勿约偶之烦，且不易差误也。

钱宝琮“求一术源流考”的考证虽然有失偏颇，却也脉络清楚。

清朝专门论述“大衍求一术”的数学家主要有：

张敦仁，撰《求一算术》（三卷）；

黄宗宪，撰《求一术通解》（二卷）；

张敦仁《求一算术》乃是秦九韶《数书九章》成书之后第一本全面解读“大衍求一术”

的论述；作者是真正吃透了“大衍求一术”，对“求乘率”的算法叙述得非常清晰、明了，其水平之高，以至于今天的数学家都依然停留在这一水平上，无出其右者；张敦仁“两步推演”法恰恰是“大衍求一术”精髓之所在。本书不足之处在于对“泛母”转“定母”的算法依然沿用秦九韶方法，显得繁琐、累赘，尤以（卷中）“八库储银”题为范。

黄宗宪《求一术通解》，则是用现代数学概念全面解读“大衍求一术”的第一本论述；《求一术通解》（卷上）写得不错，颇有些真知灼见；作者对“泛母”转“定母”的算法理解透彻，特别是其根据极小数根（亦即：素数）确定定母的方法非常好。至于“求乘率”之法，则不如张敦仁《求一算术》中之算法。并且，其《求一术通解》（卷下）则问题颇多；由于过分追求所谓“捷法”，致使部分方法以偏概全，缺乏价值。

其余人等，或是只言片语，或无精辟见解，总之是皆不如也。比如说：

骆腾凤《艺游录》（二卷）之“大衍求一法”，“大衍奇定相求法”，“《孙子算经》解”三篇文字略有所得；余不厌其繁，录之于后，以资参考。

焦循《天元一释》（2 卷）在卷下略有论述，却是无甚价值，不值得录入；《开方通释》则略有价值，节选部分录之于后，以资参考；如有需要，可参考《续修四库全书》1045 • 子部 • 天文算法类，360～364 页，及 449～476 页。上海古籍出版社，2002 年 4 月。

## 三、关于“大衍求一术”的起源

许多人都认为“大衍求一术”是起源于《孙子算经》的“物不知数”，这实在是一种“不知数”的见解，不足为训。

《孙子算经》估计是公元 3～4 世纪出现的一本筹算启蒙读物。为了让“蒙童”们入门容易，特设“物不知数”题以教导那些“不知数”者。秦九韶根本就没把它放在眼里，对“物不知数”那是不屑一顾的，甚至连提都不曾提起。

关于“大衍求一术”的起源，秦九韶在《数书九章》的“序”中已经说得很清楚：

今数术之书，尚三十余家。天象、历度，谓之“缀术”；太乙、壬甲，谓之三式；皆曰内算，言其秘也。九章所载，即《周官》九数，系于方圆者为叀术，皆曰外算，对内而言也。其用相通，不可岐二。独大衍法不载九章，未有能推之者；历家演法颇用之，以为方程者，误也。

且系之曰：

昆仑磅礴，道本虚一。圣有大衍，微寓于易。奇余取策，群数皆捐。衍而究之　探隐知原。数术之传，以实为体。其书九章，惟兹弗纪。历家虽用，用而不知。小试经世，姑推所为。述大衍第一。

因此，“大衍求一术”是起源于中国古代历算家广泛使用，但历代历算家又“未有能推之者”的历算方法，秦九韶是从理论的高度给出了严谨的算法。

## 四、本书的写作及参考资料

通过对《数书九章》的深入研究，我发现“缀术”，“大衍求一术”，“正负开方术”，“ $p$ 进制数”这些“术”之间的本质有相似之处，都与矩阵 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 相关，我将这个矩阵命名为“大衍矩阵 *DaYan* Matrix”。

本书的目的是研究“缀术”，“大衍求一术”，“正负开方术”，“ $p$ 进制数”的思想方法，提炼并研究“大衍矩阵”在解题算法化方面的应用。在对秦九韶的“大衍求一术”和“正负开方术”作了粗略的研究之后，我把自己的学习体会记录于此，以供同好参考。

在写作过程中，我大量地参考了中国古代数学家的思想和方法，也参考了迄今为止各方面的研究成果，各位作者的工作对我都有莫大的帮助，在此谨致谢意。

关于对《数书九章》进行校正的工作，已有丰富的文献资料可资参考，比如说：

《丛书集成初篇·数书九章》秦九韶原著（宜稼堂丛书本），商务印书馆，1937 年。

《丛书集成初篇·数书九章札记》秦九韶原著（宜稼堂丛书本），商务印书馆，1936 年。

《数书九章新释》秦九韶原著，王守义遗著，李俨审校。安徽科学技术出版社，1992。

《求一术源流考》钱宝琮，见《钱宝琮科学史论文选集》，科学出版社，1983 年第一版；

《天元一释》二卷，焦循撰，清焦氏丛书本（1799 年）；

《求一算术》三卷，张敦仁撰，清道光十一年刻本（1831 年）；

《艺游录》二卷，骆腾凤撰，清道光二十三年刻本（1843 年）；

《求一术通解》二卷，黄宗宪撰，清刻本（1874 年）；

Ulrich_Libbrecht：Chinese mathematics in the thirteenth century，1973，MIT Press；白尚恕编译了其中的《不定分析的发展历史》，见《数学史译文集续集》133～168 页，上海科技出版社，1985 年。

《秦九韶与〈数书九章〉》，吴文俊 主编，北京师范大学出版社，1987 年第一版；

《算法的源流：东方古典数学的特征》李继闵，科学出版社，2007 年第一版；

此外，关于中国古代历法，还可参考下列资料：

《中国古代历法》张培瑜，陈美东，薄树人，胡钦珠著，中国科学技术出版社，2008 年第一版；

《古代历法计算法》刘洪涛，南开大学出版社，2003 年第一版；

《中国历法与数学》曲安京，科学出版社，2005 年第一版；

相关的研究资料不计其数，良莠不齐，在此难以一一罗列。

涉及到的历史人物资料可参考：

《畴人传汇编》阮元 等编撰，彭卫国，王原华 点校，广陵书社，2009 年 3 月第一版。

本书仅仅是个人的读书笔记。本人才疏学浅，为了满足自己理解的需要，对他人的论述做了不少的补充、改编和注释，如有不当，望勿见责，请方家采信原文，无需口诛笔伐。

为突出大衍矩阵作用，本书引用的许多结论都未给出证明过程，请读者当作练习自行完成。

作者：石远东

于 2015 年 5 月 6 日

# 第一章 大衍矩阵的由来

## 一、大衍矩阵的由来

数论的内容是整除性问题。整除性问题主要是研究带余除法（除法算法）和辗转相除法（Euclid 算法）。

定理 01[带余除法]：设$a$与$b$是两个整数，$b \neq 0$，则存在两个唯一的整数$c$和$r$，使得$a = bc + r$，其中$0 \leq r < |b|$。

显然：$a = bc + r \Leftrightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{b \times c + r \times 1}{b \times 1 + 0}$

可用矩阵表示为：$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ r \end{bmatrix}$，我们称$\begin{bmatrix} c & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$为商构成的大衍矩阵；

形如$S(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$的映射关系称为分式线性变换。

我们称分式线性变换$S(z)$为大衍变换（DaYan Transform）。

设$S^{-1}(z) = \dfrac{dz-b}{-cz+a}$，则有$S(S^{-1}(z)) = S^{-1}(S(z)) = z$，因此，$S^{-1}$是$S$的逆映射。

$\dfrac{az+b}{cz+d}$可形式地记成矩阵$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，我们称之为大衍矩阵（DaYan Matrix）。

单位大衍矩阵为$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$；

大衍逆矩阵为$\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$，其中$ad - bc = \pm 1$；

显然，$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix}$；

大衍矩阵的构成分类：

（1）由商构成的大衍矩阵；

（2）由余数构成的大衍矩阵；

（3）由无理数取整部分部分构成的大衍矩阵；

（4）由两个量的递推公式构成的大衍矩阵；

（5）由无穷级数构成的大衍矩阵；

（6）由其它数据构成的形式大衍矩阵；

我们先介绍由商构成的大衍矩阵，以及秦九韶算法对应的大衍矩阵。

## 二、辗转相除法（Euclid 算法）与连分数

辗转相除法（Euclid 算法）与连分数是带余除法的第一种表现形式。

定理 02[辗转相除法（Euclid 算法）]：

商的大衍矩阵与连分数

| 带余除法 | 商 | 余数 |
| --- | --- | --- |

| | | |
|---|---|---|
| $r_{-1}=a_1\,r_0+r_1$ | $a_1$ | $0<r_1<r_0$ |
| $r_0=a_2\,r_1+r_2$ | $a_2$ | $0<r_2<r_1$ |
| $r_1=a_3\,r_2+r_3$ | $a_3$ | $0<r_3<r_2$ |
| $r_2=a_4\,r_3+r_4$ | $a_4$ | $0<r_4<r_3$ |
| …… | …… | …… |
| $r_{n-2}=a_n\,r_{n-1}+r_n$ | $a_n$ | $0<r_n<r_{n-1}$ |
| $r_{n-1}=a_{n+1}\,r_n+r_{n+1}$ | $a_{n+1}$ | $0\leqslant r_{n+1}<r_n$ |

当 $r_{n+1}=0$ 时，$(r_{-1},r_0)=r_n$；当 $r_{n+1}=1$ 时，$(r_{-1},r_0)=1$；

获得大衍矩阵元素$\{a_1,a_2,a_3,\cdots\cdots,\ a_n\}$后，计算近似值分数：

$$\prod_{i=1}^{n}\begin{bmatrix}a_i & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P_{n+1} & P_n\\ Q_{n+1} & Q_n\end{bmatrix}$$

于是 $r_{-1}/r_0=\dfrac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$；

从左到右运算，不满足交换律，否则，结果不正确!!

不过，当 $a_i=a_j$ 时，$\begin{bmatrix}a_i & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_j & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_j & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_i & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$；

## 三、秦九韶算法

秦九韶算法：

$$f(x)=a_n\,x^n+a_{n-1}\,x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1\,x+a_0$$

可记为$[a_n,a_{n-1},\cdots\cdots,a_1,a_0]_x$：

秦九韶计算多项式的方法

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0$$

$$=(a_nx^{n-1}+a_{n-1}x^{n-2}+a_{n-2}x^{n-3}+\cdots+a_1)x+a_0$$

$$=((a_nx^{n-2}+a_{n-1}x^{n-3}+\cdots+a_2)x+a_1)x+a_0$$

=…………

$$=(\cdots((a_nx+a_{n-1})x+a_{n-2})x+\cdots+a_1)+a_0$$

于是可构造大衍矩阵：

$$\prod_{i=0}^{n}\begin{bmatrix} x & a_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x^2 & a_1x+a_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & a_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdots\cdots\begin{bmatrix} x & a_n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} x^3 & a_2x^2+a_1x+a_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & a_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdots\cdots\begin{bmatrix} x & a_n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\cdots\cdots=\begin{bmatrix} x^{n+1} & f(x) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

注意：秦九部算法的大衍矩阵一定要按照下面顺序进行：

$$\begin{bmatrix} x & a_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & a_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdots\cdots\begin{bmatrix} x & a_n \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

从左到右运算，不满足交换律，否则，结果不正确!!

**四、矩阵定义与性质**

为了照顾对矩阵知识不太熟悉的读者，这里简单罗列部分知识：

定义 01：$A=\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \end{bmatrix}$为 $1\times n$ 阶线性行矩阵；

$B=\begin{bmatrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \\ \vdots \\ b_{n,1} \end{bmatrix}$为 $n\times 1$ 阶线性列矩阵；

定义 02：行×列：$A\ B=\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \\ \vdots \\ b_{n,1} \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} a_{1,1}b_{1,1} & a_{1,2}b_{2,1} & \cdots & a_{1,n}b_{n,1} \end{bmatrix}$；

定义 03：列×行：$B\ A=\begin{bmatrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \\ \vdots \\ b_{n,1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_{1,1}a_{1,1} \\ b_{2,1}a_{1,2} \\ \vdots \\ b_{n,1}a_{1,n} \end{bmatrix}$；

定义 04：2×2 阶线性矩阵为$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$，

对应的线性行列式为$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}=a_{1,1}\ a_{2,2}-a_{2,1}\ a_{1,2}$；

定义 05：乘积：$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} a_{1,1}b_{1,1}+a_{1,2}b_{2,1} & a_{1,1}b_{1,2}+a_{1,2}b_{2,2} \\ a_{2,1}b_{1,1}+a_{2,2}b_{2,1} & a_{2,1}b_{1,2}+a_{2,2}b_{2,2} \end{bmatrix}$$

定义 06：线性矩阵的变形：只能对行做运算，

（1）矩阵一行的全体元素乘以一个常数$k$；

（2）矩阵一行的元素乘以常数$k$后，加到另一行的对应的元素上；

（3）乘法只能按照左（行）×右（列）的顺序进行；

对线性矩阵的乘法运算而言，结合律，交换律，分配律大多数情况下仍然成立，但是，消去律一般都是不成立的，不可误用。

大衍矩阵性质 01：若$a_1$，$a_2$，$a_3$互不相等，

$$\begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P_3 & P_2 \\ Q_3 & Q_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P_3^{/} & P_2 \\ Q_3^{/} & Q_2 \end{bmatrix}$$

则$P_3=P_3^{/}$，但是$Q_3$与$Q_3^{/}$不一定相等；

证明：$\begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1+a_3+a_1a_2a_3 & 1+a_1a_2 \\ 1+a_2a_3 & a_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a_3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1+a_3+a_1a_2a_3 & 1+a_2a_3 \\ 1+a_1a_2 & a_2 \end{bmatrix}$$

故可推广为：

在{$a_1,a_2,\cdots\cdots,a_{n-1},a_n$}与{$a_n$，$a_{n-1},\cdots\cdots,a_2,a_1$}的大衍矩阵$\begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ Q_{n+1} & Q_n \end{bmatrix}$中，$P_{n+1}$的数值相同。

大衍矩阵性质 02：连分数{$a_1,a_2,\cdots\cdots,a_{n-1},a_n$}的大衍矩阵$\begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ Q_{n+1} & Q_n \end{bmatrix}$中，$P_i$与$P_{n-i}$的数值相同（亦即：与首、末项距离相等的数值$P_i$与$P_{n-i}$具有对称性）。

显然，这只是大衍矩阵性质 01 的另一种描述。

**五、同余的基本性质**

为了后面应用的方便，我们罗列部分同余的基本性质。

显然，$a\equiv b\pmod m \Leftrightarrow a=q_1m+b$；

这是带余除法的另一种表现形式。

性质 1：

（1）$a\equiv b\pmod m \Leftrightarrow m\,|\,a-b \Leftrightarrow a=q_1m+b$；

（2）$a\equiv b\pmod m \Leftrightarrow b\equiv a\pmod m$；

（3）$a\equiv b\pmod m$，$b\equiv c\pmod m \Rightarrow a\equiv c\pmod m$；

（4）$a\equiv b\pmod m$，$c\equiv d\pmod m \Rightarrow a\pm c\equiv b\pm d\pmod m$；

（5） $a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ m)$， $c\equiv d\ (\mathrm{mod}\ m)\Rightarrow a\ c\equiv b\ d\ (\mathrm{mod}\ m)$；

（6） $f(x)=a_n\ x^n+a_{n-1}\ x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1\ x+a_0$，

$g(x)=a_n\ x^n+a_{n-1}\ x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1\ x+a_0$，

若 $a_i\equiv b_i\ (\mathrm{mod}\ m)$，则 $f(x)\equiv g(x)\ (\mathrm{mod}\ m)$；

性质 2：

（1）若 $c>0$，则 $a\ c\equiv b\ c\ (\mathrm{mod}\ c\ m)\Leftrightarrow a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ m)$；

（2）若 $(m,c)=1$，则 $a\ c\equiv b\ c\ (\mathrm{mod}\ m)\Leftrightarrow a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ m)$；

（3）若 $(m,c)=d>1$，则 $a\ c\equiv b\ c\ (\mathrm{mod}\ m)\Leftrightarrow a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ m/d)$；

（4）若 $a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ M)$， $m_1\mid M$ ，则 $a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ m_1)$；

（5）若 $a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ m_i)$（其中 $i=1,2,\cdots\cdots,n$ ），且 $M=[m_1,m_2,\cdots\cdots,m_n]$，

则 $a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ M)$；

（6）若 $a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ m_i)$（其中 $i=1,2,\cdots\cdots,n$ ），且 $m_1,m_2,\cdots\cdots,m_n$ 两两互质，

则 $a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ m_1\ m_2\cdots\cdots m_n)$；

# 第二章 更相减损与缀术

## 一、更相减损（Euclid 算法）

我们先看《九章算术·卷一》（作者：张苍）的叙述：

又有九十一分之四十九，问约之得几何？答曰：十三分之七。

〇约分〔刘徽按：约分者，物之数量，不可悉全，必以分言之；分之为数，繁则难用。设有四分之二者，繁而言之，亦可为八分之四；约而言之，则二分之一也；虽则异辞，至于为数，亦同归尔。法实相推，动有参差，故为术者，先治诸分。〕

术曰：可半者半之；不可半者，副置分母、子之数，以少减多，更相减损，求其等也。以等数约之。〔刘徽按：等数约之，即除也。其所以相减者，皆等数之重叠，故以等数约之。〕

这就是著名的“更相减损”的出处，这里的“副置分母、子之数”就是后来人们所谓的“写子换母”；显然“更相减损”不需要记录更相的次数（商）。

我们将更相减损列表表示为：

| 更相减损 | | 商 |
|---|---|---|
| 实 | 法 | |
| $r_{-1}=M_i$ | $r_0=m_i$ | $q_0$ |
| $r_0$ | $r_1$ | $q_1$ |
| $r_1$ | $r_2$ | $q_2$ |
| $r_2$ | $r_3$ | $q_3$ |
| …… | …… | …… |
| $r_{n-2}$ | $r_{n-1}$ | $q_{r-1}$ |
| $r_{n-1}$ | $r_n$ | $q_r$ |
| $r_n$ | 得 0 当止 | |

当 $r_n=1$ 时，$r_{-1}$ 与 $r_0$ 互素；

当 $r_n>1$ 时，$r_{-1}$ 与 $r_0$ 有公因数（式）$r_n$，或曰 $r_{-1}$ 与 $r_0$ 有等 $r_n$；

其中，商的数值可以不理会，这里罗列只是为后面的拓展中准备。

## 二、缀术

显然，若记录“更相减损”的更相次数（商），则可以还原得到原来分数的一个近似分数值，这个近似分数值相对于原来的数值，它可能大一些，也可能小一些，这视后面一个余数值的情况而定。这就是祖冲之所谓的“缀术”了。

| 更相减损 | | 商 | 缀术（连分数） |
|---|---|---|---|
| 实 | 法 | | |
| $r_{-1}=M_i$ | $r_0=m_i$ | $q_0$ | $\begin{bmatrix} q_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P_0 & P_{-1} \\ Q_0 & Q_{-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $r_0$ | $r_1$ | $q_1$ | $\begin{bmatrix} P_0 & P_{-1} \\ Q_0 & Q_{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P_1 & P_0 \\ Q_1 & Q_0 \end{bmatrix}$ |
| $r_1$ | $r_2$ | $q_2$ | $\begin{bmatrix} P_1 & P_0 \\ Q_1 & Q_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P_2 & P_1 \\ Q_2 & Q_1 \end{bmatrix}$ |
| $r_2$ | $r_3$ | $q_3$ | $\begin{bmatrix} P_2 & P_1 \\ Q_2 & Q_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P_3 & P_2 \\ Q_3 & Q_2 \end{bmatrix}$ |
| …… | …… | …… | ………… |
| $r_{n-2}$ | $r_{n-1}$ | $q_{r-1}$ | $\begin{bmatrix} P_{k-2} & P_{k-3} \\ Q_{k-2} & Q_{k-3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_{r-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P_{k-1} & P_{k-2} \\ Q_{k-1} & Q_{k-2} \end{bmatrix}$ |
| $r_{n-1}$ | $r_n$ | $q_r$ | $\begin{bmatrix} P_{k-1} & P_{k-2} \\ Q_{k-1} & Q_{k-2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_r & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P_k & P_{k-1} \\ Q_k & Q_{k-1} \end{bmatrix}$ |
| $r_n$ | 得 0 当止 | | 亦即：$r_{-1}/r_0=\dfrac{P_k}{Q_k}$ |

其中，$\{q_0,q_1,q_2,\cdots\cdots,q_{r-1},q_r\}$称为大衍矩阵元素。

《广雅》曰：“缀，连也”。缀术，就是将商缀为分数之术。因此，从本质上讲，缀术就是连分数，是更相减损术的延伸。在西方，这就是所谓的辗转相除法（Euclid 算法）：

| 带余除法 | 商 | 余数 |
|---|---|---|
| $r_{-1}=a_1\,r_0+r_1$ | $a_1$ | $0<r_1<r_0$ |
| $r_0=a_2\,r_1+r_2$ | $a_2$ | $0<r_2<r_1$ |
| $r_1=a_3\,r_2+r_3$ | $a_3$ | $0<r_3<r_2$ |
| $r_2=a_4\,r_3+r_4$ | $a_4$ | $0<r_4<r_3$ |
| …… | …… | …… |
| $r_{n-2}=a_n\,r_{n-1}+r_n$ | $a_n$ | $0<r_n<r_{n-1}$ |
| $r_{n-1}=a_{n+1}\,r_n+r_{n+1}$ | $a_{n+1}$ | $0\leqslant r_{n+1}<r_n$ |

当$r_{n+1}=0$时，$(r_{-1},r_0)=r_n$；当$r_{n+1}=1$时，$(r_{-1},r_0)=1$；

获得大衍矩阵元素$\{a_1,a_2,a_3,\cdots\cdots,\ a_n\}$后，计算近似值分数：

$$\prod_{i=1}^{n}\begin{bmatrix} a_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ Q_{n+1} & Q_n \end{bmatrix}$$

于是 $r_{-1}/r_0=\dfrac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$；

从左到右运算，不满足交换律，否则，结果不正确!!

不过，当 $a_i=a_j$ 时，$\begin{bmatrix}a_i & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_j & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_j & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_i & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$；

## 三、圆周率的分数近似值

《隋书 • 律历志》记载："宋末，南徐州从事史祖冲之，更开密法，以圆径一亿为一丈，圆周盈数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽，朒数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽，正数在盈、朒二限之间。密率，圆径一百一十三，圆周三百五十五。约率，圆径七，周二十二。"

祖冲之把一丈化为一亿忽，以此为直径求圆周率。他计算的结果共得到两个数：一个是盈数（即过剩的近似值），为 3.1415927；一个是朒数（即不足的近似值），为 3.1415926。

用近似值分数表示圆周率，一个是 355/113（≈3.14159），这个数比较精密，称之为"密率"。另一个是 22/7（≈3.14），这个数比较粗疏，称之为"约率"。

祖冲之是如何得到密率与约率的？我认为：祖冲之是用"缀术"得到的：

3.14 的近似值分数：

| 更相减损 | | 商 | 缀术（连分数） |
|---|---|---|---|
| 实 | 法 | | |
| 314159 | 100000 | 3 | $\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ |
| 100000 | 14159 | 7 | $\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}22 & 3\\ 7 & 1\end{bmatrix}$ |
| 14159 | 887 | 7 | $\begin{bmatrix}22 & 3\\ 7 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}157 & 22\\ 50 & 7\end{bmatrix}$ |
| 1 | 得 0 当止 | | 亦即：3.14≈157/50 |

3.14159 的近似值分数：

| 更相减损 | | 商 | 缀术（连分数） |
|---|---|---|---|
| 实 | 法 | | |
| 314159 | 100000 | 3 | $\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ |
| 100000 | 14159 | 7 | $\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}22 & 3\\ 7 & 1\end{bmatrix}$ |
| 14159 | 887 | 15 | $\begin{bmatrix}22 & 3\\ 7 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}15 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}333 & 22\\ 106 & 7\end{bmatrix}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 887 | 854 | 1 | $\begin{bmatrix}333 & 22\\106 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}355 & 333\\113 & 106\end{bmatrix}$ |
| 854 | 33 | 25 | $\begin{bmatrix}355 & 333\\113 & 106\end{bmatrix}\begin{bmatrix}25 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9208 & 355\\2931 & 113\end{bmatrix}$ |
| 33 | 29 | 1 | $\begin{bmatrix}9208 & 355\\2931 & 113\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9563 & 9208\\3044 & 2931\end{bmatrix}$ |
| 29 | 4 | 7 | $\begin{bmatrix}9563 & 9208\\3044 & 2931\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}76149 & 9563\\24239 & 3044\end{bmatrix}$ |
| 4 | 1 | 4 | $\begin{bmatrix}76149 & 9563\\24239 & 3044\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}314159 & 76149\\100000 & 24239\end{bmatrix}$ |
| 1 | 得 0 当止 | | 亦即：3.14159≈314159/100000 |

3.141592 的近似值分数：

| 更相减损 | | 商 | 缀术（连分数） |
|---|---|---|---|
| 实 | 法 | | |
| 3141592 | 1000000 | 3 | $\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$ |
| 1000000 | 141592 | 7 | $\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}22 & 3\\7 & 1\end{bmatrix}$ |
| 141592 | 8856 | 15 | $\begin{bmatrix}22 & 3\\7 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}15 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}333 & 22\\106 & 7\end{bmatrix}$ |
| 8856 | 8752 | 1 | $\begin{bmatrix}333 & 22\\106 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}355 & 333\\113 & 106\end{bmatrix}$ |
| 8752 | 104 | 84 | $\begin{bmatrix}355 & 333\\113 & 106\end{bmatrix}\begin{bmatrix}84 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30153 & 355\\9598 & 113\end{bmatrix}$ |
| 104 | 16 | 6 | $\begin{bmatrix}30153 & 355\\9598 & 113\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}181273 & 30153\\57701 & 9598\end{bmatrix}$ |
| 16 | 8 | 2 | $\begin{bmatrix}181273 & 30153\\57701 & 9598\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}392699 & 181273\\125000 & 57701\end{bmatrix}$ |
| 8 | 得 0 当止 | | 亦即：3.141592≈392699/125000 |

根据上述运算，很自然地，我们应该选择 355/113（≈3.14159）作为“密率”；22/7（≈3.14）作为“约率”。

【附录】《隋书·卷一十六·志第十一·律历上》〇备数

五数者，一、十、百、千、万也。《传》曰：“物生而后有象，滋而后有数。”是以言律者，云数起于建子，黄钟之律，始一，而每辰三之，历九辰至酉，得一万九千六百八十三，而五数备成，以为律法。又参之，终亥，凡历十二辰，得十有七万七千一百四十七，而辰数该矣，以为律积。以成法除该积，得九寸，即黄钟宫律之长也。此则数因律起，律以数成，故可历管万事，综核气象。其算用竹，广二分，长三寸，正策三廉，积二百一十六枚，成六觚，乾之策也。负策四廉，积一百四十四枚，成方，坤之策也。觚方皆经十二，天地之大数也。是故探赜索隐，钩深致远，莫不用焉。一、十、百、千、万，所同由也。律、度、量、衡、历、率，其别用也。故体有长短，检之以度，则不失毫厘；物有多少，受之以器，则不失圭撮；量有轻重，平之以权衡，则不失黍丝；声有清浊，协之以律吕，则不失宫商；三光运行，纪以历数，则不差晷刻；事物糅见，御之以率，则不乖其本。故幽隐之情，精微之变，可得而综也。

夫所谓率者，有九流焉：一曰方田，以御田畴界域。二曰粟米，以御交质变易。三曰衰分，以御贵贱廪税。四曰少广，以御积幂方圆。五曰商功，以御功程积实。六曰均输，以御远近劳费。七曰盈朒，以御隐杂互见。八曰方程，以御错糅正负。九曰句股，以御高深广远。皆乘以散之，除以聚之，齐同以通之，今有以贯之。则算数之方，尽于斯矣。

古之九数，圆周率三，圆径率一，其术疏舛。自刘歆、张衡、刘徽、王蕃、皮延宗之徒，各设新率，未臻折衷。宋末，南徐州从事史祖冲之，更开密法，以圆径一亿为一丈，圆周盈数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽，朒数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽，正数在盈、朒二限之间。密率，圆径一百一十三，圆周三百五十五。约率，圆径七，周二十二。又设开差幂，开差立，兼以正圆参之。指要精密，算氏之最者也。所著之书，名为《缀术》，学官莫能究其深奥，是故废而不理。

【编者注：李继闵在《算法的源流：东方古典数学的特征》（科学出版社，2007 年第一版）第六节“通其率”考释（305－321）中认为：“通其率”就是“连分数”，我认为此说不当，“通其率”的本质应该是“繁分数化简方法”，与连分数无关。

缀（綴 zhuì）[动]连结 [connect]

缀，连也。——《广雅》

缀鬼谷于北辰。——《楚辞·远逝》

青树翠曼，蒙络摇缀，参差披拂。——柳宗元《至小丘西小石潭记》

缀行甚远。(紧随着走了很远。缀，连结，这里是紧跟的意思。)——《聊斋志异·狼三则》

又如缀恩(联系亲情)；缀行(连接成行)；缀连(组合，连属)；缀接(联系)；缀组(系结印绶)

祖冲之的“缀术”是“缀连术”或“缀接术”的意思，也就是现代的“连分数”的意思。】

# 第三章 广义中国剩余定理

“大衍求一术”中最重要的环节就是“中国剩余定理”的应用了。显然，“中国剩余定理”来源于“大衍求一术”。

**定理 1（解的存在条件）**：一次同余方程组

$$\begin{cases} N \equiv a_1 (\bmod m_1) \\ N \equiv a_2 (\bmod m_2) \\ \vdots \\ N \equiv a_k (\bmod m_k) \end{cases}$$

有解的充要条件是：$(m_i, m_j) \mid (a_i - a_j)$，其中 $i \neq j$；

并且，若有解，则其对 $(\bmod M)$ 的解只有唯一一个。

**定理 2：（中国剩余定理** Chinese Remainder Theorem）

设 $m_1, m_2, \cdots\cdots, m_k$ 是两两互素的正整数，

$M = m_1 \ m_2 \cdots\cdots m_k$，$M_i = M / m_i$，$M_i \ x_i \equiv 1 (\bmod m_i)$，$M_i \ x_i \equiv 0 (\bmod M_i)$，

那么对于任意整数 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_k$，一次同余方程组

$$\begin{cases} N \equiv a_1 (\bmod m_1) \\ N \equiv a_2 (\bmod m_2) \\ \vdots \\ N \equiv a_k (\bmod m_k) \end{cases}$$

必有解，且解可以写为：$N \equiv \sum_{i=1}^{k} M_i \ x_i \ a_i (\bmod M)$；

【编者注：教程上的标准化证明让人厌倦，让我们换个叙述方式吧。】

证明：$\begin{cases} N \equiv a_1 (\bmod m_1) \\ N \equiv a_2 (\bmod m_2) \\ \vdots \\ N \equiv a_k (\bmod m_k) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N = y_1 m_1 + a_1 \\ N = y_2 m_2 + a_2 \\ \vdots \\ N = y_k m_k + a_k \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} M_1 N = M_1 y_1 m_1 + M_1 a_1 \\ M_2 N = M_2 y_2 m_2 + M_2 a_2 \\ \vdots \\ M_k N = M_k y_k m_k + M_k a_k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_1 x_1 N = M y_1 x_1 + M_1 x_1 a_1 \\ M_2 x_2 N = M y_2 x_2 + M_2 x_2 a_2 \\ \vdots \\ M_k x_k N = M y_k x_k + M_k x_k a_k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ (\sum_{i=1}^{k} M_i \ x_i) N = M (\sum_{i=1}^{k} y_i \ x_i) + \sum_{i=1}^{k} M_i \ x_i \ a_i$$

又因为 $M_i \ x_i \equiv 1(\mathrm{mod}\, m_i)$， $M_i \ x_i \equiv 0(\mathrm{mod}\, M_i)$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} M_i \ x_i \equiv 1(\mathrm{mod}\, m_i)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} M_i \ x_i \equiv 1(\mathrm{mod}\, M)$$

所以， $N \equiv \sum_{i=1}^{k} M_i \ x_i \ a_i (\mathrm{mod}\, M)$；

（解的唯一性证明这里略去。）

中国剩余定理的解的意义：

设 $m_1, m_2, \cdots\cdots, m_k$ 是两两互素的正整数， $M = m_1 \ m_2 \cdots\cdots m_k$。在由整数构成的 $k$ 个等差数列中（公差为 $m_i$），可以有相同的项出现，将这些项依序取出，可以构成一个新的等差数列，其公差为 $M$ ，首项为 $\sum_{i=1}^{k} M_i \ x_i \ a_i (\mathrm{mod}\, M)$，并且这样的等差数列只有一个。

也可以用解析几何的观点来解释：

设 $m_1, m_2, \cdots\cdots, m_k$ 是两两互素的正整数， $M = m_1 \ m_2 \cdots\cdots m_k$。有斜率为 $m_i$ 的 $k$ 条直线，它们的函数值可以取为相同的整数；以这些整数为纵坐标，整数出现的序列号为横坐标，构成的点仍然在一条直线上，这条直线的斜率为 $M$ ，并且这样的直线只有一条。

中国剩余定理了不起的作用是：可以将不同等差数列中相同的项（或曰：不同直线上的相同的整数函数值）富集起来，并构成一个新的等差数列（或曰：一条新的直线）。

这也是中国剩余定理之所以伟大的原由。

我们用“大衍求一矩阵”给出算法流程：

**定理 3：中国剩余定理“求一”运算 $M_i \ x_i \equiv 1(\mathrm{mod}\, m_i)$：**

$$M_i = r_{-1} = q_0 \ m_i + r_1 \text{，} \ m_i = r_0 = q_1 \ r_1 + r_2 \text{，} \ \cdots\cdots \text{，} \ r_{k-1} = q_k \ r_k + r_{k+1} \text{；}$$

$q_i$ 即为 $M_i / m_i$ 的连分数$[q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k]$，进行下面运算；

| | |
|---|---|
| 带余<br>除法<br>矩阵 | $\begin{bmatrix} a = r_{-1} \\ b = r_0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \end{bmatrix}$, $\cdots\cdots$, $\begin{bmatrix} r_k \\ r_{k+1} \end{bmatrix}$<br>其中：$\begin{bmatrix} r_{i-1} \\ r_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_i \\ r_{i+1} \end{bmatrix}$; |

| | |
|---|---|
| | 当 $r_{k+1}=0$ 时，运算停止。 |
| “大衍”矩阵 | $\begin{bmatrix}-q_0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}-q_1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，……，$\begin{bmatrix}-q_k & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ |
| “求一”矩阵 | $\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix}-q_i & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P_k & P_{k-1}\\ Q_k & Q_{k-1}\end{bmatrix}$<br>$x_i=Q_{k-1}$ 为乘数（乘率），<br>它使 $M_i\ x_i\equiv 1(\mathrm{mod}\,m_i)$ 成立； |

同余方程组的解为：$N\equiv\sum_{i=1}^{k}M_i\ \ x_i\ a_i\,(\mathrm{mod}\,M\,)$

中国剩余定理要求 $N$ 的系数为 1，这大大限制了定理的应用范围。事实上，当 $N$ 的系数不为 1 时中国剩余定理仍然成立，我们推广如下：

**定理 4（解的存在条件）：**设 $m_1,m_2,\cdots\cdots,m_k$ 是两两互素的正整数，$M=m_1\ m_2\cdots\cdots m_k$，

一次同余方程组

$$\begin{cases}b_1N\equiv a_1\,(\mathrm{mod}\,m_1)\\ b_2N\equiv a_2\,(\mathrm{mod}\,m_2)\\ \vdots\\ b_kN\equiv a_k\,(\mathrm{mod}\,m_k)\end{cases}$$

有解的充要条件是：$b_i\ N\equiv a_i\,(\mathrm{mod}\,m_i)$ 都有解，亦即：$(b_i,m_i)\,|\,a_i$，其中 $i\neq j$；

并且，若有解，则其对 $(\mathrm{mod}\,M\,)$ 的解只有唯一一个。

**定理 5：（广义中国剩余定理 Generalized** Chinese Remainder Theorem）

设 $m_1,m_2,\cdots\cdots,m_k$ 是两两互素的正整数，$M=m_1\ m_2\cdots\cdots m_k$，

$M_i=M\,/\,m_i$，$b_i\ c_i\equiv 1(\mathrm{mod}\,m_i)$，$M_i\ x_i\equiv 1(\mathrm{mod}\,m_i)$，

那么对于任意整数 $a_1,a_2,\cdots\cdots,a_k$，以及 $b_1,b_2,\cdots\cdots,b_k$，一次同余方程组

$$\begin{cases}b_1N\equiv a_1\,(\mathrm{mod}\,m_1)\\ b_2N\equiv a_2\,(\mathrm{mod}\,m_2)\\ \vdots\\ b_kN\equiv a_k\,(\mathrm{mod}\,m_k)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}N\equiv a_1c_1\,(\mathrm{mod}\,m_1)\\ N\equiv a_2c_2\,(\mathrm{mod}\,m_2)\\ \vdots\\ N\equiv a_kc_k\,(\mathrm{mod}\,m_k)\end{cases}$$

必有解，且解可以写为：$N \equiv \sum_{i=1}^{k} M_i \ \ x_i \ a_i \ c_i \ (\bmod M\ )$

定理的证明与“中国剩余定理”完全相同。我们用“大衍求一矩阵”给出算法流程：

**定理 6：广义中国剩余定理“求一”运算** $M_i \ \ x_i \equiv 1(\bmod m_i)$：

若 $b_i \ c_i \equiv 1(\bmod m_i)$，则

$$M_i = r_{-1} = q_0 \ m_i + r_1\text{，}\ m_i = r_0 = q_1 \ r_1 + r_2\text{，}\ \cdots\cdots\text{，}\ r_{k-1} = q_k \ r_k + r_{k+1}\text{；}$$

$q_i$ 即为 $M_i \,/\, m_i$ 的连分数$[\,q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k\,]$，进行下面运算；

同余方程组的解为：$N \equiv \sum_{i=1}^{k} M_i \ \ x_i \ a_i \ c_i \ (\bmod M\ )$

与“中国剩余定理”只差 $b_i \ c_i \equiv 1(\bmod m_i)$ 这一步。

【例题】解同余方程组

$$\begin{cases} 7N \equiv 1(\bmod 3) \\ 4N \equiv 1(\bmod 5) \\ 15N \equiv 2(\bmod 7) \\ 8N \equiv 9(\bmod 11) \end{cases}$$

【解】3，5，7，11 的最小公倍数为 $M$ ＝1155，

7/3 的连分数为[2,3]，因此

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\text{，}\ c_1 = 1\text{；}$$

4/5 的连分数为[0,1,4]，因此

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}\text{，}\ c_2 = -1\text{；}$$

15/7 的连分数为[2,7]，因此

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -2 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}\text{，}\ c_3 = 1\text{；}$$

8/11 的连分数为[0,1,2,1,2]，因此

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 3 \\ 11 & -4 \end{bmatrix}\text{，}\ c_4 = -4\text{；}$$

得到$\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$=$\{1, -1, 1, -4\}$，下面计算同余方程组的解：

385/3 的连分数为[128,3]，因此

$$\begin{bmatrix}-128 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}385 & -128\\ -3 & 1\end{bmatrix}，\quad x_1=1；$$

231/5 的连分数为[46,5]，因此

$$\begin{bmatrix}-46 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}231 & -46\\ -5 & 1\end{bmatrix}，\quad x_2=1；$$

165/7 的连分数为[23,1,1,3]，因此

$$\begin{bmatrix}-23 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}165 & -47\\ -7 & 2\end{bmatrix}，\quad x_3=2；$$

105/11 的连分数为[9,1,1,5]，因此

$$\begin{bmatrix}-9 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}105 & -19\\ -11 & 2\end{bmatrix}，\quad x_4=2；$$

因为$\{a_1,a_2,a_3,a_4\}=\{1,1,2,9\}$，$\{b_1,b_2,b_3,b_4\}=\{7,4,15,8\}$，于是

取$N\equiv\sum_{i=1}^{n}M_i\ x_i\ a_i\ c_i\ (\bmod M)\equiv184(\bmod 1155)$即可。

有了广义中国剩余定理的“大衍求一矩阵”算法流程，就可以开始我们的“大衍”之旅了。

# 第四章 “大衍求一”之魂

我们说一说“大衍求一”之魂。

## 一、从“求一”说起

也就是要从解$b\ x \equiv a \pmod{m}$说起了。

解决这个同余方程，只需要把$x$的系数从$b$变成 1 即可。目前我们知道的，能够达到这个目的方式有两种：

（1）Euler-Fermat 定理：若$(b,m)$=1，则$b^{j(m)} \equiv 1 \pmod{m}$；

证明：$b\ x \equiv a \pmod{m} \Rightarrow b^{j(m)-1}\ b\ x \equiv b^{j(m)-1}\ a \pmod{m} \Rightarrow x \equiv b^{j(m)-1}\ a \pmod{m}$

（2）互素性质：若$(b,m)$=1，则$b\ y \equiv 1 \pmod{m}$；

证明：$b\ x \equiv a \pmod{m} \Rightarrow b\ y\ x \equiv a\ y \pmod{m} \Rightarrow x \equiv a\ y \pmod{m}$

显然，秦九韶用的是第二种算法，这在运算量上是最佳选择，同时也为解一次同余方程组铺平了道路。此所谓“大衍求一”之魂也。

## 二、“大衍”之道

如何从$(b,m)$=1 去求出$b\ y \equiv 1 \pmod{m}$中的$y$，这就是“大衍”的任务了。

大衍求一术云：置奇右上，定居右下，立天元一于左上。先以右上除右下，所得商数与左上一相生，入左下；然后乃以右行上下，以少除多，递互除之，所得商数随即递互累乘，归左行上下，须使右上末后奇一而止，乃验左上所得以为乘率。或奇数已见单一者便为乘率。

秦九韶说得很清楚：

一是“以少除多，递互除之”，这是“带余除法”的任务，用“带余除法矩阵”即可：

$\begin{bmatrix} m = r_{-1} \\ b = r_0 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \end{bmatrix}$，……，$\begin{bmatrix} r_k \\ r_{k+1} \end{bmatrix}$；

其中：$\begin{bmatrix} r_{i-1} \\ r_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_i \\ r_{i+1} \end{bmatrix}$；

当$r_k$＝1 时，运算停止。由于$(b,m)$=1 故此时$r_{k+1}$＝0，亦可作为判定标志。

今后，这一步的运算过程我们不再详细书写，直接说成：

$m/b$的连分数是$[q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k]$；

二是“所得商数随即递互累乘”，这是“大衍”的任务，用“大衍矩阵”即可：

$$\prod_{i=0}^{k} \begin{bmatrix} -q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_k & P_{k-1} \\ Q_k & Q_{k-1} \end{bmatrix},$$

其中的$\begin{bmatrix} P_k & P_{k-1} \\ Q_k & Q_{k-1} \end{bmatrix}$叫做“求一矩阵”，

$y = Q_{k-1}$为乘数或者乘率；

中国剩余定理的目的就是要把模乘起来。对中国剩余定理而言，正确对待$M_i \ x_i \equiv 1(\mathrm{mod}\, m_i)$是解决问题的关键。

显然，$M_i \ x_i \equiv 1(\mathrm{mod}\, m_i)$蕴含$M_i \ x_i \equiv 1(\mathrm{mod}\, m_i)$，$M_i \ x_i \equiv 0(\mathrm{mod}\, M_i)$，

换一种表达方式是：$\sum_{i=1}^{k} M_i \ x_i \equiv 1(\mathrm{mod}\, m_i)$，

根据同余性质：若$a \equiv b\,(\mathrm{mod}\, m_i)$（其中$i = 1,2,\cdots\cdots,n$），且$m_1, m_2, \cdots\cdots, m_n$两两互素，则$a \equiv b\,(\mathrm{mod}\, m_1 \ m_2 \cdots\cdots m_n)$；

我们可以得到：$\sum_{i=1}^{k} M_i \ x_i \equiv 1(\mathrm{mod}\, M)$

从而解决中国剩余定理的证明问题。

此所谓“大衍求一”之又一魂也。

显然，利用 Euler-Fermat 定理“求一”的办法是无法解决这个问题的。

秦九韶（1202－1261）的这一思想方法后又被 Gauss 重新发现。

1801 年，年仅 24 岁的高斯（Carl Friedrich Gauss，1777-1855）出版了巨著《算术研究》(Disquisitiones Arithmeticae)，在“第二篇　一次同余方程　第 13～44 目”的“7　对若干个给定的模，求分别同余于给定的剩余的数的方法　第 32～36 目”中，具体内容请参考本书附录。

显然，Gauss 的方法与秦九韶方法大同小异。可见，他们确实是“英雄所见略同”啊。

## 三、拉格朗日中值定理

从$M_i \ x_i \equiv 1(\mathrm{mod}\, m_i)$蕴含$\sum_{i=1}^{k} M_i \ x_i \equiv 1(\mathrm{mod}\, M)$的思想方法可以发现，这与《数值计算》中 Lagrange（拉格朗日）插值公式是一脉相承的：

Lagrange 插值公式：已知以下函数值：

| | |
|---|---|
| $x_i$ | $x_0$，$x_1$，……，$x_n$ |
| $y_i = f(x_i)$ | $y_0$，$y_1$，……，$y_n$ |

则函数$y = f(x)$的插值多项式为：

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \ l_i(x_i) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j};$$

其中的关键是构造$l_i(x_i)$，使得

$$l_i(x_i)=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases};$$

这个结果与$\sum_{i=1}^{k} M_i \;\; x_i \equiv 1 \pmod{M}$有异曲同工之效。

# 第五章 大衍总数术

## 一、大衍总数术

《数书九章》凡十八卷，分为九类，每类九问，共九九八十一问。其中大衍类问题共10题，分别是：

第一卷：01 蓍卦发微，02 古历会积，03 推计土功，04 推库额钱。

第二卷：05 分粜推原，06 程行计地，07 程行相及，08 积尺寻源，09 余米推数。

第三卷：12 治历演纪。

大衍求一术是秦九韶最伟大的贡献之一，也是专属数论范畴的问题，我们将其罗列于此。

本书的主要参考文献是：

《丛书集成初篇·数书九章》秦九韶原著（宜稼堂丛书本），商务印书馆，1937 年。

《数书九章新释》(宋)秦九韶原著，王守义遗著，李俨审校，安徽科学技术出版社，1992 年 10 月。此书印刷错误颇多，句逗亦可商榷，但王守义先生治学非常认真、严谨，许多考证都非常仔细，仍然值得精读，读者可以在勘误过程中获得更多收益。

### 大衍总数术

大衍总数术曰：置诸问数，类名有四：

一曰元数，谓尾位见单零者，本门揲蓍、酒息、斛籴、砌砖、失米之类是也；

二曰收数，谓尾位见分厘者，假令冬至三百六十五日二十五刻，欲与甲子六十日为一会而求积日之类；

三曰通数，谓诸数各有分子母者，本门问一会积年是也；

四曰复数，谓尾位见十或百及千以上者，本门筑堤，并急足之类是也；【编者注：筑堤(推计土功)之“复数”，非“尾位见十或百及千以上者”。秦九韶的“复数”应该是“总等大于1”的意思。如此，则“元数”与“复数”的定义有问题，分类不合理，需要修正。】

元数者，先以两两连环求等，约奇弗约偶；或约得五，而彼有十，乃约偶弗约奇；或元数俱偶，约毕可存一位见偶；或皆约而犹有类数存，姑置之，俟与其他约遍，而后乃与姑置者求等，约之；或诸数皆不可尽类，则以诸元数命曰复数，以复数格入之。

收数者，乃命尾位分厘作单零，以进所问之数；定位讫，用元数格入之；或如意立数为母，收进分厘，以从所问，用通数格入之。

通数者，置问数通分，内子互乘之，皆曰通数。求总等，不约一位约众位，得各元法数，用元数格入之；或诸母数繁，就分从省通之者，皆不用元，各母仍求总等，存一位约众位，亦各得元法数，亦用元数格入之。

复数者，问数尾位见十以上者，以诸数求总等，存一位约众位，始得元数；两两连环求等，约奇弗约偶，复乘偶；或约偶弗约奇，复乘奇；或彼此可约而犹有类数存者，又相减以求续等，以续等约彼，则必复乘此，乃得定数。所有元数、收数、通数三格，皆有复乘求定之理，悉可入之。【编者注：秦九韶的“约奇弗约偶”显得语焉不详，而且意义不大，不必纠缠于此。收数，通数之流可作单位数看待，无需自寻烦恼。】

求定数：勿使两位见偶，勿使见一太多，见一多则借用繁，不欲借，则任得一；【编者注：“见一”者，应与元数之因子相结合而取舍之。其实，所谓“见一”“借用”，毫无价值，完全可以忽略。】

以定相乘为衍母；以各定约衍母，各得衍数。或列各定为母于右行，各立天元一为子于左行，以母互乘子，亦得衍数。

诸衍数，各满定母去之，不满曰奇；以奇与定，用大衍求一入之，以求乘率；或奇得一者，便为乘率。【编者注：亦可直接由诸衍数求乘率，无需“各满定母去之”。秦九韶加入“求奇”这一步的目的，似乎是保证求乘率时“实与法互素”，以提供判定大衍求一术终止的标

志。】

大衍求一术云：置奇右上，定居右下，立天元一于左上。先以右上除右下，所得商数，与左上一相生，入左下；然后乃以右行上下，以少除多，递互除之【编者注：至此，是所谓的“求一术”，为连分数过程，以“须使右上末后奇一而止”为判定标志】；所得商数，随即递互累乘，归左行上下，须使右上末后奇一而止【编者注：至此，是所谓的“大衍术”，为矩阵运算过程。事实上，“大衍术”与“求一术”相伴而行，故称“大衍求一术”】；乃验左上所得，以为乘率；或奇数已见单一者，便为乘率。【编者注：此术妙绝！】

置各乘率，对乘衍数得泛用。

并泛用课衍母，多一者为正用。或泛多衍母倍数者，验元数，奇偶同类者，损其半倍，各为正用数；或三处同类，以三约衍母，于三处损之。或定母得一，而衍数同衍母者，为无用数。当验元数同类者，而正用至多处借之。以元数两位求等，以等约衍母为借数，以借数损有以益其无为正用；或数处无者，如意立数为母，约衍母所得，以如意子乘之，均借补之；或欲从省勿借，任之为空可也。【编者注：这一段意义不大，完全可以忽略。“借数”之流，[清]黄宗宪《求一术通解》直谓之“赘设，删之”，实乃真知灼见也。】

然后其余各乘正用，为各总；并总，满衍母去之，不满为所求率数。

【编者注：这是“大衍总数术”的原文，未作修改。】

## 二、从元数到定母

首先解决一个重要问题：从元数到定母。

中国剩余定理要求“定母”是两两互素的，而秦九韶大衍求一术的“元数”则没有这一限制，当然，这只是表面现象，事实上“大衍求一”运算仍然要在“定母”互素的条件下才能进行。

我们引用部分定理：

引理 01：若 $a_1 \equiv a_2 \pmod{d}$，则 $\begin{cases} N \equiv a_1 \pmod{d} \\ N \equiv a_2 \pmod{d} \end{cases}$ 有解；否则，无解。

例如：$\begin{cases} N \equiv 1 \pmod{35} \\ N \equiv 36 \pmod{35} \end{cases}$ 有解；$\begin{cases} N \equiv 1 \pmod{35} \\ N \equiv 34 \pmod{35} \end{cases}$ 无解。

引理 02：若 $a > b$，$a_1 \equiv a_2 \pmod{p^a}$，则 $\begin{cases} N \equiv a_1 \pmod{p^a} \\ N \equiv a_2 \pmod{p^b} \end{cases} \Leftrightarrow N \equiv a_1 \pmod{p^a}$；

例如：$\begin{cases} N \equiv 2 \pmod{3} \\ N \equiv 35 \pmod{27} \end{cases} \Leftrightarrow N \equiv 35 \pmod{27}$；

引理 03：（1）若$(m, c) = d > 1$，则 $a\,c \equiv b\,c \pmod{m} \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{m/d}$；

（2）若 $a \equiv b \pmod{M}$，$m_1 | M$，则 $a \equiv b \pmod{m_1}$；

引理 04：（1）若 $a \equiv b \pmod{m_i}$（其中 $i = 1,2,\cdots\cdots,n$），且 $M = [m_1, m_2, \cdots\cdots, m_n]$，

则 $a \equiv b \pmod{M}$；

（2）若 $a \equiv b \pmod{m_i}$（其中 $i = 1,2,\cdots\cdots,n$），且 $m_1, m_2, \cdots\cdots, m_n$ 两两互素，

则 $a \equiv b \pmod{m_1\, m_2 \cdots\cdots m_n}$；

引理 05：若 $a > b$， $a_1 \equiv a_2 \pmod{p^a}$， $p^a \| m_1$， $p^b \| m_2$，则

$$\begin{cases} N \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ N \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \vdots \\ N \equiv a_k \pmod{m_k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} N \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ N \equiv a_2 \pmod{m_2 / p^b} \\ \vdots \\ N \equiv a_k \pmod{m_k} \end{cases}$$

引理 06：设 $m_1, m_2, \cdots\cdots, m_k$ 是两两互素的正整数，且 $M = [m_1', m_2', \cdots\cdots, m_k']$；

则存在 $m_1, m_2, \cdots\cdots, m_k$ 使得：

（1） $m_i \mid m_i'$；（2） $M = [m_1, m_2, \cdots\cdots, m_k]$；

（3） $\begin{cases} N \equiv a_1 \pmod{m_1'} \\ N \equiv a_2 \pmod{m_2'} \\ \vdots \\ N \equiv a_k \pmod{m_k'} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} N \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ N \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \vdots \\ N \equiv a_k \pmod{m_k} \end{cases}$；

这些引理的证明请读者自己动手完成。

引理 01～引理 06 说明：
（1）同余方程可按模的因子分解为若干个同余方程组成的同余方程组；
（2）模相同的两个同余方程，若余数不相同，则同余方程组无解；
（3）模素因子相同的两个同余方程可合并，只需要保留素因子数目多的一个；
（4）上述变形可保证同余方程组的等价性；
这些结果是我们可以把“元数”调整为“定母”的基础。
需要注意的是，模为分数的问题往往是引理 03 的应用，比如说：

已知：$\begin{cases} N \equiv 2 \pmod{\dfrac{11}{3}} \\ N \equiv 1 \pmod{\dfrac{13}{5}} \\ N \equiv 2 \pmod{\dfrac{17}{7}} \end{cases}$，求 $N$；

此情形等价于$\begin{cases} N \equiv 2 \pmod{11} \\ N \equiv 1 \pmod{13} \\ N \equiv 2 \pmod{17} \end{cases}$，并没有值得特别研究的价值。

那么，如何确定“定母”？我们以第 08 题：积尺寻源为例说明如下：

已知：$\begin{cases} N \equiv a_1 (\bmod 130) \\ N \equiv a_2 (\bmod 120) \\ N \equiv a_3 (\bmod 110) \\ N \equiv a_4 (\bmod 100) \\ N \equiv a_5 (\bmod 60) \\ N \equiv a_6 (\bmod 50) \\ N \equiv a_7 (\bmod 25) \\ N \equiv a_8 (\bmod 20) \end{cases}$，

(1)当{ $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$ }＝{60,30,20,30,30,30,5,10}时，求 $N$；

(2)当{ $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$ }＝{70,110,80,10,50,10,10,10}时，求 $N$；

【解】用短除法可得：

$$\begin{array}{l|l} 5 & 130,120,110,100,60,50,25,20 \\ \hline 5 & 26,24,22,20,12,10,5,4 \\ \hline 2 & 26,24,22,4,12,2,1,4 \\ \hline 2 & 13,12,11,2,6,1,1,2 \\ \hline 3 & 13,6,11,1,3,1,1,1 \\ \hline & 13,2,11,1,1,1,1,1 \end{array}$$，

显然，5 是{ $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8$ }＝{130,120,110,100,60,50,25,20}的总等，

并且 5 同时也是{ $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$ }的总等

因此，我们把 $D$＝5 作单位数看待；

其次，{□,□,□,20,□,10,5,□}的分等是 5；

{26,24,22,4,12,2,□,4}的分等是 2；

{□,12,□,2,6,□,□,2}的分等是 2；

{□,6,□,□,3,□,□,□}的分等是 3；

最后剩余的是：{13,2,11,1,1,1,1,1}；

分等 5 可分配给 $m_4, m_6, m_7$ 中的任意一个；分等 4 只能分配给 $m_2$；分等 3 可分配给 $m_2, m_5$ 中的任意一个，为使定母均匀分布，分配给 $m_5$ 比较合适；因此定母确定为：

{ $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8$ }＝{13,8,11,1,3,1,5,1}；

原问题转化为$\begin{cases} N' \equiv a_1/5 \pmod{13} \\ N' \equiv a_2/5 \pmod{8} \\ N' \equiv a_3/5 \pmod{11} \\ N' \equiv a_4/5 \pmod{1} \\ N' \equiv a_5/5 \pmod{3} \\ N' \equiv a_6/5 \pmod{1} \\ N' \equiv a_7/5 \pmod{5} \\ N' \equiv a_8/5 \pmod{1} \end{cases}$；

若不把$D$＝5 作单位数看待，则选择$m_7$＝25 比较合适，定母确定为：

$\{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8\}$＝{13,8,11,1,3,1,25,1}；

原问题转化为$\begin{cases} N' \equiv a_1 \pmod{13} \\ N' \equiv a_2 \pmod{8} \\ N' \equiv a_3 \pmod{11} \\ N' \equiv a_4 \pmod{1} \\ N' \equiv a_5 \pmod{3} \\ N' \equiv a_6 \pmod{1} \\ N' \equiv a_7 \pmod{25} \\ N' \equiv a_8 \pmod{1} \end{cases}$；

无论如何，都已经保证“定母”是两两互素的，并且两个同余方程组是等价的。

## 三、原文解读范例

### 第 05 题：分粜推原

问：有上农三人，力田所收之米系用足斗均分，各往他处出粜。甲粜与本郡官场，余三斗二升；乙粜与安吉乡民，余七斗；丙粜与平江揽户，余三斗。欲知共米，及三人所分各粜石数几何？

答曰：共米七百三十八石。三人分米，各二百四十六石。

甲粜官斛，二百九十六石；乙粜安吉斛，二百二十三石；丙粜平江斛，一百八十二石。

术曰：以大衍求之，置官场斛率，安吉乡斛率，平江市斛率[官私共知者，官斛八斗三升，安吉乡斛一石一斗，平江市斛一石斗五升]为元数。求总等，不约一位约众位，连环求等，约奇不约偶，或犹有类数存者，又求等，约彼必复乘此，各得定母。相乘为衍母，互乘为衍数，满定去之，得奇，大衍求一，得乘率，乘衍数为用数，以各余米乘用，并之为总。满衍母去之，不满为所分。以元人数乘之，为共米。

草曰：置文思院官斛 83 升，安吉州乡斛 110 升，平江府市斛 135 升，各为群斛元率。

| | |
|---|---|
| 83 | 官斛 |
| 110 | 安吉斛 |
| 135 | 平江斛 |

| | |
|---|---|
| 元数 | |

编者注：设均分米数为 $N$；定数为 $m_i^{/}$，注意：这是元数，但不是定数（定母）$m_i$；各余米数为 $a_i$。显然，共米数为 3$N$；各粜米数为 $N/m_i^{/}$；我们的问题是解同余方程组：

$$\begin{cases} N \equiv a_1 (\bmod m_1^{/}) \\ N \equiv a_2 (\bmod m_2^{/}) \\ N \equiv a_3 (\bmod m_3^{/}) \end{cases}，亦即：\begin{cases} N \equiv 32 (\bmod 83) \\ N \equiv 70 (\bmod 110) \\ N \equiv 30 (\bmod 135) \end{cases}。$$

先以三率求总等，得 1，不约。次以连环求等，其安吉率 110，与平江率 135 求等得 5，以约平江率得 27。余皆求等，得 1，不约。各得定数。

| | |
|---|---|
| 83 | 官斛 |
| 110 | 安吉斛 |
| 27 | 平江斛 |
| 定母 | |
| 右行 | |

编者注：事实上，后面的运算需要定母 $m_i$ 两两互素才能进行。因此，若 $m_i^{/}$ 两两互素，则取 $m_i = m_i^{/}$；否则，应该根据它们的最小公倍数来确定 $m_i$。

83，110，135 的最小公倍数 LCM[83,110,135]＝83×110×27＝246510；

(110,135)=5 叫做“分等”，需要约去。这里约去 135 中的因子 5，得到 27。

亦即定母为：$m_1$＝83，$m_2$＝110，$m_3$＝27。

秦九韶采用的是辗转相除法求最小公倍数，这是比较麻烦的做法，可以用“短除法”来求：

$$5 \underline{\left| 83,110,135 \right.} \\ \quad \left| 83,22,27 \right.$$

，其中的因子 5 可以和 22，27 中的任何一个作积。这里是选择 22×5＝110，这个数值小一点，可使余数小一些。

以定数相乘，得 246510，为衍母。各以元率约之，得 2970，为官斛衍数；得 2241，为安吉斛衍数；得 9130，为平江斛衍数；

| | |
|---|---|
| 110×27＝2970 | 官斛 |
| 83×27＝2241 | 安吉斛 |
| 83×110＝9130 | 平江斛 |
| 衍数（寄左） | |
| 246510 | 衍母 |

编者注：求衍母：$M = m_1 m_2 m_3$；求衍数 $M_i$：$M_1 = M/m_1 = m_2 m_3$，$M_2 = M/m_2 =$

$m_1\ m_3$，$M_3 = M/m_3 = m_1\ m_2$；

次以定母满去衍数，得不满 65，为官斛奇；不满 41，为安吉奇；不满 4，为平江奇数。

| | | |
|---|---|---|
| 2970＝83×35＋65 | 83 | 官斛 |
| 2241＝110×20＋41 | 110 | 安吉斛 |
| 9130＝27×338＋4 | 27 | 平江斛 |
| 奇数（左行） | 定母（右行） | |

编者注：求奇数 $b_i$：$M_1 \equiv b_1 (\bmod m_1)$，$M_2 \equiv b_2\ (\bmod m_2)$，$M_3 \equiv b_3\ (\bmod m_3)$，目的是为后面的“求一”运算 $M_i\ x_i \equiv 1(\bmod m_i)$ 提供安全保障。其实也可以直接用衍数求乘率。

定母，奇数，各以大衍入之，求得乘数，得 23 为官斛乘率；得 51 为安吉乘率；得 7 为平江乘率。

| | | |
|---|---|---|
| [35,1,3,1,1,1,1,3]＝{{2970,823},{83,23}} | 83 | 官斛 |
| [20,2,1,2,6,2]＝{{2241,1039},{110,51}} | 110 | 安吉斛 |
| [338,6,1,3]＝{{9130,2367},{27,7}} | 27 | 平江斛 |
| 乘数 | 定母 | |

编者注：先求大衍矩阵：$q_i$ 取 9130/27 的连分数 $[q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k]$；

再求乘数（乘率）$x_i$：用大衍矩阵作积（所谓“以大衍入之”），求得：$\prod_{i=1}^{k}\begin{bmatrix}-q_i & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}M_i & P_{n-1}\\ m_i & P_n\end{bmatrix}$，其中的 $P_n$ 是使 $M_i\ x_i \equiv 1(\bmod m_i)$ 成立的 $x_i$ 值，；

比如说：平江乘率，$M_3 = 9130$，$m_3 = 27$，连分数为[338,6,1,3]，大衍矩阵运算为 $\begin{bmatrix}-338 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-6 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}9130 & -2367\\ -27 & 7\end{bmatrix}$，取乘数（乘率）$x_3 = 7$；

这就是“以大衍入之”的全部过程，只是秦九韶没有写出来而已。

以乘率各乘寄左行衍数，得 68310 为官斛用数；得 114291 为安吉斛用数；得 63910 为平江用数。

| | | |
|---|---|---|
| 2185920＝2970×23×32 | 68310＝2970×23 | 官斛 |
| 8000370＝2241×51×70 | 114291＝2241×51 | 安吉斛 |
| 1917300＝9130×7×30 | 63910＝9130×7 | 平江斛 |
| 余米 | 用数 | |

次以甲余 32 升，乘官斛用数 68310，得 2185920 升于上；次以乙余 70 升，乘安吉用数 114291，得 8000370 升于中；次以丙余 30 升，乘平江用数 63910，得 1917300 升于下。各为总，并之，得 12103590 升，为总数。满衍母 246510 升去之，不满 24600 升，为所求率。

展为二百四十六石，为三人各分米。以兄弟三人因之，得七百三十八石为共米。置分米二百四十六石，各以官斛八斗三升，安吉斛一石一斗，平江斛一石三斗五升，约之，甲得二百九十六石，余三斗二升；乙得二百二十三石，余七斗；丙得一百八十二石，余三斗。各为粜过及余米。合问。

编者注：求出用数 $M_i\ x_i\ a_i$；再求出总数为 $N \equiv \sum_{i=1}^{n} M_i\ x_i\ a_i \pmod{M}$ 即可得各分米数 $N$；

此外，共米数为 $3N$；各粜米数为 $N/m_i'$；

## 四、“大衍”类问题大衍矩阵方法解题步骤

已知 $\begin{cases} N \equiv a_1 \pmod{m_1'} \\ N \equiv a_2 \pmod{m_2'} \\ \vdots \\ N \equiv a_k \pmod{m_k'} \end{cases}$，求 $N$；

这是所谓“大衍类”问题的标准型，其基本的解题步骤如下：

（一）用短除法求出其最小公倍数 $M'$：

$$\begin{array}{l|l} D' & \underline{m_1', m_2', \cdots, m_k'} \\ c_1 & \underline{d_{1,1}', d_{1,2}', \cdots, d_{1,k}'} \\ \vdots & \vdots \\ c_j & \underline{d_{j-1,1}', d_{j-1,2}', \cdots, d_{j-1,k}'} \\ & d_{j,1}', d_{j,2}', \cdots, d_{j,k}' \end{array}$$

事实上，“短除法”的总等、分等皆来源于辗转相除法。

其中的 $d_{j,1}'$， $d_{j,2}'$，……， $d_{j,k}'$ 是两两互素的正整数，称之为余数；

其中 $D' \geqslant 1$ 是所有元数的公因子，我们称之为总等；

若{ $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_k$ }的总等为 $D''$， $D = (D', D'')$，

换言之， $D$ 为{ $m_1, m_2, \cdots\cdots, m_k, a_1, a_2, \cdots\cdots, a_k$ } 的总等，

则视此总等 $D$ 为单位数，剩余的 $D'/D$ 与 $c_i$ 同等对待。

$c_1, c_2, \cdots\cdots, c_j$ 是部分元数的公因子，称之为分等。显然，$M' = D' \times c_1 \times \cdots\cdots \times c_j \times d_{j,1}' \times \cdots\cdots \times d_{j,k}'$；但是，$M'$ 不一定是衍母。

下面将分等 $c_i$ 全部分配给余数 $d_{j,k}'$，将它们的乘积作成一个数 $m_i$，并且保证 $m_i$ 仍然保

持两两互素关系，这个数 $m_i$ 就是定数，并根据 $m_i$ 构造衍母 $M$ ；我们按照如下要求构造衍母 $M$ ：

（1）单位数 $D$ 不参与 $M$ 的构造；非单位数 $D$ 的总等 $D' / D$ 仍然按照下面要求处理。

（2）从最后一个分等 $c_j$ 开始向上检查，直到 $c_1$，这个分等来源于谁 $m_i'$ 就回归于谁 $m_i'$；

（3）与 $c_j$ 相同的分等也只能“从一而终”，回归于这一个元数 $m_i'$ 中；

（4）若某个分等 $c_i$ 在最后一次出现时是同时来源于若干个元数的，则该分等 $c_i$ 可随意“择一而嫁”，但不得脚踏两只船。

于是衍母为：$M = \prod_{i=1}^{k} m_i$；

原问题转化为 $\begin{cases} N' \equiv a_1 / D (\bmod m_1) \\ N' \equiv a_2 / D (\bmod m_2) \\ \vdots \\ N' \equiv a_k / D (\bmod m_k) \end{cases}$，其中 $N = D\ N' \ (\bmod M)$；

说明：若要求单位数 $D$ 参与 $M$ 的构造也是可以的，前提是保证 $m_i$ 仍然保持两两互素关系，可按照条款（4）酌情处理。我们拒绝 $D$ 参与 $M$ 的构造，目的是使 $M$ 尽可能小一些，以利于后面的计算。

（二）取 $M_i = M / m_i$；

（三）取 $M_i / m_i = M / m_i^2$ 的连分数[ $q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k$ ]；我们得到 $M_i / m_i$ 对应的大衍矩阵：$\prod_{i=0}^{k} \begin{bmatrix} -q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_k & P_{k-1} \\ Q_k & Q_{k-1} \end{bmatrix}$，其中 $x_i = Q_{k-1}$ 为乘数（乘率），这是使 $M_i\ x_i \equiv 1 (\bmod m_i)$ 成立的 $x_i$ 值；

（四）求出总数为 $N' \equiv \sum_{i=1}^{n} M_i\ x_i\ a_i \ (\bmod M)$，则 $N = D\ N' \ (\bmod M)$ 为所求。

（五）若已知条件中 $N$ 的系数不为 1，则可先用大衍求一术将 $N$ 的系数变为 1 后，再按照（一）～（四）转化为标准型问题。或者按照广义中国剩余定理处理。

## 【附录】

秦九韶之“大衍求一术”精妙异常，令人赞叹。
余不才，且斗胆作打油诗若干，以志吾之缪见：

SYD 曰：大衍求一总数术：
置诸问数归元数，连环求等寻定母。
以定相乘作衍母，约去各定是衍数。
大衍求一出乘率，对乘衍数得泛用。
用余之积合为总，满衍之余为所求。

SYD 曰：归元数之术：
收数尾位见分厘，乘十使之归元数；
乘十次数需牢记，其积倒数作单位。
通数各有分子母，通分之后取分子；
分母倒数作单位，分子之数归元数。
复数尾位见十者，连续除十求总等；
取十之积作单位，去诸单位归元数。
题意总等不为一，可取总等为单位；
单位不必再运算，末后乘之可复原。

SYD 曰：寻定母之术：
两两连环求其等，总等分等皆昭然；
总等视作单位数，不与定母瞎参和；
分等之间仍有等，分解此等作调整；
元数因子留其一，均匀分配最适宜；
两两之间再无等，所得之数为定母。
掌握最小公倍数，大衍求一无顾忌。

SYD 曰：【连分数方法】求一术：
衍数满定需去之，不满之数视为奇。
定上奇下求奇数，大者为定小者奇。
以少除多递互除，所得商数归大衍。
更相减损求其等，末后奇一是为止。

【连分数方法】大衍术：
同号取负异号正，商居左上右下零。
左下右上立天元，随即递互累乘之。
左横右竖对乘之，其和立为阵中元。
水落石出现真颜，右下之数为乘率。

# 第六章 “大衍求一”类问题

本人不打算完整地给出原问题的全部答案，就只给出与“大衍求一术”相关的解题过程和结果，以符本书主旨。

## 秦九韶《数书九章》中的大衍类问题（九题）

### 第 01 题：蓍卦发微

问：《易》曰：大衍之数五十，其用四十有九。又曰：分而为二以象两，挂一以象三，揲之以四，以象四时，三变而成爻，十有八变而成卦。欲知所衍之术，及其数各几何？

【大衍矩阵解法】

依题意可列出同余方程：

$$\begin{cases} N \equiv 0 \pmod 1 \\ N \equiv 1 \pmod 2 \\ N \equiv 1 \pmod 3 \\ N \equiv 1 \pmod 4 \end{cases}，求 N；$$

【解】用短除法：$\begin{array}{r|l} 2 & 1,2,3,4 \\ \hline & 1,1,3,2 \end{array}$，单位数为 $D=1$，

原问题转化为$\begin{cases} N' \equiv 0 \pmod 1 \\ N' \equiv 0 \pmod 1 \\ N' \equiv 1 \pmod 3 \\ N' \equiv 1 \pmod 4 \end{cases}$

$\{m_1, m_2, m_3, m_4\}=\{1,1,3,4\}$；$M = m_1\ m_2\ m_3\ m_4 = 12$；

$\{M_1, M_2, M_3, M_4\}=\{M/m_1, M/m_2, M/m_3, M/m_4\}=\{12,12,4,3\}$；

12/1，4/3，3/4 的连分数分别为[12]，[1,3]，[0,1,3]，得到大衍矩阵：

$\begin{bmatrix} -12 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，取 $x_1 = x_2 = 0$；

$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$，取 $x_3 = 1$；

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$，取 $x_4 = -1$；

因为$\{a_1, a_2, a_3, a_4\}=\{0,1,1,1\}$，于是

取 $N = N' \equiv \sum_{i=1}^{n} M_i\ \ x_i\ a_i \pmod M \equiv 1 \pmod{12}$即可。

## 第 02 题：古历会积

问：古历冬至以三百六十五日四分日之一，朔策以二十九日九百四十分日之四百九十九，甲子六十日，各为一周。假令至淳祐丙午十一月丙辰朔初五日庚申冬至初九日甲子，欲求古历气朔甲子一会，积年积月积日，及历过未至年数各几何？

【附录：本问题问不合，术草俱误。以下是王守义修改的：见《数书九章新释》56～63 页[(宋)秦九韶原著，李俨审校，安徽科学技术出版社，1992 年 10 月]：

为了说明“古历会积”这类问题的实质，并尽量保存原文字起见，特为更正兼立术草并为释义如次：

问：古历冬至以三百六十五日四分日之一，朔策以二十九日九百四十分日之四百九十九，甲子六十日，各为一周。假令天正（原为“至淳祐丙午十一月”）丙辰朔，初五日庚申冬至，初九日甲子。欲求古历气朔甲子一会，积年积月积日，及历过未至年数各几何？

答曰：一会积 1520 年，18800 月，555180 日。

历过 1268 年，未至 252 年。但必须是亥正末刻冬至和辰初 33 刻 72 分 $34\frac{2}{47}$ 秒（即按 $8\frac{22}{235}$ 时）交朔。

【注：古历所用日、刻、分、秒为百进位制，1 日＝100 刻，1 刻＝100 分，分＝100 秒】

【大衍矩阵解法】

依题意可列出同余方程：$\begin{cases} N\equiv 0(\bmod 365\frac{1}{4}) \\ N\equiv 0(\bmod 29\frac{499}{940}) \\ N\equiv 0(\bmod 60) \end{cases}$，求 $N$；

【解】用短除法：$\begin{array}{r|l} \frac{3}{940} & 29\frac{499}{940},365\frac{1}{4},60 \\ \hline 487 & 9253,114445,18800 \\ \hline 235 & 19,235,18800 \\ \hline & 19,1,80 \end{array}$，

其中总等 $D$＝3/940 满足条件：$a/D\equiv b/D \pmod{m_i/D}$（其中 $i$＝1,2,……,$n$）；

因此确定单位数为 $D$＝3/940；

原问题转化为$\begin{cases} N'\equiv 0(\bmod 19) \\ N'\equiv 0(\bmod 487) \\ N'\equiv 0(\bmod 18800) \end{cases}$

$\{m_1,m_2,m_3\}$＝{19,487,18800}； $M = m_1 m_2 m_3$＝173956400；

$\{M_1,M_2,M_3\}$＝$\{M/m_1,M/m_2,M/m_3\}$＝{9155600,357200,9253}；

9155600/19 的连分数为$[q_0,q_1,q_2,\cdots\cdots,q_k]$＝[481873,1,2,6]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix}-q_i & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9155600 & -1445621\\ -19 & 3\end{bmatrix}$，取 $x_1=3$；

357200/487 的连分数为$[q_0,q_1,q_2,\cdots\cdots,q_k]$＝[733,2,7,1,8,1,2]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix}-q_i & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-357200 & 123223\\ 487 & -168\end{bmatrix}$，取 $x_2=-168$；

9253/18800 的连分数为$[q_0,q_1,q_2,\cdots\cdots,q_k]$＝[0,2,31,2,8,1,2,5]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix}-q_i & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9253 & -1731\\ -18800 & 3517\end{bmatrix}$，取 $x_3=3517$；

因为$\{a_1,a_2,a_3\}=\{0,0,0\}$，于是

$$N'\equiv\sum_{i=1}^{n}M_i\ \ x_i\ a_i\,(\bmod M\,)\equiv 0\,(\bmod 173956400)$$

取 $N=N'(3/940)=173956400\times3/940=555180$ 即可。

【说明：此题可直接取 $N=(3/940)M$ 。】

**第 03 题：推计土功**

问：筑堤，起四县夫，分给里、步皆同齐，阔二丈，里法三百六十步，步法五尺八寸。人夫以物力差定：甲县物力十三万八千六百贯，乙县物力一十四万六千三百贯，丙县物力一十九万二千五百贯，丁县物力一十八万四千八百贯。每力七百七十贯科一名，春程人功平方六十尺，先到县先给。今甲、乙二县俱毕，丙县余五十一丈，丁县余一十八丈，不及一日，全功。欲知堤长及四县夫所筑各几何？

【大衍矩阵解法】

依题意可列出同余方程：$\begin{cases}N\equiv 0(\bmod 54)\\ N\equiv 0(\bmod 57)\\ N\equiv 51(\bmod 75)\\ N\equiv 18(\bmod 72)\end{cases}$，求 $N$；

【解】用短除法：$\begin{array}{r|l}3 & 54,57,75,72\\ \hline 3 & 18,19,25,24\\ \hline 2 & 6,19,25,8\\ \hline & 3,19,25,4\end{array}$，

其中总等 $D=3$ 满足条件：$a/D\equiv b/D\ \ (\bmod m_i/D)$（其中 $i=1,2,\cdots\cdots,n$）；

因此确定单位数为 $D=3$，

原问题转化为$\begin{cases} N' \equiv 0(\bmod 9) \\ N' \equiv 0(\bmod 19) \\ N' \equiv 17(\bmod 25) \\ N' \equiv 6(\bmod 8) \end{cases}$

{$m_1, m_2, m_3, m_4$}＝{9,19,25,8}； $M = m_1 m_2 m_3 m_4$＝34200；

{$M_1, M_2, M_3, M_4$}＝{$M/m_1, M/m_2, M/m_3, M/m_4$}＝{3800,1800,1368,4275}；

3800/9 的连分数为[$q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k$]＝[422,4,2]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix} -q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3800 & 1689 \\ 9 & -4 \end{bmatrix}$，取 $x_1$＝－4；

1800/379 的连分数为[$q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k$]＝[94,1,2,1,4]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix} -q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1800 & 379 \\ 19 & -4 \end{bmatrix}$，取 $x_2$＝－4；

1368/25 的连分数为[$q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k$]＝[54,1,2,1,1,3]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix} -q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1368 & -383 \\ -25 & 7 \end{bmatrix}$，取 $x_3$＝7；

4275/8 的连分数为[$q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k$]＝[534,2,1,2]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix} -q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4275 & -1603 \\ -8 & 3 \end{bmatrix}$，取 $x_4$＝3；

因为{$a_1, a_2, a_3, a_4$}＝{0,0,51,18}，于是

$$N' \equiv \sum_{i=1}^{n} M_i \ x_i \ a_i (\bmod M) \equiv 342(\bmod 173956400)$$

取 $N = 3N'$＝342×3＝1026 即可。

## 第 04 题：推库额钱

问：有外邑七库，日纳息足钱适等，递年成贯整纳。近缘见钱希少，听各库照当处市陌，准解旧会。其甲库有零钱一十文，丁、庚二库各零四文，戊库零六文，余库无零钱。甲库所在市陌一十二文，递减一文至庚库而止。欲求诸库日息元纳足钱、展省，及今纳旧会，并大小月分各几何？

【大衍矩阵解法】

依题意可列出同余方程：$\begin{cases} N \equiv 10 \pmod{12} \\ N \equiv 0 \pmod{11} \\ N \equiv 0 \pmod{10} \\ N \equiv 4 \pmod{9} \\ N \equiv 6 \pmod{8} \\ N \equiv 0 \pmod{7} \\ N \equiv 4 \pmod{6} \end{cases}$ ，求 $N$；

【解】用短除法：$\begin{array}{r|l} 2 & 12,11,10,9,8,7,6 \\ \hline 2 & 6,11,5,9,4,7,3 \\ \hline 3 & 3,11,5,9,2,7,3 \\ \hline & 1,11,5,3,2,7,1 \end{array}$ ，因此确定单位数为 $D=1$；

原问题转化为$\begin{cases} N' \equiv 10 \pmod{1} \\ N' \equiv 0 \pmod{11} \\ N' \equiv 0 \pmod{5} \\ N' \equiv 4 \pmod{9} \\ N' \equiv 6 \pmod{8} \\ N' \equiv 0 \pmod{7} \\ N' \equiv 4 \pmod{1} \end{cases}$ ；

$\{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7\}=\{1,11,5,9,8,7,1\}$；

$M = m_1 m_2 m_3 m_4 m_5 m_6 m_7 = 27720$；

$\{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7\}$

$=\{M/m_1, M/m_2, M/m_3, M/m_4, M/m_5, M/m_6, M/m_7\}$

$=\{27720,2520,5544,3080,3465,3960,27720\}$；

显然，$x_1 = x_7 = 0$；此外，

2520/11 的连分数为$[q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k]=[229,11]$，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix} -q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2520 & -229 \\ -11 & 1 \end{bmatrix}$，取 $x_2 = 1$；

5544/5 的连分数为$[q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k]=[1108,1,4]$，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix} -q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5544 & 1109 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$，取 $x_3 = -1$；

3080/9 的连分数为$[q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k]$＝[342,4,2]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix}-q_i & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3080 & 1389\\ 9 & -4\end{bmatrix}$，取$x_4$＝－4；

3465/8 的连分数为$[q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k]$＝[433,8]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix}-q_i & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3465 & -433\\ -8 & 1\end{bmatrix}$，取$x_5$＝1；

3960/7 的连分数为$[q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k]$＝[565,1,2,2]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix}-q_i & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3690 & -1697\\ -7 & 3\end{bmatrix}$，取$x_6$＝3；

因为$\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$＝{10,0,0,4,6,0,4}，于是

取$N=N^{/}\equiv\sum_{i=1}^{n}M_i\ x_i\ a_i\ (\bmod M)\equiv 26950(\bmod 27720)$ 即可。

## 第 05 题：分粜推原

问：有上农三人，力田所收之米，系用足斗均分，各往他处出粜。甲粜与本郡官场，余三斗二升；乙粜与安吉乡民，余七斗；丙粜与平江揽户，余三斗。欲知共米，及三人所分各粜石数几何？

【大衍矩阵解法】

依题意可列出同余方程：$\begin{cases}N\equiv 32(\bmod 83)\\ N\equiv 70(\bmod 110)\\ N\equiv 30(\bmod 135)\end{cases}$，求$N$；

【解】用短除法：$\begin{array}{r|l}5 & 83,110,135\\ \hline & 83,22,27\end{array}$，因此确定单位数为$D$＝1；

原问题转化为$\begin{cases}N^{/}\equiv 32(\bmod 83)\\ N^{/}\equiv 70(\bmod 22)\\ N^{/}\equiv 30(\bmod 27)\end{cases}$

$\{m_1, m_2, m_3\}$＝{83,22,27}；$M=m_1\ m_2\ m_3$＝49302；

$\{M_1, M_2, M_3\}=\{M/m_1, M/m_2, M/m_3\}$＝{594,2241,1826}；

594/83 的连分数为$[q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k]$＝[7,6,2,1,1,2]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix}-q_i & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}594 & -229\\ -83 & 32\end{bmatrix}$，取 $x_1$＝32；

2241/22 的连分数为[ $q_0,q_1,q_2,\cdots\cdots,q_k$ ]＝[101,1,6,3]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix}-q_i & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2241 & -713\\ -22 & 7\end{bmatrix}$，取 $x_2$＝7；

1826/27 的连分数为[ $q_0,q_1,q_2,\cdots\cdots,q_k$ ]＝[67,1,1,1,2,3]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix}-q_i & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1826 & -541\\ -27 & 8\end{bmatrix}$，取 $x_3$＝8；

因为{ $a_1,a_2,a_3$ }＝{32,70,30}，于是

取 $N=N'\equiv\sum_{i=1}^{n}M_i\ \ x_i\ a_i\,(\mathrm{mod}\,M\,)$≡24600(mod49302)即可。

**第 06 题：程行计地**

问：军师获捷，当早点，差急足三名，往都下节节走报，其甲于前数日申末到，乙后数日未正到，丙于今日辰末到。据供：甲日行三百里，乙日行二百四十里，丙日行一百八十里。问：自军前至都里数，及三人各行日数几何？

【大衍矩阵解法】

依题意可列出同余方程：$\begin{cases}N\equiv 0(\mathrm{mod}\,300)\\ N\equiv 180(\mathrm{mod}\,240)\\ N\equiv 60(\mathrm{mod}\,180)\end{cases}$，求 $N$；

【解】用短除法：$60\underline{|300,240,180}$
$\quad\quad 5,4,3$，

其中总等 $D$＝60 满足条件：$a/D\equiv b/D\ \ (\mathrm{mod}\,m_i/D)$（其中 $i$＝1,2,……, $n$ ）；

因此确定单位数为 $D$＝60；

原问题转化为 $\begin{cases}N'\equiv 0(\mathrm{mod}\,5)\\ N'\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)\\ N'\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)\end{cases}$；

{ $m_1,m_2,m_3$ }＝{5,4,3}； $M=m_1\ m_2\ m_3$＝60；

{ $M_1,M_2,M_3$ }＝{ $M/m_1,M/m_2,M/m_3$ }＝{12,15,20}；

12/5 的连分数为[ $q_0,q_1,q_2,\cdots\cdots,q_k$ ]＝[2,2,2]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix}-q_i & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-12 & 5\\ 5 & -2\end{bmatrix}$，取 $x_1=-2$；

15/4 的连分数为[ $q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k$ ]＝[3,1,3]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix}-q_i & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-15 & 4\\ 4 & -1\end{bmatrix}$，取 $x_2=-1$；

20/3 的连分数为[ $q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k$ ]＝[6,1,2]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix}-q_i & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-20 & 7\\ 3 & -1\end{bmatrix}$，取 $x_3=-1$；

因为{ $a_1, a_2, a_3$ }＝{0,3,1}，于是

$$N^{/}\equiv\sum_{i=1}^{n}M_i\ \ x_i\ a_i\,(\mathrm{mod}\,M\ )\equiv 55(\mathrm{mod}60)$$

取 $N=60N^{/}=60\times55=3300$ 即可。

**第 07 题：程行相及**

问：有急足三名，甲日行三百里，乙日行二百五十里，丙日行二百里。先差丙往他处下文字，既两日，又有文字遣乙追付，已半日，复有文字续令甲赶付乙。三人偶不相及，乃同时俱至彼所。先欲知乙果及丙、甲果及乙得日并里，次欲知彼处去此里数各几何？

【编者注：此题题设有误，[清]黄宗宪，四库馆案均有指出；王守义也作修改。

本文不做考证，也不理会此类问题，只取其中数据构造相应的例题说明相关方法即可。此题为求 $N\equiv0(\mathrm{mod}\,m_1)$，$N\equiv0(\mathrm{mod}\,m_2)$，$N\equiv0(\mathrm{mod}\,m_3)$题型，直接求最小公倍数即可，无需大动干戈。】

【大衍矩阵解法】

依题意可列出同余方程：$\begin{cases}N\equiv0(\mathrm{mod}\,300)\\ N\equiv0(\mathrm{mod}\,250)\\ N\equiv0(\mathrm{mod}\,200)\end{cases}$，求 $N$；

【解】用短除法：$\begin{array}{r|l}50 & 300,250,200\\ \hline 2 & 6,5,4\\ \hline & 3,5,2\end{array}$，

其中总等 $D=50$ 满足条件：$a/D\equiv b/D\ \ (\mathrm{mod}\,m_i/D)$（其中 $i=1,2,\cdots\cdots,n$ ）；

因此确定单位数为 $D=50$；

原问题转化为$\begin{cases} N' \equiv 0 \pmod 3 \\ N' \equiv 0 \pmod 5 \\ N' \equiv 0 \pmod 4 \end{cases}$

$\{m_1, m_2, m_3\}$＝{3,5,4}； $M = m_1 m_2 m_3$＝60；

$\{M_1, M_2, M_3\}$＝$\{M/m_1, M/m_2, M/m_3\}$＝{20,12,15}；

20/3 的连分数为$[q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k]$＝[6,1,2]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix} -q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & 7 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$，取 $x_1$＝－1；

12/5 的连分数为$[q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k]$＝[2,2,2]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix} -q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 5 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$，取 $x_2$＝－2；

15/4 的连分数为$[q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k]$＝[3,1,3]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix} -q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$，取 $x_3$＝－1；

因为$\{a_1, a_2, a_3\}$＝{0,0,0}，于是

$$N' \equiv \sum_{i=1}^{n} M_i \ x_i \ a_i \pmod M \equiv 0 \pmod{60}$$

取 $N$＝50 $N'$＝3000 即可。

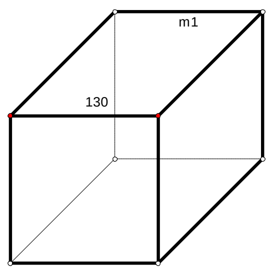
【说明：此题可直接取 $N$＝50 $M$ 。】

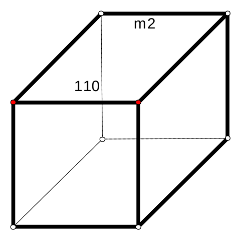
**第 08 题：积尺寻源**

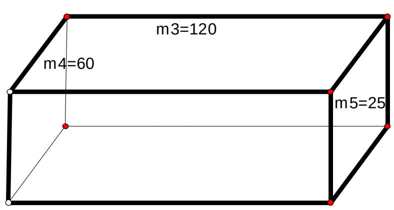
问：欲砌基一段，见管大小方砖六门，城砖四色。令匠取便，或平或侧，只用一色砖砌，须要适足。匠以砖量地计料，称用大方料，广多六寸，深少六寸；用小方，广多二寸，深少三寸；用城砖，长广多三寸，深少一寸；以阔深少一寸，广多三寸；以厚广多五分，深多一寸；用六门砖，长广多三寸，深多一寸；以阔广多三寸，深多一寸；以厚广多一寸，深多一寸；皆不匼（kē）匝，未免修破砖料稗补。其四色砖，大方方一尺三寸，小方方一尺一寸，城砖长一尺二寸，阔六寸，厚二寸五分；六门砖长一尺，阔五寸，厚二寸。欲知基深广几何？

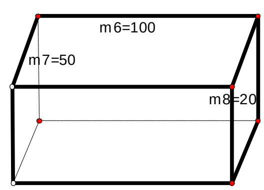
| | 尺寸分 | |
|---|---|---|
| 金 $m_1$ | 130 | 大方 |
| 石 $m_3$ | 120 | 城砖长 |

| | | |
|---|---|---|
| 丝 $m_2$ | 110 | 小方 |
| 竹 $m_6$ | 100 | 六门长 |
| 匏 $m_4$ | 60 | 城砖阔 |
| 土 $m_7$ | 50 | 六门阔 |
| 革 $m_5$ | 25 | 城砖厚 |
| 木 $m_8$ | 20 | 六门厚 |
| | 问数 | |




【大衍矩阵解法】

依题意可列出同余方程：$\begin{cases} N \equiv a_1 (\bmod 130) \\ N \equiv a_2 (\bmod 120) \\ N \equiv a_3 (\bmod 110) \\ N \equiv a_4 (\bmod 100) \\ N \equiv a_5 (\bmod 60) \\ N \equiv a_6 (\bmod 50) \\ N \equiv a_7 (\bmod 25) \\ N \equiv a_8 (\bmod 20) \end{cases}$，

(1)当$\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}=\{60,30,20,30,30,30,5,10\}$时，求$N$；

(2)当$\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}=\{70,110,80,10,50,10,10,10\}$时，求$N$；

【保留单位解法】用短除法：
$$\begin{array}{l|l}
5 & 130,120,110,100,60,50,25,20 \\
5 & 26,24,22,20,12,10,5,4 \\
2 & 26,24,22,4,12,2,1,4 \\
2 & 13,12,11,2,6,1,1,2 \\
3 & 13,6,11,1,3,1,1,1 \\
 & 13,2,11,1,1,1,1,1
\end{array}$$，

其中总等 $D$＝5 满足条件：$a/D \equiv b/D \pmod{m_i/D}$（其中 $i$＝1,2,⋯⋯,$n$）；

因此确定单位数为 $D$＝5，不过，我们保留单位，加入 $m_7$ 中；

原问题转化为
$$\begin{cases}
N' \equiv a_1 \pmod{13} \\
N' \equiv a_2 \pmod{8} \\
N' \equiv a_3 \pmod{11} \\
N' \equiv a_4 \pmod{1} \\
N' \equiv a_5 \pmod{3} \\
N' \equiv a_6 \pmod{1} \\
N' \equiv a_7 \pmod{25} \\
N' \equiv a_8 \pmod{1}
\end{cases}$$；

{$m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8$}＝{13,8,11,1,3,1,25,1}；

$M = m_1\, m_2\, m_3\, m_4\, m_5\, m_6\, m_7\, m_8$＝85800；

{$M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7, M_8$}

＝{$M/m_1, M/m_2, M/m_3, M/m_4, M/m_5, M/m_6, M/m_7, M/m_8$}

＝{6600,10725,7800, 85800,28600, 85800,3432, 85800}；

显然，$x_4 = x_6 = x_8$＝0；此外，

6600/13 的连分数为[$q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k$]＝[507,1,2,4]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix} -q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6600 & -1523 \\ -13 & 3 \end{bmatrix}$，取 $x_1$＝3；

10725/8 的连分数为[$q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k$]＝[1340,1,1,1,2]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix} -q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10725 & 4022 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$，取 $x_2$＝−3；

7800/11 的连分数为[$q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k$]＝[709,11]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix}-q_i & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7800 & -709\\ -11 & 1\end{bmatrix}$，取 $x_3=1$；

28600/3 的连分数为$[q_0,q_1,q_2,\cdots\cdots,q_k]$=[9533,3]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix}-q_i & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}28600 & -9533\\ -3 & 1\end{bmatrix}$，取 $x_5=1$；

3432/25 的连分数为$[q_0,q_1,q_2,\cdots\cdots,q_k]$=[137,3,1,1,3]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix}-q_i & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3432 & 961\\ 25 & -7\end{bmatrix}$，取 $x_7=-7$；

(1)当$\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8\}=\{60,30,20,30,30,30,5,10\}$时，

取 $N=N'\equiv\sum_{i=1}^{n}M_i\ \ x_i\ a_i\ (\bmod M)\equiv1230(\bmod 85800)$即可。

(2)当$\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8\}=\{70,110,80,10,50,10,10,10\}$时，

取 $N=N'\equiv\sum_{i=1}^{n}M_i\ \ x_i\ a_i\ (\bmod M)\equiv3710(\bmod 85800)$即可。

【去单位解法】用短除法：
$$\begin{array}{l|l}
5 & 130,120,110,100,60,50,25,20\\
5 & 26,24,22,20,12,10,5,4\\
2 & 26,24,22,4,12,2,1,4\\
2 & 13,12,11,2,6,1,1,2\\
3 & 13,6,11,1,3,1,1,1\\
 & 13,2,11,1,1,1,1,1
\end{array}$$，

其中总等$D=5$满足条件：$a/D\equiv b/D\ \ (\bmod m_i/D)$（其中$i=1,2,\cdots\cdots,n$）；

因此确定单位数为$D=5$；

原问题转化为$\begin{cases}N'\equiv a_1/5(\bmod 13)\\ N'\equiv a_2/5(\bmod 8)\\ N'\equiv a_3/5(\bmod 11)\\ N'\equiv a_4/5(\bmod 1)\\ N'\equiv a_5/5(\bmod 3)\\ N'\equiv a_6/5(\bmod 1)\\ N'\equiv a_7/5(\bmod 5)\\ N'\equiv a_8/5(\bmod 1)\end{cases}$；

$\{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8\}$＝{13,8,11,1,3,1,5,1}；

$M = m_1\ m_2\ m_3\ m_4\ m_5\ m_6\ m_7\ m_8$＝17160；

$\{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7, M_8\}$

$=\{M/m_1, M/m_2, M/m_3, M/m_4, M/m_5, M/m_6, M/m_7, M/m_8\}$

＝{1320,2145,1560,17160,5720,17160,3432,17160}；

显然，$x_4 = x_6 = x_8 = 0$；此外，

1320/13 的连分数为$[q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k]$＝[101,1,1,6]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix}-q_i & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1320 & -203\\ -13 & 2\end{bmatrix}$，取 $x_1 = 2$；

2145/8 的连分数为$[q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k]$＝[268,8]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix}-q_i & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2145 & -268\\ -8 & 1\end{bmatrix}$，取 $x_2 = 1$；

1560/11 的连分数为$[q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k]$＝[141,1,4,2]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix}-q_i & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1560 & -709\\ -11 & 5\end{bmatrix}$，取 $x_3 = 5$；

5720/3 的连分数为$[q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k]$＝[1906,1,2]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix}-q_i & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5720 & 1907\\ 3 & -1\end{bmatrix}$，取 $x_5 = -1$；

3432/5 的连分数为$[q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k]$＝[686,2,2]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix}-q_i & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3432 & 1373\\ 5 & -2\end{bmatrix}$，取 $x_7 = -2$；

(1)当$\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$＝{12,6,4,6,6,6,1,2}时，

$$N' \equiv \sum_{i=1}^{n} M_i\ x_i\ a_i \pmod{M} \equiv 246 \pmod{17160}$$

取 $N = 5N' \equiv 1230 \pmod{85800}$ 即可。

(2)当$\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$＝{14,22,16,2,10,2,2,2}时，

$$N' \equiv \sum_{i=1}^{n} M_i \ x_i \ a_i \pmod{M} \equiv 742 \pmod{17160}$$

取 $N = 5N' \equiv 3710 \pmod{85800}$ 即可。

**第 09 题：余米推数**

问：有米铺，诉被盗去米，一般三箩，皆适满，不记细数。今左壁箩剩一合，中壁箩剩一升四合，右壁箩剩一合。后获贼，系甲乙丙三名。甲称当夜摸得马杓，在左壁箩满舀入布袋；乙称踢着木履，在中壁箩舀入袋；丙称摸得漆碗，在右壁箩舀入袋。将归食用，日久不知其数。索到三器，马杓满容一升九合，木履容一升七合，漆碗容一升二合。欲知所失米数，计脏结断，三盗各几何？

【大衍矩阵解法】

依题意可列出同余方程：$\begin{cases} N \equiv 1 \pmod{19} \\ N \equiv 14 \pmod{17} \\ N \equiv 1 \pmod{12} \end{cases}$，求 $N$；

【解】用短除法：$1 \underline{\big| 19,17,12}$ $\quad 19,17,12$，因此确定单位数为 $D=1$；原问题无需转化。

$\{m_1, m_2, m_3\} = \{19,17,12\}$； $M = m_1 m_2 m_3 = 3876$；

$\{M_1, M_2, M_3\} = \{M/m_1, M/m_2, M/m_3\} = \{204,228,323\}$；

204/19 的连分数为 $[q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k] = [10,1,2,1,4]$，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k} \begin{bmatrix} -q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -204 & 43 \\ 19 & -4 \end{bmatrix}$，取 $x_1 = -4$；

228/17 的连分数为 $[q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k] = [13,2,2,3]$，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k} \begin{bmatrix} -q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 228 & -67 \\ -17 & 5 \end{bmatrix}$，取 $x_2 = 5$；

323/12 的连分数为 $[q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k] = [26,1,11]$，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k} \begin{bmatrix} -q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -323 & 27 \\ 12 & -1 \end{bmatrix}$，取 $x_3 = -1$；

因为 $\{a_1, a_2, a_3\} = \{1,14,1\}$，于是

取 $N = N' \equiv \sum_{i=1}^{n} M_i \ x_i \ a_i \pmod{M} \equiv 3193 \pmod{3876}$ 即可。

# 张敦仁《求一算术》中的大衍类问题（四题）

**第 01 题：**今有乾，坎，艮，震，巽，离，坤，兑八库储银相等，听乾，坎，艮，震，巽，离，坤，兑八项人各于当库支用（如乾项人于乾库支用；坎项人于坎库支用是也）。乾每次支银 10 两，坎每次支银 20 两，艮每次支银 30 两，震每次支银 40 两，巽每次支银 50 两，离每次支银 60 两，坤每次支银 70 两，兑每次支银 80 两。今各不记支用次数，但查验余银。乾库余 9 两，坎库余 19 两，艮库余 19 两，震库余 19 两，巽库余 9 两，离库余 19 两，坤库余 69 两，兑库余 59 两；问：八库储银数，及八项人各支用次数几何。

答曰：每库储银 6859 两；

乾支过 685 次；坎支过 342 次；艮支过 228 次；震支过 171 次；

巽支过 137 次；离支过 114 次；坤支过 97 次；兑支过 85 次；

【大衍矩阵解法】

原题主要数据：

| | 元数 | 定母 | 支用余数 | 支用次数 |
|---|---|---|---|---|
| 乾 | 10 | 1 | 9 | 685 |
| 坎 | 20 | 1 | 19 | 342 |
| 艮 | 30 | 1 | 19 | 228 |
| 震 | 40 | 1 | 19 | 171 |
| 巽 | 50 | 1（25） | 9 | 137 |
| 离 | 60 | 3 | 19 | 114 |
| 坤 | 70 | 7 | 69 | 97 |
| 兑 | 80 | 400（16） | 59 | 85 |

{10,20,30,40,50,60,70,80},{9,19,19,19,9,19,69,59}

【解法一，转化为四个定母】

| | 定母 | 定母 | 余数 | 乘率 |
|---|---|---|---|---|
| 巽 | 50 | 25 | 9 | 25－9 |
| 离 | 60 | 3 | 19 | 1 |
| 坤 | 70 | 7 | 69 | 7－2 |
| 兑 | 80 | 16 | 59 | 5 |

已知：$\begin{cases} N \equiv 9 (\bmod 10) \\ N \equiv 19 (\bmod 20) \\ N \equiv 19 (\bmod 30) \\ N \equiv 19 (\bmod 40) \\ N \equiv 9 (\bmod 50) \\ N \equiv 19 (\bmod 60) \\ N \equiv 69 (\bmod 70) \\ N \equiv 59 (\bmod 80) \end{cases}$，求 $N$；

$$\begin{array}{r|l} 10 & 10,20,30,40,50,60,70,80 \\ \hline 2 & 1,2,3,4,5,6,7,8 \\ \hline 2 & 1,1,3,2,5,3,7,4 \\ \hline 3 & 1,1,3,1,5,3,7,2 \\ \hline & 1,1,1,1,5,1,7,2 \end{array}$$

用短除法：（见上），

其中总等$D$＝10 不满足条件：$a/D \equiv b/D \pmod{m_i/D}$（其中$i$＝1,2,……,$n$）；

故本题没有单位数，总等$D$＝10 的因子拆分后分配给相应的定母$m_5$和$m_8$。

原问题转化为
$$\begin{cases} N' \equiv 9 \pmod{1} \\ N' \equiv 19 \pmod{1} \\ N' \equiv 19 \pmod{1} \\ N' \equiv 19 \pmod{1} \\ N' \equiv 9 \pmod{25} \\ N' \equiv 19 \pmod{3} \\ N' \equiv 69 \pmod{7} \\ N' \equiv 59 \pmod{16} \end{cases}$$
；

$\{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8\}$＝{1,1,1,1,25,3,7,16}；

$M = m_1 m_2 m_3 m_4 m_5 m_6 m_7 m_8$＝8400；

$\{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7, M_8\}$

＝$\{M/m_1, M/m_2, M/m_3, M/m_4, M/m_5, M/m_6, M/m_7, M/m_8\}$

＝{8400,8400,8400,8400,336,2800,1200,525}；

显然，$x_1 = x_2 = x_3 = x_4$＝0；此外，

336/25 的连分数为$[q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k]$＝[13,2,3,1,2]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix} -q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -336 & 121 \\ 25 & -9 \end{bmatrix}$，取$x_5$＝－9；

2800/3 的连分数为$[q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k]$＝[933,3]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix} -q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2800 & -933 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$，取$x_6$＝1；

1200/7 的连分数为$[q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k]$＝[171,2,3]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix}-q_i & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1200 & 343\\ 7 & -2\end{bmatrix}$，取 $x_7$＝－2；

525/16 的连分数为$[q_0,q_1,q_2,\cdots\cdots,q_k]$＝[32,1,4,3]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix}-q_i & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}525 & -164\\ -16 & 5\end{bmatrix}$，取 $x_8$＝5；

取 $N=N' \equiv \sum_{i=1}^{n} M_i\ \ x_i\ a_i\,(\mathrm{mod}\,M)$≡6859(mod8400) 即可。

【解法二，转化为三个定母】

| | 元数 | 定母 | 余数 | 乘率 |
|---|---|---|---|---|
| 离 | 60 | 3 | 19 | 1 |
| 坤 | 70 | 7 | 69 | 7－2 |
| 兑 | 80 | 400 | 59 | 400－19 |

用短除法：
$$\begin{array}{r|l} 10 & 10,20,30,40,50,60,70,80\\ \hline 2 & 1,2,3,4,5,6,7,8\\ \hline 2 & 1,1,3,2,5,3,7,4\\ \hline 3 & 1,1,3,1,5,3,7,2\\ \hline & 1,1,1,1,5,1,7,2 \end{array}$$
，

其中总等 $D$＝10 不满足条件：$a/D\equiv b/D\ \ (\mathrm{mod}\,m_i/D)$（其中 $i$＝1,2,⋯⋯, $n$）；

故本题没有单位数，总等 $D$＝10 的因子拆分后分配给相应的定母 $m_5$ 和 $m_8$。

原问题转化为
$$\begin{cases} N'\equiv 9(\mathrm{mod}\,1)\\ N'\equiv 19(\mathrm{mod}\,1)\\ N'\equiv 19(\mathrm{mod}\,1)\\ N'\equiv 19(\mathrm{mod}\,1)\\ N'\equiv 9(\mathrm{mod}\,1)\\ N'\equiv 19(\mathrm{mod}\,3)\\ N'\equiv 69(\mathrm{mod}\,7)\\ N'\equiv 59(\mathrm{mod}\,400) \end{cases}$$
；

$\{m_1,m_2,m_3,m_4,m_5,m_6,m_7,m_8\}$＝{1,1,1,1,1,3,7,400}；

$M=m_1\ m_2\ m_3\ m_4\ m_5\ m_6\ m_7\ m_8$＝8400；

$\{M_1,M_2,M_3,M_4,M_5,M_6,M_7,M_8\}$

＝$\{M/m_1,M/m_2,M/m_3,M/m_4,M/m_5,M/m_6,M/m_7,M/m_8\}$

＝{8400,8400,8400,8400,8400,2800,1200,21}；

显然，$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$＝0；此外，

2800/3 的连分数为$[q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k]$＝[933,3]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix} -q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2800 & -933 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$，取 $x_6$＝1；

1200/7 的连分数为$[q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k]$＝[171,2,3]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix} -q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1200 & 343 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$，取 $x_7$＝－2；

21/400 的连分数为$[q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k]$＝[0,19,21]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix} -q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21 & 1 \\ 400 & -19 \end{bmatrix}$，取 $x_8$＝－19；

取 $N = N' \equiv \sum_{i=1}^{n} M_i \; x_i \; a_i \pmod{M} \equiv 6859 \pmod{8400}$ 即可。

**第 02 题：**今有江宁府差人进京，先差甲，次差乙，次差丙。各于差日黎明起行。甲日行 178 里，乙日行 224 里，丙日行 300 里。甲、乙、丙三人同于本月十五日到京，其十四日抵幕宿店，各离京远近不等：甲宿处离京 58 里，乙宿处离京 86 里，丙宿处离京 150 里。问：江宁府距京师里数，并甲、乙、丙每人所行日数，及何日自江宁起行。

答曰：江宁府距京师 2550 里；

甲行 14 日 89 分日之 29；于初一日起行；

乙行 11 日 112 分日之 43；于初四日起行；

丙行 8 日半；于初七日起行；

【大衍矩阵解法】

原题主要数据：

| | 元数 | 定母 | 余数 | 乘率 |
|---|---|---|---|---|
| 甲 | 178 | 89 | 58 | 72 |
| 乙 | 224 | 224 | 86 | 219 |
| 丙 | 300 | 75 | 150 | 16 |

置总数 2550 为三位，以甲、乙、丙每人日行里数除之，不尽部分与日行里数求等，并约去等，即得分日之数。现将甲、乙、丙每人所行日数，及何日自江宁起行，列表如下：

| | 日行 | 所行日数 | 起行日 |
|---|---|---|---|
| 甲 | 178 | $14\frac{58}{178} = 14\frac{29}{89}$ | 15－14＝1<br>初一 |
| 乙 | 224 | $11\frac{86}{224} = 11\frac{43}{112}$ | 15－11＝4<br>初四 |
| 丙 | 300 | $8\frac{1}{2}$ | 15－8＝7<br>初七 |

亦即：甲行 14 日 89 分日之 29；于初一日起行；乙行 11 日 112 分日之 43；于初四日起行；丙行 8 日半；于初七日起行；合问。

【大衍矩阵解法】

{178,224,300},{58,86,150}

已知：$\begin{cases} N \equiv 58 \pmod{178} \\ N \equiv 86 \pmod{224} \\ N \equiv 150 \pmod{300} \end{cases}$，求 $N$；

【解】用短除法：$\begin{array}{r|l} 2 & 178,224,300 \\ \hline 2 & 89,112,150 \\ \hline & 89,56,75 \end{array}$，

其中总等 $D=2$ 满足条件：$a/D \equiv b/D \pmod{m_i/D}$（其中 $i=1,2,\cdots\cdots,n$）；

因此确定单位数为 $D=2$；

原问题转化为 $\begin{cases} N' \equiv 29 \pmod{89} \\ N' \equiv 43 \pmod{112} \\ N' \equiv 75 \pmod{75} \end{cases}$

$\{m_1, m_2, m_3\}=\{89,112,75\}$； $M=m_1\ m_2\ m_3=747600$；

$\{M_1, M_2, M_3\}=\{M/m_1, M/m_2, M/m_3\}=\{8400,6675,9968\}$；

8400/89 的连分数为 $[q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k]=[94,2,1,1,1,1,1,1,2]$，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix} -q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -8400 & 3209 \\ 89 & -34 \end{bmatrix}$，取 $x_1=-34$；

6675/112 的连分数为 $[q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k]=[59,1,1,2,22]$，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix} -q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -6675 & 298 \\ 112 & -5 \end{bmatrix}$，取 $x_2=-5$；

9968/75 的连分数为 $[q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k]=[132,1,9,1,2,2]$，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix} -q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9968 & -4253 \\ -75 & 32 \end{bmatrix}$，取 $x_3=32$；

因为 $\{a_1, a_2, a_3\}=\{29,43,75\}$，于是

$$N' \equiv \sum_{i=1}^{n} M_i\ x_i\ a_i \pmod{M} \equiv 1275 \pmod{747600}$$

取 $N=2N'=2550$ 即可。

**第 03 题：**今有和、丰、永、盈四字号厫（άo，粮仓）存米相等，每厫各设臼（jiù）舂（chōng）米。和字厫设臼 6 只，每臼容米 5 斗 7 升 7 合；丰字厫设臼 7 只，每臼容米 5 斗 5 升 4 合；永字厫设臼 8 只，每臼容米 4 斗 9 升 6 合；盈字厫设臼 9 只，每臼容米 4 斗 4 升 8 合。各厫每臼用舂夫一名，舂夫每名每日舂米二臼。四厫同日开舂，各于每日清晨在厫取一日应舂米。今盘验余米：和字号余 16 石 9 斗 1 升 2 合；丰字号余 6 石 9 斗 2 升 8 合；永字号余 4 石 7 斗 6 升 8 合；盈字号余 3 石 2 斗 3 升 2 合。问：各厫共米，及舂过米数，臼数，日数各几何。

答曰：共米 100 石；

和舂过米 83 石 8 升 8 合，合计 144 臼，12 日；

丰舂过米 93 石 7 升 2 合，合计 168 臼，12 日；

永舂过米 95 石 2 斗 3 升 2 合，合计 192 臼，12 日；

盈舂过米 96 石 7 斗 6 升 8 合，合计 216 臼，12 日；

【大衍矩阵解法】

原题主要数据：

| | 元数 | 定母 | 余数 | 乘率 |
|---|---|---|---|---|
| 和 | 577 | 577 | 16912 | 217 |
| 丰 | 554 | 277 | 6928 | 58 |
| 永 | 496 | 31 | 4768 | 6 |
| 盈 | 448 | 448 | 3232 | 99 |

已知：$\begin{cases} N \equiv 16912 (\mathrm{mod}\, 577) \\ N \equiv 6928 (\mathrm{mod}\, 554) \\ N \equiv 4768 (\mathrm{mod}\, 496) \\ N \equiv 3232 (\mathrm{mod}\, 448) \end{cases}$，求 $N$；

【解】用短除法：$\begin{array}{r|l} 2 & 577,554,496,448 \\ \hline 8 & 577,277,248,224 \\ \hline & 577,277,31,28 \end{array}$，因此确定单位数为 $D$＝1，

原问题转化为$\begin{cases} N' \equiv 16912 (\mathrm{mod}\, 577) \\ N' \equiv 6928 (\mathrm{mod}\, 277) \\ N' \equiv 4768 (\mathrm{mod}\, 31) \\ N' \equiv 3232 (\mathrm{mod}\, 448) \end{cases}$

$\{m_1, m_2, m_3, m_4\}$＝{577,277,31,448}； $M = m_1 m_2 m_3 m_4$＝2219705152；

$\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$＝$\{M/m_1, M/m_2, M/m_3, M/m_4\}$

＝{3846976,8013376,71603392,4954699}；

3846976/577 的连分数为$[q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k]$＝[6667,4,1,13,1,1,1,2]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix}-q_i & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3846976 & -1446783\\ -577 & 217\end{bmatrix}$，取 $x_1=217$；

8013376/277 的连分数为$[q_0,q_1,q_2,\cdots\cdots,q_k]$=[28929,6,2,3,1,4]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix}-q_i & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8013376 & -1677891\\ -277 & 58\end{bmatrix}$，取 $x_2=58$；

71603392/31 的连分数为$[q_0,q_1,q_2,\cdots\cdots,q_k]$=[2309786,1,5,5]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix}-q_i & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}71603392 & -13858721\\ -31 & 6\end{bmatrix}$，取 $x_3=6$；

4954699/448 的连分数为$[q_0,q_1,q_2,\cdots\cdots,q_k]$=[11059,1,1,2,9,1,1,4]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix}-q_i & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4954699 & -1094900\\ -448 & 99\end{bmatrix}$，取 $x_4=99$；

因为$\{a_1,a_2,a_3,a_4\}=\{16912,6928,4768,3232\}$，于是

取 $N=N'\equiv\sum_{i=1}^{n}M_i\ x_i\ a_i\pmod{M}\equiv 100000\pmod{2219705152}$ 即可。

**第 04 题：**今有后汉“四分术”，木日率 4725，火日率 1876，土日率 9415，金日率 4661，水日率 1889。熹平三年甲寅（公元 174 年），木日率余 5，火日率余 75，土日率余 40，金日率余 133，水日率余 10（此各日率所余，即是置上元尽熹平三年积算，以各日率除去所余之数），问：上元以来，尽熹平三年甲寅，积岁几何，及上元太岁所在（此题录自《求一算术》张敦仁，《续修四库全书》1045.子部.天文算法类（数学），197 页。上海古籍出版社，2002 年 4 月）。

答曰：积 9455 岁；上元太岁在庚辰。

【大衍矩阵解法】

原题主要数据：

| | 元数 | 定母 | 余数 | 乘率 |
|---|---|---|---|---|
| 木 | 4725 | 675 | 5 | 551 |
| 火 | 1876 | 1876 | 75 | 655 |
| 土 | 9415 | 269 | 40 | 186 |
| 金 | 4661 | 4661 | 133 | 1237 |
| 水 | 1889 | 1889 | 10 | 1658 |

已知：$\begin{cases} N \equiv a_1 (\bmod 4725) \\ N \equiv a_2 (\bmod 1876) \\ N \equiv a_3 (\bmod 9415) \\ N \equiv a_4 (\bmod 4661) \\ N \equiv a_5 (\bmod 1889) \end{cases}$，

当{ $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ }={5,75,40,133,10}时，求 $N$；

【解法】用短除法：$\begin{array}{r|l} 5 & \underline{4725,1876,9415,4661,1889} \\ 7 & \underline{945,1876,1883,4661,1889} \\ & 135,268,269,4661,1889 \end{array}$，

因此确定单位数为 $D$＝1；

原问题转化为 $\begin{cases} N' \equiv a_1 (\bmod 4725) \\ N' \equiv a_2 (\bmod 268) \\ N' \equiv a_3 (\bmod 269) \\ N' \equiv a_4 (\bmod 4661) \\ N' \equiv a_5 (\bmod 1889) \end{cases}$；

{ $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5$ }={4725,268,269,4661,1889}；

$M = m_1 m_2 m_3 m_4 m_5$ ＝2999162158026300；

{ $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5$ }={ $M/m_1, M/m_2, M/m_3, M/m_4, M/m_5$ }

＝{634743313868,11190903574725,11149301702700,643458948300,1587698336700}；

显然，

634743313868/4725 的连分数为[ $q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k$ ]＝[134337209,3,1,1,13,4,1,9]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k} \begin{bmatrix} -q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 634743313868 & -64750534875 \\ -4725 & 482 \end{bmatrix}$，取 $x_1$＝482；

11190903574725/268 的连分数为[ $q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k$ ]＝[41757102890,1,3,3,1,15]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k} \begin{bmatrix} -q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11190903574725 & -709870749143 \\ -268 & 17 \end{bmatrix}$，取 $x_2$＝17；

11149301702700/269 的连分数为[ $q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k$ ]＝[41447218225,1,1,1,6,4,3]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k} \begin{bmatrix} -q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11149301702700 & 3440119112729 \\ 269 & -83 \end{bmatrix}$，取 $x_3$＝－83；

643458948300/4661 的连分数为[ $q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k$ ]＝[138051694,1,1,4,2,4,3,3,1,3]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix}-q_i & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}643458948300 & -170769946159\\ -4661 & 1237\end{bmatrix}$，取 $x_5=1237$；

1587698336700/1889 的连分数为$[q_0,q_1,q_2,\cdots\cdots,q_k]$＝[840496737,3,1,2,1,1,1,5,8]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix}-q_i & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1587698336700 & 194154746309\\ 1889 & -231\end{bmatrix}$，取 $x_7=-231$；

当$\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$＝{5,75,40,133,10}时，

取 $N=N'\equiv\sum_{i=1}^{n}M_i\ \ x_i\ a_i\ (\mathrm{mod}\,M)$

＝80977378266719555≡9455(mod2999162158026300)即可。

# 第七章 演纪类问题

关于中国古代历法中的“演纪上元积年”问题，我并没有深入地研究，就不班门弄斧了，请读者参考下列资料：

《中国古代历法》张培瑜，陈美东，薄树人，胡钦珠著，中国科学技术出版社，2008年第一版；

《算法的源流：东方古典数学的特征》李继闵，科学出版社，2007年第一版；

《古代历法计算法》刘洪涛，南开大学出版社，2003年第一版；

《中国历法与数学》曲安京，科学出版社，2005年第一版；

《中国古代数理与天文学探析》纪志刚，曲安京，王荣彬，1994年

这些资料都是非常好的，值得参考，学习。

本人不才，无法完整地给出演纪术的全部答案，就只能给出与“大衍求一术”相关的解题过程，而且也只给出演纪上元积年的结果，以符本书主旨。

其次，这里的计算需要用到六十甲子顺序，我们认识一下六十甲子顺序：

| 01~10 | 11~20 | 21~30 | 31~40 | 41~50 | 51~60 |
|---|---|---|---|---|---|
| 01 甲子 | 11 甲戌 | 21 甲申 | 31 甲午 | 41 甲辰 | 51 甲寅 |
| 02 乙丑 | 12 乙亥 | 22 乙酉 | 32 乙未 | 42 乙巳 | 52 乙卯 |
| 03 丙寅 | 13 丙子 | 23 丙戌 | 33 丙申 | 43 丙午 | 53 丙辰 |
| 04 丁卯 | 14 丁丑 | 24 丁亥 | 34 丁酉 | 44 丁未 | 54 丁巳 |
| 05 戊辰 | 15 戊寅 | 25 戊子 | 35 戊戌 | 45 戊申 | 55 戊午 |
| 06 己巳 | 16 己卯 | 26 己丑 | 36 己亥 | 46 己酉 | 56 己未 |
| 07 庚午 | 17 庚辰 | 27 庚寅 | 37 庚子 | 47 庚戌 | 57 庚申 |
| 08 辛未 | 18 辛巳 | 28 辛卯 | 38 辛丑 | 48 辛亥 | 58 辛酉 |
| 09 壬申 | 19 壬午 | 29 壬辰 | 39 壬寅 | 49 壬子 | 59 壬戌 |
| 10 癸酉 | 20 癸未 | 30 癸巳 | 40 癸卯 | 50 癸丑 | 60 癸亥 |

## 秦九韶《数书九章》中的演纪类问题（一题）

### 第 12 题：治历演纪

问开禧历，积年七百八十四万八千一百八十三，欲知推演之原，调日法，求朔余，朔率，斗分，岁率，岁闰，入元岁，入闰，朔定骨，闰泛骨，闰缩，纪率，气元率，元闰，元数，及气等率，因率，蕾率，朔等数，因数，蕾数，朔积年，二十三事，各几何？

答曰：积年，七百八十四万八千一百八十三；

【解】依题意得 $\begin{cases} 6172608N \equiv 193440 (\bmod 60\times 16900) \\ 6172608N \equiv 163771 (\bmod 499067) \end{cases}$

由于(6172608,193440,1014000)＝624，(6172608,163771,499067)＝1，

因此原问题转化为：

$$\begin{cases} 9892N \equiv 310 (\bmod 1625) \\ 6172608N \equiv 163771 (\bmod 499067) \end{cases}$$

我们用大衍求一术消去 $N$ 的系数：

9892/1625 的连分数为$[q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k]$＝[6,11,2,3,1,15]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix}-q_i & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9892 & -627\\ -1625 & 103\end{bmatrix}$，于是 9892×103≡1(mod1625)；

6172608/499067 的连分数为[$q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k$]=[12,2,1,2,1,1,21,2,3,1,1,3,1,4,1,2]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix}-q_i & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6172608 & -2183437\\ -499067 & 176535\end{bmatrix}$，

于是 6172608×176535≡1(mod499067)；

于是原问题进一步转化为：

$$\begin{cases}N\equiv 103\times 310(\mathrm{mod}\,1625)\\ N\equiv 176535\times 163771(\mathrm{mod}\,499067)\end{cases}$$

亦即：$\begin{cases}N\equiv 1055(\mathrm{mod}\,1625)\\ N\equiv 362175(\mathrm{mod}\,499067)\end{cases}$

用短除法：$\begin{array}{r|l}1 & 1625,499067\\ \hline & 1625,499067\end{array}$，因此确定单位数为 $D$＝1；

{$m_1, m_2$}={1625,499067}；$M = m_1\ m_2$＝810983875；

{$M_1, M_2$}={$M/m_1, M/m_2$}={499067,1625}；

499067/1625 的连分数为[$q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k$]=[307,8,2,6,2,1,4]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix}-q_i & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-499067 & 106570\\ 1625 & -347\end{bmatrix}$，取 $x_1$＝－347；

1625/499067 的连分数为[$q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k$]=[0,307,8,2,6,2,1,4]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix}-q_i & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1625 & -347\\ -499067 & 106570\end{bmatrix}$，取 $x_2$＝106570；

因为{$a_1, a_2$}={1055,362175}，于是

取 $N = N' \equiv \sum_{i=1}^{n} M_i\ \ x_i\ a_i\,(\mathrm{mod}\,M\,)$≡7848180(mod 810983875)即可。

【说明：秦九韶《数书九章》之“大衍类”题实为 10 题，惟“治历演纪”一题没有用“大衍求一术”解决，甚为遗憾。究其原因，应该是 $N$ 的系数不为 1 所致；又或者是本题只涉及两个同余方程，完全可以直接按照二元一次方程的办法处理，这与前面的 9 题不相同，因此，对“治历演纪”一题秦九韶才没有用“大衍求一术”解决。为了说明“大衍求一术”的功力，特给出解题过程如上，以资参考。】

**【补充例题】**

秦九韶《数书九章》的“02 古历会积”和“12 治历演纪”虽然都是分数模的例子，但是过于特殊，难以说明规律。为了说明这种情形，我们补充下面的例子：

已知：$\begin{cases} N \equiv 5 (\bmod 8\frac{1}{7}) \\ N \equiv 3 (\bmod 7\frac{1}{10}) \\ N \equiv 2 (\bmod 3) \end{cases}$，求 $N$；

【解】用短除法：$\begin{array}{r|l} \frac{1}{70} & 8\frac{1}{7}, 7\frac{1}{10}, 3 \\ \hline 10 & 570, 497, 210 \\ \hline 7 & 57, 497, 21 \\ \hline 3 & 57, 71, 3 \\ \hline & 17, 71, 1 \end{array}$，

其中总等 $D$＝1/70 满足条件：$a/D \equiv b/D \pmod{m_i/D}$（其中 $i$＝1,2,……,$n$）；

因此确定单位数为 $D$＝1/70；

原问题转化为$\begin{cases} N' \equiv 350 (\bmod 570) \\ N' \equiv 210 (\bmod 497) \\ N' \equiv 140 (\bmod 210) \end{cases}$，亦即$\begin{cases} N' \equiv 8 (\bmod 19) \\ N' \equiv 68 (\bmod 71) \\ N' \equiv 140 (\bmod 210) \end{cases}$；

$\{m_1, m_2, m_3\}$＝{19,71,210}；$M = m_1 m_2 m_3$＝283290；

$\{M_1, M_2, M_3\}$＝$\{M/m_1, M/m_2, M/m_3\}$＝{14910, 3990, 1349}；

14910/19 的连分数为$[q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k]$＝[784, 1, 2, 1, 4]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k} \begin{bmatrix} -q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14910 & 3139 \\ 19 & -4 \end{bmatrix}$，取 $x_1$＝－4；

3990/71 的连分数为$[q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k]$＝[56, 5, 14]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k} \begin{bmatrix} -q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3990 & 281 \\ 71 & -5 \end{bmatrix}$，取 $x_2$＝－5；

1349/210 的连分数为$[q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k]$＝[6, 2, 2, 1, 3, 1, 1, 3]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k} \begin{bmatrix} -q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1349 & -379 \\ -210 & 59 \end{bmatrix}$，取 $x_3$＝59；

因为$\{a_1, a_2, a_3\}$＝{350,210,140}，于是

$$N^{/}\equiv\sum_{i=1}^{n}M_i\ \ x_i\ a_i\,(\bmod M\ )\equiv 243740(\bmod 283290)$$

取 $N$ ＝(1/70) $N^{/}$ ＝243740/70＝3482 即可。

这意味着不定方程组：

$$\begin{cases} n=5+8\dfrac{1}{7}x \\ n=3+7\dfrac{1}{10}y \\ n=2+3z \end{cases} \text{有正整数解} \begin{cases} x=427+243740t \\ y=490+243740t \\ z=1160+243740t \\ n=3482s \end{cases}$$

，其中 $t$， $s$ 为整数。

## 张敦仁《求一算术》中的演纪类问题（五题）

（01）：今有唐麟德术，日法 1340，岁实 489428，朔实 39571。实测到麟德元年甲子岁，天正冬至，日辰甲子（序第 1 位），小余 240，润余 17770。欲以甲子岁天正十一月甲子夜半合朔冬至为上元。问上元距麟德元年岁积几何。

答曰：积 269880 算；

【大衍矩阵解法】

原文数据：

| 日法 | 岁实 | 朔实 | 日辰 | 小余 | 润余 | 计算结果 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1340 | 489428 | 39571 | 第 1 位 | 240 | 17770 | 269880 |

【解】由于在六十甲子顺序中，甲子序第 1 位，甲子与甲子距离为 0，故小余应该为 240。依题意可列出同余方程：

$$\begin{cases} 489428\times 60N\equiv 240(\bmod 60\times 1340) \\ 489428\times 60N\equiv 17770(\bmod 39571) \end{cases}$$

由于(60×489428,240,60×1340)＝240(122357,1,335)，

(29365680,17770,39571)＝1；

因此原问题转化为：

$$\begin{cases} 122357N\equiv 1(\bmod 335) \\ 29365680N\equiv 17770(\bmod 39571) \end{cases}$$

我们用大衍求一术消去 $N$ 的系数：

122357/335 的连分数为[$q_0,q_1,q_2,\cdots\cdots,q_k$]＝[365,4,11,1,2,2]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix}-q_i & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}122357 & -52230\\ -335 & 143\end{bmatrix}$，于是 122357×143≡1(mod335)；

29365680/39571 的连分数为[$q_0,q_1,q_2,\cdots\cdots,q_k$]＝[742,9,1,8,1,3,2,4,10]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix}-q_i & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-29365680 & 2871931\\ 39571 & -3870\end{bmatrix}$，

于是 17770×(－3870)≡17770×35701≡1(mod39571)；

于是原问题进一步转化为：

$$\begin{cases}N\equiv 1\times 143(\bmod 335)\\ N\equiv 17770\times 35701(\bmod 39571)\end{cases}$$

亦即：$\begin{cases}N\equiv 143(\bmod 335)\\ N\equiv 4498(\bmod 39571)\end{cases}$

$\{m_1,m_2\}$＝{335, 39571}；$M=m_1\ m_2$＝13256285；

$\{M_1,M_2\}=\{M/m_1,M/m_2\}$＝{39571,335}；

39571/335 的连分数为$[q_0,q_1,q_2,\cdots\cdots,q_k]$＝[118,8,5,1,6]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix}-q_i & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-39571 & 5788\\ 335 & -49\end{bmatrix}$，取 $x_1$＝－49；

由于 335/39571 的连分数为$[q_0,q_1,q_2,\cdots\cdots,q_k]$＝[0,118,8,5,1,6]，

可直接在上面的大衍矩阵中取 $x_2$＝5788；

因为$\{a_1,a_2\}$＝{143,4498}，于是

$$N\equiv\sum_{i=1}^{n}M_i\ x_i\ a_i\ (\bmod M\ )\equiv 4498(\bmod 13256285)$$

因此取 60$N$＝60×4498＝269880 即可。

（02）：今有唐大衍术，日法 3040，岁实 1110343，朔实 89773；实测到开元十二年甲子岁，天正冬至，日辰戊寅（序第 15 位），小余 2260，润余 49107。欲以甲子岁天正十一月甲子夜半合朔冬至为上元。问上元距开元十二年积算几何。

答曰：积 96961740 算；

【大衍矩阵解法】

原文数据：

| 日法 | 岁实 | 朔实 | 日辰 | 小余 | 润余 | 计算结果 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3040 | 1110343 | 89773 | 第 15 位 | 2260 | 49107 | 96961740 |

【解】由于在六十甲子顺序中，戊寅序第 15 位，戊寅与甲子距离为 14，故小余应该为 2260＋(15－1)3040＝44820

依题意可列出同余方程：

$$\begin{cases} 1110343\times 60N\equiv 14\times 3040+2260(\bmod 60\times 3040) \\ 1110343\times 60N\equiv 49107(\bmod 89773) \end{cases}$$

由于(1110343×60,14×3040＋2260,60×3040)＝60(1110343,747,3040)，
(1110343×60, 49107, 89773)＝1；
因此原问题转化为：

$$\begin{cases} 1110343N\equiv 747(\bmod 3040) \\ 1110343\times 60N\equiv 49107(\bmod 89773) \end{cases}$$

我们用大衍求一术消去 $N$ 的系数：

1110343/3040 的连分数为[$q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k$]＝[365,4,10,1,12,1,1,2]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix} -q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1110343 & -440850 \\ -3040 & 1207 \end{bmatrix}$，

于是 1110343×1207≡1(mod3040)；

1110343×60/89773 的连分数为[$q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k$]＝[742,9,1,23,1,1,3,1,1,2,1,2,2]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix} -q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -66620580 & 28136737 \\ 89773 & -37915 \end{bmatrix}$，

于是 66620580×(－37915)≡1(mod89773)；
于是原问题进一步转化为：

$$\begin{cases} N\equiv 747\times 1207(\bmod 3040) \\ N\equiv 49107(-37915)(\bmod 89773) \end{cases}$$

亦即：$\begin{cases} N\equiv 1789(\bmod 3040) \\ N\equiv 115(\bmod 89773) \end{cases}$

{$m_1, m_2$}＝{3040,89773}；$M$ ＝$m_1$ $m_2$ ＝272909920；

{$M_1, M_2$}＝{$M/m_1, M/m_2$}＝{89773,3040}；

89773/3040 的连分数为[$q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k$]＝[29,1,1,7,1,2,20,3]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix} -q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 89773 & -29442 \\ -3040 & 997 \end{bmatrix}$，取 $x_1$＝997；

由于 3040/89773 的连分数为[$q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k$]＝[0, 29,1,1,7,1,2,20,3]，

可直接在上面的大衍矩阵中取 $x_2$＝－29442；

因为{$a_1, a_2$}＝{1789,115}，于是

$$N \equiv \sum_{i=1}^{n} M_i \ \ x_i \ a_i \ (\bmod M \ ) \equiv 1616029 (\bmod 272909920)$$

因此取 60 $N$ ≡96961740(mod272909920)即可。

（03）：今有宋崇天术，日法 10590，岁实 3867940，朔实 312729；实测到天圣二年甲子岁，天正冬至，日辰壬辰（序第 29 位），小余 1680，润余 16149。欲以甲子岁天正十一月甲子夜半合朔冬至为上元。问上元距天圣二年积算几何。

答曰：积 97556340 算；

【大衍矩阵解法】

原文数据：

| 日法 | 岁实 | 朔实 | 日辰 | 小余 | 润余 | 计算结果 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 10590 | 3867940 | 312729 | 第 29 位 | 1680 | 16149 | 97556340 |

【解】由于在六十甲子顺序中，壬辰序第 29 位，壬辰与甲子距离为 28，故小余应该为 1680＋(29－1) 10590＝298200

依题意可列出同余方程：

$$\begin{cases} 3867940 \times 60N \equiv 298200(\bmod 60 \times 10590) \\ 3867940 \times 60N \equiv 16149(\bmod 312729) \end{cases}$$

由于(3867940×60, 298200, 10590×60)＝600(386794,497, 1059)，

(3867940×60,16149,312729)＝3(77358800,5383,104243)；

因此原问题转化为：

$$\begin{cases} 386794N \equiv 497(\bmod 1059) \\ 77358800N \equiv 5383(\bmod 104243) \end{cases}$$

我们用大衍求一术消去 $N$ 的系数：

386794/1059 的连分数为[$q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k$]＝[365,4,11,3,1,5]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k} \begin{bmatrix} -q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 386794 & -67205 \\ -1059 & 184 \end{bmatrix}$，于是 386794×184≡1(mod1059)；

77358800/104243 的连分数为[$q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k$]＝[742,9,1,14,17,1,6,1,4]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k} \begin{bmatrix} -q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -77358800 & 15871307 \\ 104243 & -21387 \end{bmatrix}$，

于是 77358800×(－21387)≡1(mod104243)；

于是原问题进一步转化为：

$$\begin{cases} N \equiv 497 \times 184(\bmod 1059) \\ N \equiv 5383 \times (-21387)(\bmod 104243) \end{cases}$$

亦即：$\begin{cases} N \equiv 374(\bmod 1059) \\ N \equiv 62294(\bmod 104243) \end{cases}$

$\{m_1, m_2\}$＝{1059, 104243}； $M = m_1 m_2$＝110393337；

$\{M_1, M_2\} = \{M/m_1, M/m_2\}$＝{104243,1059}；

104243/1059 的连分数为$[q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k]$＝[98,2,3,2,1,2,1,5,2]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix}-q_i & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-104243 & 47938\\ 1059 & -487\end{bmatrix}$，取 $x_1$＝－487；

1059/104243 的连分数为$[q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k]$＝[0,98,2,3,2,1,2,1,5,2]，

可直接在上面的大衍矩阵中取取 $x_2$＝47938；

因为$\{a_1, a_2\}$＝{374,62294 }，于是

$$N \equiv \sum_{i=1}^{n} M_i \ x_i \ a_i \ (\bmod M\ ) \equiv 1625939(\bmod 110393337)$$

取 60 $N$ ＝97556340(mod110393337)即可。

（04）：今有宋纪元术，日法 7290，岁实 2662626，朔实 215278；实测到元符三年庚辰岁，天正冬至，日辰庚午，小余 1170，润余 5622。欲以庚辰岁天正十一月己卯（序第 52 位）夜半合朔冬至为上元。问上元距元符三年积算几何。

答曰：积 28613460 算；

【大衍矩阵解法】

原文数据：

| 日法 | 岁实 | 朔实 | 日辰 | 小余 | 润余 | 计算结果 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 7290 | 2662626 | 215278 | 第 52 位 | 1170 | 5622 | 28613460 |

【解】由于在六十甲子顺序中，己卯序第 52 位，己卯与甲子距离为 51，故小余应该为 1170＋(52－1) 7290＝372960

依题意可列出同余方程：

$$\begin{cases}2662626\times 60N \equiv 372960(\bmod 60\times 7290)\\ 2662626\times 60N \equiv 5622(\bmod 215278)\end{cases}$$

由于(2662626×60, 372960,60×7290)＝360(443771,1036,1215)，

(2662626×60, 5622, 215278)＝2(1331313,2811,107639)；

因此原问题转化为：

$$\begin{cases}443771N \equiv 1036(\bmod 1215)\\ 1331313N \equiv 2811(\bmod 107639)\end{cases}$$

我们用大衍求一术消去 $N$ 的系数：

443771/1215 的连分数为$[q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k]$＝[365,4,9,1,1,4,1,2]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix}-q_i & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}443771 & -157420\\ -1215 & 431\end{bmatrix}$，

于是 443771×431≡1(mod1215)；

1331313/107639 的连分数为[$q_0,q_1,q_2,\cdots\cdots,q_k$]＝[12,2,1,2,1,1,25,2,2,4,2,4]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix}-q_i & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1331313 & -299239\\ -107639 & 24194\end{bmatrix}$，

于是 1331313×24194≡1(mod107639)；

于是原问题进一步转化为：

$$\begin{cases}443771N\equiv 1036\times 431(\mathrm{mod}1215)\\ 1331313N\equiv 2811\times 24194(\mathrm{mod}107639)\end{cases}$$

亦即：$\begin{cases}N\equiv 611(\mathrm{mod}1215)\\ N\equiv 89125(\mathrm{mod}107639)\end{cases}$

{$m_1,m_2$}＝{1215, 107639}； $M$ ＝$m_1\ m_2$＝130781385；

{$M_1,M_2$}＝{$M/m_1,M/m_2$}＝{107639,1215}；

107639/1215 的连分数为[$q_0,q_1,q_2,\cdots\cdots,q_k$]＝[88,1,1,2,4,2,5,1,3]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix}-q_i & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-107639 & 27995\\ 1215 & -316\end{bmatrix}$，取 $x_1$＝－316；

由于 1215/107639 的连分数为[$q_0,q_1,q_2,\cdots\cdots,q_k$]＝[0, 88,1,1,2,4,2,5,1,3]，

可直接在上面的大衍矩阵中取 $x_2$＝27995；

因为{$a_1,a_2$}＝{611,89125}，于是

$$N\equiv\sum_{i=1}^{n}M_i\ \ x_i\ a_i\ (\mathrm{mod}\,M\ )\equiv 476891\,(\mathrm{mod}\ 130781385)$$

取 60 $N$ ＝28613460(mod 130781385)即可。

（05)：今有元受时术，不用积年日法，日周 10000，岁实 3652425 分，朔实 295305 分 93 秒；今欲仍用积年日法，定至元十八辛巳（序第 18 位）岁，天正冬至，气应 55 日 602 分，润应 20 日 1853 分，调得日法 2190，以己亥岁天正十一月甲子夜（序第 1 位）半冬至合朔为上元。问上元距元十八年积算几何。

答曰：积 98251422 算；

【大衍矩阵解法】

原文数据：

| 日法 | 岁实 | 朔实 | 日辰 | 气应 | 润应 | 日周 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2190 | 3652425 | 295305 | 第 30 位 | 55 日 602 分 | 20 日 1853 分 | 10000 |

为了能够转化为“演纪上元积年”问题，需要对原文数据进行转化。我们就取张敦仁的做法：

草曰：置岁实 3652425 分，以日法 2190 乘之得 7998810750；以日周 10000 除之得 799881 为今用岁实，不尽 750 弃之；

乃置气应 55 日 602 分（即 55×10000＋602＝550602），以日法 2190 乘之得 1205818380 以日周 10000 除之得 120581，不尽 8380 亦得 1，共得 120582 为今用气应；

今欲令上元起，己亥岁；己亥在辛巳后 18 年。

置 18 年，以岁实 799881 乘之得 14397858 加入辛巳气应 120582 得 14518440，以日法 2190 除之得 6629 为积日，不尽 930 为今用小余；以纪法 60 去积日，余 29 为今用大余；复以日法通之，得 63510，加入小余得 64440，为至元辛巳后己亥气应。乃从是岁演之。

次置朔实 295305 分 93 秒，以日法乘之得(295305×100+93)2190＝646719986 分 70 秒，以日周 10000 除之得 64671，不尽 9986 分 70 秒亦得 1，共得 64672，为今用朔实。

又置闰应 20 日 1853 分以日法 2190 乘之得(20×10000+1853)2190＝442058070，以日周 10000 除之得 44205，不尽 8070 亦得 1，共得 44206 为今用闰应（闰余）；

又置辛巳距己亥 18 年，以岁闰 23817 乘之得 428706，加入辛巳岁闰应 44206 得 472912。满朔实 64672 去之，余 20208，为至元辛巳后己亥岁闰应，为今用润余；

得到今用数据：

| 日法 | 岁实 | 朔实 | 日辰 | 小余 | 润余 | 计算结果 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2190 | 799881 | 64672 | 第 30 位 | 930 | 20208 | 98251440 |

由于在题中已取日辰为第 30 位，与甲子距离为 29，故小余应该为

930＋(52－1) 2190＝64440

依题意可列出同余方程：

$$\begin{cases}799881\times 60N\equiv 64440(\bmod 60\times 2190)\\799881\times 60N\equiv 20208(\bmod 64672)\end{cases}$$

(799881×60, 64440,2190×60)＝180(266627,358,730)，

(799881×60, 20208,64672)＝4(11998215,5052,16168)，

$$\begin{cases}266627N\equiv 358(\bmod 730)\\11998215N\equiv 5052(\bmod 16168)\end{cases}$$

由于(730,16168)＝2，因此定母为 365，16168，原问题转化为：

$$\begin{cases}266627N\equiv 358(\bmod 365)\\11998215N\equiv 5052(\bmod 16168)\end{cases}$$

我们用大衍求一术消去 $N$ 的系数：

266627/365 的连分数为[$q_0,q_1,q_2,\cdots\cdots,q_k$]＝[730,2,16,11]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix}-q_i & 1\\1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}266627 & -365\\-24106 & 33\end{bmatrix}$，于是 266627×33≡1(mod365)；

11998215/16168 的连分数为[$q_0,q_1,q_2,\cdots\cdots,q_k$]＝[742,10,2,1,2,3,3,3,5]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix}-q_i & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-11998215 & 16168\\ 2262652 & -3049\end{bmatrix}$，

于是 11998215×3049≡1(mod16168)；
于是原问题进一步转化为：

$$\begin{cases}N\equiv 33\times 358(\bmod 365)\\ N\equiv(-3049)5052(\bmod 16168)\end{cases}$$

亦即：$\begin{cases}N\equiv 134(\bmod 365)\\ N\equiv 4556(\bmod 16168)\end{cases}$

$\{m_1,m_2\}$＝{365,16168}；$M=m_1 m_2$＝5901320；

$\{M_1,M_2\}=\{M/m_1,M/m_2\}$＝{16168,365}；

16168/365 的连分数为$[q_0,q_1,q_2,\cdots\cdots,q_k]$＝[44,3,2,1,1,1,2,1,3]，

大衍矩阵为：$\prod_{i=0}^{k}\begin{bmatrix}-q_i & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-16168 & 365\\ 4341 & -98\end{bmatrix}$，取 $x_1$＝－98；

由于 365/16168 的连分数为$[q_0,q_1,q_2,\cdots\cdots,q_k]$＝[0, 44,3,2,1,1,1,2,1,3]，

可直接在上面的大衍矩阵中取 $x_2$＝365；

因为$\{a_1,a_2\}$＝{134，4556}，于是

$$N\equiv\sum_{i=1}^{n}M_i\ x_i\ a_i\ (\bmod M)\equiv 3275048(\bmod 5901320)$$

取 30$N$－18＝98251440－18＝98251422 即可。

# 第八章 正负开方法解题步骤

## （一）增乘开方法

求方程 $x^n = a_0$ 的解叫做“增乘开方法”，又称递增开方法，为贾宪所创。

贾宪，北宋数学家，增乘开平方法原收入《释锁》一书。贾宪原作已佚，但他的重要贡献被南宋数学家杨辉所引用，后被抄入《永乐大典》卷一万六千三百四十四中，有幸得以保存下来。

杨辉在所著《详解九章算法》“开方作法本源”一节中介绍贾宪开方作法图，并注明：“开方作法本源，出《释锁》算书，贾宪用此术”。杨辉还举下例说明具体的作法：

杨辉《详解九章算法》：

积一百三十三万六千三百三十六尺，问为三乘方几何。

答曰：三十四尺。

解题：三度相乘，其状扁直。

递增三乘开方法草曰：[上商得数下法增为立方除实，即原乘意]。

置积为实，别置一算名曰下法，于实末常超三位约实。[一乘超，一位，三乘超三位，万下定实]。

上商得数[三十]，乘下法生下廉[三十]，乘下廉生上廉[九百]。乘上廉生立方[二万七千]。命上商除实，[余五十二万六千三百三十六]。

作法商第二位得数，以上商乘下法入下廉[共六十]。乘下廉入上廉[共二千七百]，乘上廉入方[共一十万八千]；

又乘下法入下廉[共九十]，乘下廉入上廉[共五千四百]；

又乘下法入下廉[共一百二十]。方一，上廉二，下廉三，下法四退。[方一十万八千，上廉五千四百，下廉一百二十，下法定一]。

又于上商之次，续商置得数[第二位四]。以乘下法入廉[一百二十四]，乘下廉入上廉[共五千八百九，十六]。乘上廉并为立方[一十三万一千五百八十四]。命上商除实，尽。得三乘方一面之数。[如三位立方，依第二位取用]。

又术曰：两度开平方。[开第一次平方得一千一百五十六，开第二次平方得三十四。]

【按：以上所录，取自《永乐大典》卷 16344。】

这是以 $x^4$ ＝1336336 为例来说明的，我们逐句解释：

递增三乘开方法：草曰：

置积为实。别置一算名曰下法于实末。常超三位，约实。〔一乘超一位，三乘超三位。万上定实。〕

| 上商 | $x$ |
|---|---|
| 实 $a_0$ | $(((x+0)x+0)x+0)x-1336336$ |
| 立方 $a_1$ | $((x+0)x+0)x+0$ |
| 上廉 $a_2$ | $(x+0)x+0$ |
| 下廉 $a_3$ | $x+0$ |

| | |
|---|---|
| 下法 $a_4$ | 1 |

【这是立出算式，并且估计解为 $x=30+a$，于是有下面的运算】

上商得数〔三十〕；乘下法，生下廉〔三十〕；乘下廉，生上廉〔九百〕；乘上廉，生立方〔二万七千〕。命上商，除实〔余五十二万六千三百三十六〕。

| | |
|---|---|
| 上商 | $x=30$ |
| 实 $a_0$ | $(((x+0)x+0)x+0)x-1336336=-526336$ |
| 立方 $a_1$ | $((x+0)x+0)x+0=27000$ |
| 上廉 $a_2$ | $(x+0)x+0=900$ |
| 下廉 $a_3$ | $x+0=30$ |
| 下法 $a_4$ | 1 |

作法商第二位得数。以上商乘下法，入下廉〔共六十〕；乘下廉，入上廉〔共二千七百〕；乘上廉入方〔共一十万八千〕。

| | |
|---|---|
| 上商 | $x=30$ |
| 实 $a_0$ | $-526336$ |
| 立方 $a_1$ | $((x+30)x+900)x+27000=108000$ |
| 上廉 $a_2$ | $(x+30)x+900=2700$ |
| 下廉 $a_3$ | $x+30=60$ |
| 下法 $a_4$ | 1 |

又乘下法入下廉〔共九十〕；乘下廉入上廉〔共五千四百〕。

| | |
|---|---|
| 上商 | $x=30$ |
| 实 $a_0$ | $-526336$ |
| 立方 $a_1$ | 108000 |
| 上廉 $a_2$ | $(x+60)x+2700=5400$ |
| 下廉 $a_3$ | $x+60=90$ |
| 下法 $a_4$ | 1 |

又乘下法入下廉〔共一百二十〕。方一、上廉二、下廉三、下法四退〔方一十万八千，上廉五千四百，下廉一百二十，下法定一。〕。

| | |
|---|---|
| 上商 | $x$＝30 |
| 实 $a_0$ | －526336 |
| 立方 $a_1$ | 108000 |
| 上廉 $a_2$ | 5400 |
| 下廉 $a_3$ | $x$＋90＝120 |
| 下法 $a_4$ | 1 |

又于上商之次续商置得数〔第二位：四〕。以乘下法入下廉〔一百二十四〕；乘下廉入上廉〔共五千八百九十六〕，乘上廉并为立方〔一十三万一千五百八十四〕。命上商，除实，尽，得三乘方一面之数[如三位立方，依第二位取用]。

| | |
|---|---|
| 上商 | $x$＝4 |
| 实 $a_0$ | $(((x+120)x+5400)x+108000)x-526336=0$ |
| 立方 $a_1$ | $((x+120)x+5400)x+108000=131584$ |
| 上廉 $a_2$ | $(x+120)x+5400=5896$ |
| 下廉 $a_3$ | $x+120=124$ |
| 下法 $a_4$ | 1 |

最终得到答案 $x=34$；

可以看出：贾宪的增乘开方法已经与秦九韶算法完全相同了，只是贾宪只是考虑求方程 $x^n=a_0$ 的解，而秦九韶则是考虑 $a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1 x+a_0=0$。估计秦九韶是由此得到启发而得到“正负开方术”的吧。

我们再用大衍矩阵解答如下：

【大衍矩阵解】方程：$x^4=1336336$

结果估计为三位数。【开四次方，每位试商都有四变】

百位数试商取为 30：一变：

$$\begin{bmatrix}30 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}30 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30^2 & 30\\ 0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}30 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}30^2 & 30\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30^3 & 900\\ 0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}30 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}30^3 & 900\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30^4 & 27000\\ 0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}30 & -1336336\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}30^4 & 27000\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30^5 & -526336\\0 & 1\end{bmatrix};$$

二变：取得到结果的右上方的 27000，900，30 和 $x^4$ 的系数 1 进行下面的运算：

$$\begin{bmatrix}30 & 30\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}30 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30^2 & 60\\0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}30 & 900\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}30^2 & 60\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30^3 & 2700\\0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}30 & 27000\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}30^3 & 2700\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30^4 & 108000\\0 & 1\end{bmatrix};$$

三变：取得到结果的右上方的 2700，60 和 $x^4$ 的系数 1 进行下面的运算：

$$\begin{bmatrix}30 & 60\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}30 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30^2 & 90\\0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}30 & 2700\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}30^2 & 90\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30^3 & 5400\\0 & 1\end{bmatrix};$$

四变：取得到结果的右上方的 90 和 $x^4$ 的系数 1 进行下面的运算：

$$\begin{bmatrix}30 & 90\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}30 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30^2 & 120\\0 & 1\end{bmatrix};$$

四变结束。

个位数试商取为 4：取－526336，108000，5400，120，1 进行一变：

$$\begin{bmatrix}4 & 120\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4^2 & 124\\0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}4 & 5400\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4^2 & 124\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4^3 & 5896\\0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}4 & 108000\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4^3 & 5896\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4^4 & 131584\\0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}4 & -526336\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4^4 & 131584\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4^5 & 0\\0 & 1\end{bmatrix};$$

矩阵右上方为 0，开方结束。方程的解为 $x=34$;

为了进一步说明原理，我们取《四元玉鉴》（卷下）果垛叠藏 第十九问解答如下：

19.【原文】今有三角、四角果子积，相乘得二万三千一百个[注 1]。只云并三角、四角底面，平方开之，不及四角底面三个[注 2]。问：二底面各几何？

答曰：四角底面七个，三角底面九个。

术曰：立天元一为四角底面，如积求之。得八十三万一千六百为益实，九百九十为从方，八百七十七为从上廉，二千五百三十为益二廉，三百五十八为从三廉，一千四百二十六为从四廉，一千一十六为益五廉，二百九十二为从六廉，三卜九为益下廉，二为从隅，八乘方开之[注 3]。合问。

【注释】

[注 1]记三角垛、四角垛的底一边个数分别是$n_1$，$n_2$，此即：

$$[n_1(n_1+1)(n_1+2)/6][n_2(n_2+1)(2n_2+1)/6]=231000。$$

[注 2]此即：$\sqrt{n_1+n_2}=n_2-3$。

[注 3]开方式的现代形式如下：

$$2x^9-39x^8+292x^7-1016x^6+1426x^5+358x^4-2530x^3+877x^2+990x-831600=0。$$

【郭书春今译】

今有三角垛果子积与四角垛果子积相乘，得到 23100 个。只云三角垛与四角垛的一边相加，开平方，得数比四角蛛底的一边少 3 个。问：二垛底的一边个数各是多少？

答：四角垛底的一边为 7 个，三角垛底的一边为 9 个。

术：设天元一为四角垛底的一边个数，以如积方法求其解。得到－831600 为常数项．990 为一次项系数，877 为二次项系数，－2530 为三次项系数，358 为四次项系数。1426 为五次项系数，－1016 为六次项系数．292 为七次项系数，－39 为八次项系数，2 为最高次项系数，开九次方，使得到四角垛底一边的个数。符合所问。

【大衍矩阵解答】取试商 $x=7$ 进行如下运算：

以$\{a_9,a_8,a_7,a_6,a_5,a_4,a_3,a_2,a_1,a_0\}$

＝{2,－39,292,－1016,1426,358,－2530,877,990,－831600}进行一变：

$$\begin{bmatrix}7 & -39\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7^2 & -25\\0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}7 & 292\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7^2 & -25\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7^3 & 117\\0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}7 & -1016\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7^3 & 117\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7^4 & -197\\0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}7 & 1426\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7^4 & -197\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7^5 & 47\\0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}7 & 358\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7^5 & 47\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7^6 & 687\\0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}7 & -2350\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7^6 & 687\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7^7 & 2279\\0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}7 & 877\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7^7 & 2279\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7^8 & 16830\\0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}7 & 990\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7^8 & 16830\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7^9 & 118800\\0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}7 & -831600\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7^9 & 118800\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7^{10} & 0\\0 & 1\end{bmatrix};$$

一变结束。矩阵右上方为 0，开方结束。方程的解为 $x=7$。

**（二）正负开方术的解题步骤**

事实上，我们已经得到了正负开方术问题的解题步骤：

（一）依题意确定方程 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 x + a_0 = 0$，并且对结果 $x$ 的大小做出估计；

（二）不妨设 $x$ 为 $r$ 位数，分别确定 $x$ 的各个数位上的数值，各有 $n$ 变；

（三）$r$ 位数，步骤（二）可能重复 $r$ 次；

（四）对每次试商，若一变结束时，矩阵右上方为 0，则开方结束，方程的解为各个数位上的数值之和。

[清]李锐《开方说》（三卷，1823 年）提出的“代开法”，以及，[日本]关孝和（1642－1708）《开方算法》提出的“课商”，“穷商”之法，本质上都是在作坐标轴平移，与秦九韶方法没有实质上的区别。

# 第九章 《数书九章》正负开方术问题解答

## 一、名词解释

中国古代数学家把解方程叫做“开平方”，解三次方程叫做“开立方”，解四次方程叫做“开三乘方”，解五次方程叫做“开四乘方”，如此等等。

设方程为：

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots\cdots + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

其中，$a_0$为“实”或“积”；$a_1$为“方”；$a_n$为“隅”；$a_2 \sim a_{n-1}$为“一廉”至“$n-2$廉”；

在第一次试根时，在一变的最后一步（即求实的这一步）中有$a_0 + A_{1,1} x = A_{1,0}$。

秦九韶在正负开方术中规定：列算式时，“商常为正，实常为负；从常为正，益常为负。”因此$a_0$<0，于是：

若$A_{1,1}$>0，有$A_{1,0}$>0，则称这一步为“换骨”变换。[19 尖田求积]

若$A_{1,1}$<0，有$A_{1,0}$<0，则称这一步为“投胎”变换。[35 古池推元]

其它情形，则称为“正常”变换。

包含换骨变换的开某乘方法称为“翻法”。[19 尖田求积]

若$a_n \neq \pm 1$，则称求方程之根的过程为“开连枝某乘方”。[17 峻积验雪，18 竹器验雪，24 均分梯田，25 漂田推积，27 围田先计，29 临台测水，33 望敌圆营，49 囤积量容，51 推知籴数]。

对方程$a_n x^n + a_0 = 0$ 而言，先分别对$y^n = a_n$和$z^n = a_0$解方程，则$x = z / y$为原方程的解，则称这种求方程之根的过程为“开同体连枝某乘方”。[29 临台测水]

说明：所谓“同体格”，先以隅开平方，得数名同隅；次以定实开平方，得数为实；以同隅为法除之，得所求。此即：“开同体连枝某乘方”。

若方程的奇次幂的系数皆为零，但偶次幂的系数不为零，则称求方程之根的过程为“开玲珑某乘方”。[19 尖田求积，26 环田三积，32 遥度圆城]

其它开平方问题：[14 揆日究微，20 三斜求积，21 斜荡求积，22 计地容民，23 蕉田求积，64 计立方营，65 方变锐阵，66 计布圆阵]。

事实上，我们提供的正负开方术问题的解法均不需要计较这些概念，因此，在以下解题过程中我们完全忽略这些概念，亦不特别强调它们的定义。

## 二、《数书九章》中的“正负开方术”问题统计

《数书九章新释》（秦九韶原著，王守义遗著，李俨审校。安徽科学技术出版社）中涉及到正负开方术的问题一共有 21 题，涉及到的方程或是开方运算一共 33 个，它们分别是：

二、天时类：第四卷：

14 揆日究微：$\sqrt{106.16}$，$\sqrt{184.616}$，$\sqrt{352.736}$；

17 峻积验雪：$25 x^2 = 270400$（$x = 104$）；

18 竹器验雪：$x^4=7325$（近似值）；

三、田域类：第五，六卷：

19 尖田求积：$-x^4+763200x^2-40642560000=0$（$x=240$ 或 840）；

20 三斜求积：$x^2=7056$（$x=84$）；

21 斜荡求积：$x^2=22500$（$x=150$）；

22 计地容民：$x^2=2039184\times10^6$（$x=1428000$）；

23 蕉田求积：$x^2+82655x-2269810000=0$（近似值）；

24 均分梯田：$9x^2+5100x-322500=0$；

$528381x^2+360096600x-18933652500=0$（都是近似值）；

25 漂田推积：$x^2=5234944$（$x=2288$）；

26 环田三积：$x^2=1000$；$x^2=6250$；$x^2=90$；$x^2=5062.5$；$x^2=640$；

$-x^4+15245x^2-6262506.25=0$（都是近似值）；

27 围田先计：$39x^2-65x-536400=0$（近似值）；

四、测望类：第七，八卷：

29 临台测水：$x^2=24649$（$x=157$）；$x^2=49463089$（$x=7033$）；

$x^2=7317025$（$x=2705$）；

32 遥度圆城：$x^{10}+15x^8+72x^6-864x^4-11664x^2-34992=0$（$x=3$）；

33 望敌圆营：$9x^2+2532x-6411024=0$（近似值）；

35 古池推元：$0.5x^2-152x-11552=0$（近似值）；

六、钱谷类：第十一，十二卷：

49 囤积量容：$16x^2+192x-1863.2=0$；$36x^2+360x-13068.8=0$（都是近似值）；

51 推知余数：$4.608x^3=72\times10^{12}$（$x=25000$）；

八、军旅类：第十五，十六卷：

64 计立方营：$x^2=8000$（近似值）；$x^2+2x-399=0$（$x=19$ 或 21）；

65 方变锐阵：$x^2$＝62500（$x$＝250）；

66 计布圆阵：$6x^2+234x-2600=0$（近似值）；

以上方程中，对应于偶函数的，其解还有负数值，不一一罗列了。

开平方类型比较平凡，但是，为了说明“投胎”变换，这里我们选择 35．古池推元作为例子，其余的就不予理睬了。至于三次方程，以及高次方程的，只给出：18．竹器验雪；19．尖田求积；26．环田三积；32．遥度圆城；51．推知籴数；这五题的解答。

为了说明原理，我们分别用秦九韶算法和大衍矩阵方法给出解答。

**《数书九章》第八卷 35．古池推元**

问：有方中圆古池，堙圮（yīnpǐ，堵塞，毁坏），止余一角。从外方隅，斜至内圆边 7 尺 6 寸。欲就古迹修之，欲求圆，方面，方斜各几何？

答曰：池圆径 3 丈 6 尺 6 寸；方面 3 丈 6 尺 6 寸；方斜 5 丈 1 尺 8 寸；

术曰：以少广求之，投胎术入之。斜自乘，倍之为实。倍斜为益方，以半为从隅，开投胎平方得径，又为方面。以隅并之，共为方斜。

草曰：以斜 76 寸自乘得 5776，倍之得 11552 寸为实。倍斜 76 寸得 1520 为益方。

以半寸为从隅开平方：

置实 11552 于上，益方 152 于中，从隅 5 分于下。

超步，约得百，乃于实上，商置 300 寸，方再进，为 15200，隅四进，为 5000。以商隅相生，得 15000 为正方，以消益方 15200。其益方余 200。次与商相生，得 600，投入实，得 12152。

又商隅相生，又得正方 15000，内消负方 200 讫，余 14800 为从方。一退，为 1480。以隅再退，为 50。乃于上商之次，续商置 60 寸．与隅相生，增入正方，得 1780。乃命验续商，除实讫，实余 1472。

次以商生隅，增入正方，为 2080。方一退，为 208。隅再退，为 5 分，乃于续商之次，又商置 6 寸，与隅相生，增入正方，为 211。乃命商，除实讫，实不尽 206 寸，不开，为分子。

乃以商生隅，增入正方，又并隅，共得 214 寸 5 分，为分母，以分母分子求等，得 5 分为等数，皆以 5 分约其分子分母之数，为 429 分寸之 412，通命之，得池圆径及方面皆 3 丈 6 尺 6 寸 429 分寸之 412。

又倍隅斜 7 尺 6 寸，得 1 丈 5 尺 2 寸，并径 3 丈 6 尺 6 寸，共得 5 丈 l 尺 8 寸 429 分寸之 412，为方斜。

【解】设池圆直径为 $x$ 分，隅斜至内圆边长 $d$ 分，则方面亦为 $x$ 分，方斜为 $x+2d$ 分。

依术可得：$0.5x^2-2d\ x-2d^2=0$；

依题意可得到方程：$5x^2-1520x-115520=0$

根估为三位数，分三步进行变形。

【秦九韶算法解】

以{$a_2,a_1,a_0$}＝{5,－1520,－115520}进行一变：

| | |
|---|---|
| 商 | $x$＝300 |
| 实 $a_0$ | $(5x-1520)x-115520=-121520$（投胎） |

| | |
|---|---|
| 益方 $a_1$ | $5x$－1520＝－20 |
| 从隅 $a_2$ | 5 |

一变结束。以$\{a_2,a_1\}$＝{5,－20 }进行二变：

| | |
|---|---|
| 商 | $x$＝300 |
| 实 $a_0$ | －121520 |
| 益方 $a_1$ | $5x$－20＝1480 |
| 从隅 $a_2$ | 5 |

二变结束。

以$\{a_2,a_1,a_0\}$＝{5,1480,－121520}进行一变：

| | |
|---|---|
| 商 | $x$＝60 |
| 实 $a_0$ | $(5x$＋1480)$x$－121520＝－14720（正常） |
| 益方 $a_1$ | $5x$＋1480＝1780 |
| 从隅 $a_2$ | 5 |

一变结束。以$\{a_2,a_1\}$＝{5,1780}进行二变：

| | |
|---|---|
| 商 | $x$＝60 |
| 实 $a_0$ | －14720 |
| 益方 $a_1$ | $5x$＋1780＝2080 |
| 从隅 $a_2$ | 5 |

二变结束。

以$\{a_2,a_1,a_0\}$＝{5,2080,－14720}进行一变：

| | |
|---|---|
| 商 | $x$＝6 |
| 实 $a_0$ | $(5x$＋2080)$x$－14720＝－2060（正常） |
| 益方 $a_1$ | $5x$＋2080＝2110 |
| 从隅 $a_2$ | 5 |

一变结束。以$\{a_2,a_1\}$＝{5,2110}进行二变：

| | |
|---|---|
| 商 | $x$＝6 |
| 实 $a_0$ | －2060 |
| 益方 $a_1$ | 5 $x$＋2110＝2140 |
| 从隅 $a_2$ | 5 |

二变结束。根最多是三位数，变形结束。由于实为 2060，因此

$x=366\dfrac{2060}{5+2140}=366\dfrac{412}{429}$ 寸为所求。

【大衍矩阵解】

百位数试商取为 300：以$\{a_2,a_1,a_0\}$＝{5,－1520,－115520}进行一变：

$$\begin{bmatrix}300 & -1520\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}300 & 5\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}300^2 & -20\\0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}300 & -115520\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}300^2 & -20\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}300^3 & -121520\\0 & 1\end{bmatrix};$$

一变结束。以$\{a_2,a_1\}$＝{5,－20 }进行二变：

$$\begin{bmatrix}300 & -20\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}300 & 5\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}300^2 & -1840\\0 & 1\end{bmatrix};$$

二变结束。

十位数试商取为 60，以$\{a_2,a_1,a_0\}$＝{5,1480,－121520}进行一变：

$$\begin{bmatrix}60 & 1480\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}60 & 5\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}60^2 & 1780\\0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}60 & -121520\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}60^2 & 1780\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}60^3 & -14720\\0 & 1\end{bmatrix};$$

一变结束。以$\{a_2,a_1\}$＝{5,17820 }进行二变：

$$\begin{bmatrix}60 & 1780\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}60 & 5\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}60^2 & 2080\\0 & 1\end{bmatrix};$$

二变结束。

个位数试商取为 6，以$\{a_2,a_1,a_0\}$＝{5,2080,－14720}进行一变：

$$\begin{bmatrix}6 & 2080\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & 5\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6^2 & 2110\\0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}6 & -14720\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6^2 & 2110\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6^3 & -2060\\0 & 1\end{bmatrix};$$

一变结束。以{ $a_2, a_1$ }={5,2110 }进行二变：

$$\begin{bmatrix}6 & 2110\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & 5\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6^2 & 2140\\0 & 1\end{bmatrix};$$

二变结束。方程的根最多是三位数，变形结束。由于实为 2060，因此

$x=366\dfrac{2060}{5+2140}=366\dfrac{412}{429}$ 寸为所求。

**《数书九章》第四卷 18．竹器验雪**

问：以圆竹箩验雪，箩口径一尺六寸，深一尺七寸，底径一尺二寸，雪降其中，高一尺。箩体通风，受雪多，则平地少。欲知平地雪高几何？

答曰：平地雪厚九寸，三千四百十九分寸之七百六十四。

术曰：口径减底径，余乘雪深，半之自乘为隅。以箩深幂乘雪深幂，并隅，又乘雪深幂，为实。隅实可约，约之。开连枝三乘方，得平地雪厚。

草曰：列问数，各通为寸。置口径 16 寸，减底径 12 寸，余 4 寸，乘雪深 10 寸得 40 寸，以半之得 20 寸，自乘得 400 寸为隅。以箩深 17 寸自乘，得 289 寸，为箩深幂。次置雪深 10 寸自乘，得 100 寸为雪深幂，乘箩深幂数[加隅，又乘深幂]，得 293 万寸，为实。隅实求等，得 400，俱约之，得 7325 为实。得 1 为隅，开三乘方，步法不可超，乃约实。

置商 9 寸，与隅 1 相生，得 9，为下廉；

又与商相生，得 81 寸，为上廉；

又与商相生，得 729，为从方；

乃命上商，除实，不尽 764；已而复以商生隅，入二廉，至方，陆续又生毕，以方廉隅共并之得 3439 分寸之 764，为平地雪厚 9 寸 3439 分寸之 764，合问。

列问数，各通为寸，口径得 16 寸，深 17 寸，底径 12 寸，箩中雪高 10 寸。

乃以底径减口径，余 4 寸，乘雪深 10 寸，得 40 寸。

以半得数 20 寸自乘，得 400 寸为隅。以箩深 17 寸自乘得 289 寸为箩深幂。

次置雪探 10 寸自乘，得 100，为雪深幂。

以雪深幂 100 寸，乘箩深幂 289 寸得 28900 寸，并隅 400 寸得 29300 寸，为上。

置上位数 29300 寸，又乘雪深幂 100 寸，得 293 万寸，为实，开三乘方。

以隅实求等，得 400，俱为约之，得 7325，为实。1 为隅，开之。

步法不可超，乃约实，置商 9 寸，与隅相生得 9，为（原脱“为”字）下廉。

下廉 9，又与商 9 相生，得 81，为上廉。

上廉又与商相生，得 729，为从方。

乃以从方 729，命上商 9，除实 7325 讫，余 764，既而复以商生隅，入下廉。

下廉得 18，又与商 9 相生，入上廉。

上廉得 243，又以商相生，入方，得 2916。

又以商 9 生隅 1，入下廉 18 内，得 27。

又以商 9 生下廉 27，入上廉 243 内，得 486。

又以商生隅，入下廉 27 内得 36，为末图。

乃以末图方廉隅四者并之，得 3439，为母。以实余 764 为子。

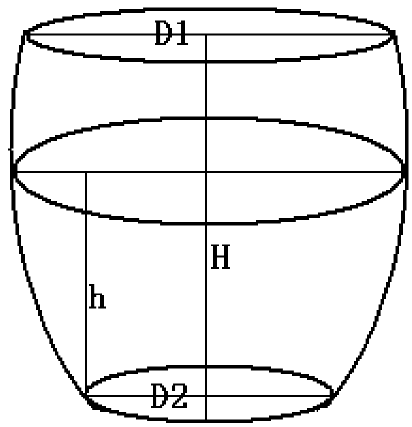
命为平地雪厚 9 寸 3439 分寸之 764。合问。

【解】如图，设口径为 $D_1$，底径为 $D_2$，簩深为 $H$，雪深为 $h$，平地雪高 $x$ 的近似值公式为：

$$[\frac{(D_1-D_2)h}{2}]^2 x^4 - h^2\{h^2 H^2 + [\frac{(D_1-D_2)h}{2}]^2\} = 0$$

已知：$D_1$＝16 寸，$D_2$＝12 寸，$H$＝17 寸，$h$＝10 寸，代入上式，得

$400x^4-2930000=0$，亦即：$x^4=7325$




用秦九韶算法解之，得：

以$\{a_4,a_3,a_2,a_1,a_0\}=\{1,0,0,0,-7325\}$进行一变：

| | |
|---|---|
| 商 | $x=9$ |
| 实 $a_0$ | $(((x+0)x+0)x+0)x-7325=-764$ |
| 方 $a_1$ | $((x+0)x+0)x+0=729$ |
| 从上廉 $a_2$ | $(x+0)x+0=81$ |
| 虚下廉 $a_3$ | $x+0=9$ |
| 益隅 $a_4$ | 1 |

一变结束。以$\{a_4,a_3,a_2,a_1\}=\{1,9,81,729\}$进行二变：

| | |
|---|---|
| 商 | $x=9$ |
| 实 $a_0$ | $-764$ |
| 方 $a_1$ | $((x+9)x+81)x+729=2916$ |
| 从上廉 $a_2$ | $(x+9)x+81=243$ |

| | |
|---|---|
| 虚下廉 $a_3$ | $x+9=18$ |
| 益隅 $a_4$ | 1 |

二变结束。以$\{a_4,a_3,a_2\}=\{1,18,243\}$进行三变：

| 商 | $x=9$ |
|---|---|
| 实 $a_0$ | $-764$ |
| 方 $a_1$ | 2916 |
| 从上廉 $a_2$ | $(x+18)x+243=486$ |
| 虚下廉 $a_3$ | $x+18=27$ |
| 益隅 $a_4$ | 1 |

三变结束。以$\{a_4,a_3\}=\{1,27\}$进行四变：

| 商 | $x=9$ |
|---|---|
| 实 $a_0$ | $-764$ |
| 方 $a_1$ | 2916 |
| 从上廉 $a_2$ | 486 |
| 虚下廉 $a_3$ | $x+27=36$ |
| 益隅 $a_4$ | 1 |

四变结束。实为 764，故 $x=9\dfrac{764}{1+36+486+2916}=9\dfrac{764}{3439}$ 寸为所求。

【大衍矩阵解】设平地雪高为 $x$，依题意可得方程：$x^4-7325=0$

结果估计为一位数。【开四次方，第一步有四变】

百位数试商取为 9：一变：

$$\begin{bmatrix}9 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9^2 & 9\\ 0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}9 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9^2 & 9\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9^3 & 81\\ 0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}9 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9^3 & 81\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9^4 & 729\\0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}9 & 7325\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9^4 & 729\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9^5 & -764\\0 & 1\end{bmatrix};$$

二变：取得到结果的右上方的 729，81，9 和 $x^4$ 的系数 1 进行下面的运算：

$$\begin{bmatrix}9 & 9\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9^2 & 18\\0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}9 & 81\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9^2 & 18\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9^3 & 243\\0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}9 & 729\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9^3 & 243\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9^4 & 2916\\0 & 1\end{bmatrix};$$

三变：取得到结果的右上方的 243，18 和 $x^4$ 的系数 1 进行下面的运算：

$$\begin{bmatrix}9 & 18\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9^2 & 27\\0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}9 & 243\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9^2 & 27\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9^3 & 486\\0 & 1\end{bmatrix};$$

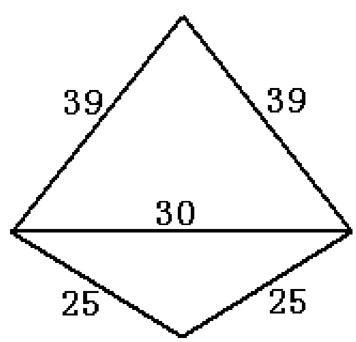
四变：取得到结果的右上方的 27 和 $x^4$ 的系数 1 进行下面的运算：

$$\begin{bmatrix}9 & 27\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9^2 & 36\\0 & 1\end{bmatrix};$$

四变结束。实为 764，故 $x=9\dfrac{764}{1+36+486+2916}=9\dfrac{764}{3439}$ 寸为所求。

## 《数书九章》第五卷 19．尖田求积

问：有两尖田一段，其尖长不等，两大斜三十九步，两小斜二十五步，中广三十步。欲知其积几何？




答曰：田积八百四十步。

术曰：以少广求之，翻法入之。

置半广自乘，为半幂；与小斜幂相减相乘，为小率；以半幂与大斜幂相减相乘，为大率；以二率相减，余自乘为实；并二率，倍之为从上廉；以一为益隅，开翻法三乘方，得积。

一位开尽者，不用翻法。

草曰：置广 30 步，以半之得 15，以自乘得 225，为半幂；以小斜 25 步自乘，得 625，为小斜幂；与半幂相减，余 400，与半幂 225 相乘，得 9 万步，为小率；

置大斜 39 步自乘，得 152l，为大斜幂；与半幂 225 相减，余 1296，与半幂 225 相乘，得 291600，为大率；

以小率 9 万减大率，余 201600，自乘，得 4064256 万为实；以小率 9 万，并大率 291600，得 381600，倍之，得 763200，为从上廉；

以 1 为益隅，开玲珑翻法三乘方。

步法：乃以从靡超一位，益隅超三位，约商得十，今再超进，乃商置百。

其从上廉为 763200 万，其益隅为 1 亿，约实，置商 800 为定商。

以商生益隅，得 8 亿，为益下廉；

又以商生下廉，得 64 亿，为益上廉；

与从上廉 763200 万相消，从上廉余 123200 万；

又与商相生，得 985600 万，为从方；

又与商相生，得 7884800 万，为正积；与元实 4064256 万相消，正积余 3820544 万，为正实；

又以益隅 l 亿，与商相生得 8 亿，增入益下廉，为 16 亿；

又以益下廉与商相生，得 128 亿，为益上廉。乃以益上廉与从上廉 123200 万相消，余 l156800 万，为益上廉；

又与商相生，得 9254400 万，为益方；与从方 985600 万相消，益方余 8268800 万，为益方。

又以商生益隅 1 亿，得 8 亿，增入益下康得 24 亿；

又以商相生，得 192 亿，入益上廉，得 3076800 万，为益上廉；

又以商生益隅 1 亿，得 8 亿，入益下廉，得 32 亿毕。

其益方一退，为 826880 万，益上廉再退，得 30768 万，益下廉三退，得 320 万，益隅四退，为 1 万毕。

乃约正实，续置商 40 步，与益隅 l 万相生，得 4 万，入益下廉，为 324 万；

又与商相生，得 1296 万，入益上廉内，为 32064 万；

又与商相生，得 128256 万，入益（原书“益”误为“从”）方内，为 955136 万，乃命上续商 40，除实适尽。

所得 840 步，为田积。今列求率开方图于后：【图略】

【秦九韶算法解】设大斜田面积为 $S_1 = 15\sqrt{39^2 - 15^2}$ ，

小大斜田面积为 $S_2 = 15\sqrt{25^2 - 15^2}$ ，

我们保留 39，25，15 这些数据，去掉开平方符号：

$S_1^2 = 15^2(39^2 - 15^2) = 291600$，$S_2^2 = 15^2(25^2 - 15^2) = 90000$；

尖田总面积为 $x = S_1 + S_2$；

两边平方得：$x^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2S_1S_2 \Rightarrow x^2 - S_1^2 + S_2^2 = 2S_1S_2$，

再次两边平方得：$x^4 - 2x^2(S_1^2 + S_2^2) + (S_1^2 + S_2^2)^2 = 4S_1^2S_2^2$

$$\Rightarrow x^4 - 2x^2(S_1^2 + S_2^2) + (S_1^2 - S_2^2)^2 = 0$$

代入相关数据可得：$-x^4 + 763200x^2 - 40642560000 = 0$；

| | | |
|---|---|---|
| 余 $S_1^2-S_2^2$=201600 | $39^2$=1521 大斜幂 | 大斜 39 |
| 自乘($S_1^2-S_2^2$)$^2$=40642560000 为实 | 余 $39^2-15^2$=1296 | 小斜 25 |
| $S_1^2$=291600 大率 | 225×1296=291600 大率 | 广步 30 |
| $S_2^2$=90000 小率 | $25^2$=625 小斜幂 | 半广 15 |
| 并之 $S_1^2+S_2^2$=381600 | 余 $25^2-15^2$=400 | 半幂 $15^2$=225 |
| 倍之 2($S_1^2+S_2^2$)=763200 为从上廉 | 225×400=90000 小率 | |
| 以 1 为益隅 | | |

下面解方程：$-x^4+763200x^2-40642560000=0$；

术曰：商常为正，实常为负；从常为正，益常为负；

以$\{a_4,a_3,a_2,a_1,a_0\}=\{-1,0,763200,0,-40642560000\}$进行一变：

| | |
|---|---|
| 商 | $x=800$ |
| 实 $a_0$ | $(((-x+0)x+763200)x+0)x-40642560000=38205440000$（换骨） |
| 方 $a_1$ | $((-x+0)x+763200)x+0=98560000$ |
| 从上廉 $a_2$ | $(-x+0)x+763200=123200$ |
| 虚下廉 $a_3$ | $-x+0=-800$ |
| 益隅 $a_4$ | $-1$ |

一变结束。以$\{a_4,a_3,a_2,a_1\}=\{-1,-800,123200,98560000\}$进行二变：

| | |
|---|---|
| 商 | $x=800$ |
| 实 $a_0$ | 38205440000 |
| 方 $a_1$ | $((-x-800)x+123200)x+98560000=-826880000$ |
| 从上廉 $a_2$ | $(-x-800)x+123200=1156800$ |
| 虚下廉 $a_3$ | $-x-800=-1600$ |
| 益隅 $a_4$ | $-1$ |

二变结束。以$\{a_4,a_3,a_2\}=\{-1,-1600,1156800\}$进行三变：

| | |
|---|---|
| 商 | $x=800$ |
| 实 $a_0$ | 38205440000 |
| 方 $a_1$ | －826880000 |
| 从上廉 $a_2$ | $(-x-1600)x+1156800=-3076800$ |
| 虚下廉 $a_3$ | $-x-1600=-2400$ |
| 益隅 $a_4$ | －1 |

三变结束。以$\{a_4, a_3\}=\{-1, -2400\}$进行四变：

| | |
|---|---|
| 商 | $x=800$ |
| 实 $a_0$ | 38205440000 |
| 方 $a_1$ | －826880000 |
| 从上廉 $a_2$ | －3076800 |
| 虚下廉 $a_3$ | $-x-2400=-3200$ |
| 益隅 $a_4$ | －1 |

四变结束。取$x=40$，以$\{a_4, a_3, a_2, a_1, a_0\}=\{-1, -3200, -3076800, -826880000, -40642560000\}$进行一变：

| | |
|---|---|
| 商 | $x=40$ |
| 实 $a_0$ | $(((-x-3200)x-3076800)x-826880000)x-40642560000=0$ |
| 方 $a_1$ | $((-x-3200)x-3076800)x-826880000=955136000$ |
| 从上廉 $a_2$ | $(-x-3200)x-3076800=3206400$ |
| 虚下廉 $a_3$ | $-x-3200=-3240$ |
| 益隅 $a_4$ | －1 |

实为 0，故$x=840$为所求。本题方程另有一解$x=240$是增根。

以上系开三乘方翻法图，后篇效此。

【大衍矩阵解】设面积为$x$，依题意可得方程：

$$-x^4+763200x^2-40642560000=0$$

结果估计为三位数。【开四次方，第一步有四变】

百位数试商取为 800：一变：

$$\begin{bmatrix}800 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}800 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}800^2 & -800\\0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}800 & 763200\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}800^2 & -800\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}800^3 & 123200\\0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}800 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}800^3 & 123200\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}800^4 & 98560000\\0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}800 & -40642560000\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}800^4 & 98560000\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}800^5 & 38205440000\\0 & 1\end{bmatrix};$$

二变：取得到结果的右上方的 98560000，123200，－800 和 $x^4$ 的系数－1 进行下面的运算：

$$\begin{bmatrix}800 & -800\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}800 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}800^2 & -1600\\0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}800 & 123200\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}800^2 & -1600\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}800^3 & -1156800\\0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}800 & 98560000\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}800^3 & -1156800\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}800^4 & -826880000\\0 & 1\end{bmatrix};$$

三变：取得到结果的右上方的－1156800，－1600 和 $x^4$ 的系数－1 进行下面的运算：

$$\begin{bmatrix}800 & -1600\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}800 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}800^2 & -2400\\0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}800 & -1156800\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}800^2 & -2400\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}800^3 & -3076800\\0 & 1\end{bmatrix};$$

四变：取得到结果的右上方的－2400 和 $x^4$ 的系数－1 进行下面的运算：

$$\begin{bmatrix}800 & -2400\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}800 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}800^2 & -3200\\0 & 1\end{bmatrix};$$

【第二步】取得到结果第一行的右上方的 38205440000，－826880000，－3076800，－3200 和 $x^4$ 的系数－1 进行下面的运算：

一变：十位数试商取为 40：

$$\begin{bmatrix}40 & -3200\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}40 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}40^2 & -3240\\0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 40 & -3076800 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 40^2 & -3240 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 40^3 & -3206400 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 40 & -826880000 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 40^3 & -3206400 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 40^4 & 955136000 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 40 & 38205440000 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 40^4 & 955136000 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 40^5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

矩阵右上方为 0，开方结束。方程的解为 $x$ =840；

本题方程还有一个正解： $x$ =240，亦可用上述方法求解：

【大衍矩阵解】百位数试商取为 200：一变：

$$\begin{bmatrix} 200 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 200 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 200^2 & -200 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 200 & 763200 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 200^2 & -200 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 200^3 & 723200 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 200 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 200^3 & 723200 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 200^4 & 144640000 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 200 & -40642560000 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 200^4 & 144640000 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 200^5 & -11714560000 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

二变：取得到结果的右上方的 1446400，723200，－200 和 $x^4$ 的系数－1 进行下面的运算：

$$\begin{bmatrix} 200 & -200 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 200 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 200^2 & -400 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 200 & 723200 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 200^2 & -400 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 200^3 & 643200 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 200 & 144640000 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 200^3 & 643200 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 200^4 & 2732800 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

三变：取得到结果的右上方的 643200，－400 和 $x^4$ 的系数－1 进行下面的运算：

$$\begin{bmatrix} 200 & -400 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 200 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 200^2 & -600 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 200 & 643200 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 200^2 & -600 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 200^3 & 523200 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

四变：取得到结果的右上方的－600 和 $x^4$ 的系数－1 进行下面的运算：

$$\begin{bmatrix} 200 & -600 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 200 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 200^2 & -800 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

【第二步】取得到结果第一行的右上方的－11714560000，273280000，523200，－800 和 $x^4$ 的系数－1 进行下面的运算：

一变：十位数试商取为 40：

$$\begin{bmatrix} 40 & -800 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 40 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 40^2 & -840 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 40 & 523200 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 40^2 & -840 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 40^3 & 489600 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 40 & 273280000 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 40^3 & 489600 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 40^4 & 292864000 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 40 & -11714560000 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 40^4 & 292864000 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 40^5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

矩阵右上方为 0，开方结束。方程的解为 $x$ =240；

**《数书九章》第六卷 26．环田三积**

问：环田大小圆田共三段，环田外周三十步，虚径八步，大圆田径一十步，小圆田周三十步，欲知三田积，及环内周，通、实径，大圆周，小圆径各几何？

答曰：环田：积二十步[二百三十六万二千二百五十六分步之一百二十九万八千二十五]；

通径九步[一十九分步之九]；

实径一步[一十九分步之九]；

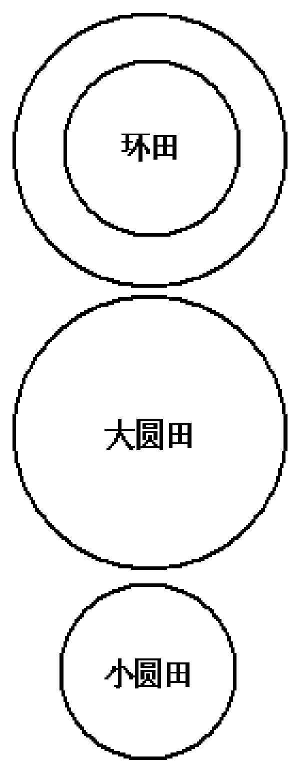
内周二十五步[一十七分步之五]；

大圆田：积七十九步[五十三分步之三]；

周三十一步[二十一分步之十三]；

小圆田：积七十一步[二百八十六分步之四十三]；

径九步[一十九分步之九]；




术曰：以方田及少广率变求之。

各置环圆径自乘为幂，进位为实。

以一为隅开平方得周。各置圆环周自乘为幂，退位为实。

以一为隅，开平方得径。

以周幂或径幂乘各实，以一十六约之为实。

以一为隅，开平方得圆积。

置环周幂，乘径实，十六约之为大率。

置虚径幂，乘内周实，十六约之为小率。

以二率相减之，余以自乘为实。并二率，倍之，为从上廉。

一为益隅，开三乘方，得环积。

置环周自乘，退位为实，一为隅，开平方，得通径。

以虚径减通径，余为实径。

其有开不尽者，约而命之。

草曰：置大圆径 10 步自乘，得 100 为径幂。进位得 1000 为实。以 1 为隅开平方，得 31 步，不尽 39 为分子，乃以隅生方，又益隅，共得 63 为分母。以分子与母求等得 3，俱以 3 约之，母于得 21 分步之 13，为大圆周 31 步 21 分步之 13。

次以径幂 100 乘前实 1000 得 10 万，以 16 约之，得 6250，为实。以 1 为隅开平方得 79 步，不尽 9 为分子。乃以隅生方，又增隅得 159 为分母。以分子母求等得 3，俱以 3 约母子，得 53 分步之 3，为大圆积 79 步 53 分步之 3。

次置小圆田周 30 步，以自乘得 900 为周幂。退位为 90 为径实。以 1 为隅，开平方得 9 步。不尽 9，以隅生方，又益隅，得 19 分步之 9，为小圆径 9 步 19 分步之 9。

次以周幂 900，乘前实 90，得 81000，以 16 约之，得 5062 步 6 分为实。以 1 为隅，开平方得 71 步。有不尽数 21 步 5 分为子，以隅生方，又益隅，得 143 为分母，以分子母求等得 5 分，俱约之得 286 分步之 43 为积。

次置环田周 30 步自乘，得 900 为周幂。退位得 90 为实。以 1 为隅开平方，得 9 步，不尽 9 为分子，以隅生方，并隅得 19 为分母。直命之为环田通径 9 步 19 分步之 9。次以环周幂 900 乘环实 90，得 81000，以 16 约之，得 5062 步 5 分为大率。

次置环田虚径 8 步自乘，得 64 为虚幂，进位得 640 为实。以 l 为隅，开平方得 25 步，不尽 15 为分子，以隅生方，又并隅得 51 为分母。与子求等得 3，俱约之得 17 分步之 5，为环田内周 25 步 17 分步之 5。

次以虚幂 64 乘周实 640 得 40960，以 16 约之，得 2560 为小率。以小率减大率，余 2502 步 5 分，自乘得 6262506 步 2 分 5 厘为实。以小大二率并之，得 7622 步 5 分，倍之得 15245 为从上廉。

以 1 为益隅，开玲珑三乘方得 20 步。

不尽 324506 步 2 分 5 厘为分子，续商无数，乃以益隅 1，益下廉 80，并之得 81 为减母。

次以从上廉 12845，并从方 577800 得 590645，以减母 81 减之，余 590564 为分母。以分子求等得 2 分 5 厘，俱约之得 2362256 分步之 1298025，为环田积 20 步 2362256 分步之 1298025。

次置环田通径 9 步 19 分步之 9，以虚径 8 步减之，余 1 步 19 分步之 9 为环田实径。合问。

【秦九韶算法解】设环田外径为 $d_1$，内径为 $d_2=8$，外周长为 $c_1=30$，内周长为 $c_2$，外圆面积为 $S_1$，内圆面积为 $S_2$，环田面积为 $x=S_1-S_2$；大圆田直径为 $d_3=10$，周长为 $c_3$，面积为 $S_3$；小圆田直径与环田外径相同，故有直径为 $d_1$，周长为 $c_1=30$，圆面积为 $S_1$；这里取圆周率为 $\pi=\sqrt{10}$；下面的运算需要去掉开平方符号。

（1）求大圆：大圆田直径为 $d_3=10$，故

周长为 $c_3=\sqrt{10}\ d_3$，即：$c_3^2=1000$；

面积为 $S_3=\sqrt{10}\ (d_3/2)^2$，即：$S_3^2=6250$；

（2）求小圆：小圆田周长为 $c_1=30$，

直径为 $d_1=c_1/\sqrt{10}$，即：$d_1^2=90$；

面积为 $S_1=\sqrt{10}\,(d_1/2)^2$，即：$S_1^2=5062.5$；

（3）求环田：内圆周长为 $c_2^2=640$；环田实径为 $d_1-8$；

$S_2=\sqrt{10}\,(d_2/2)^2$，即：$S_2^2=2560$；

面积为 $x=S_1-S_2$，两边平方得：

$x^2=S_1^2+S_2^2-2S_1S_2\Rightarrow x^2-(S_1^2+S_2^2)=-2S_1S_2$，

再次两边平方得：$x^4-2x^2(S_1^2+S_2^2)+(S_1^2+S_2^2)^2=4S_1^2S_2^2$

$\Rightarrow x^4-2x^2(S_1^2+S_2^2)+(S_1^2-S_2^2)^2=0$

代入相关数据可得方程：

$-x^4+15245x^2-6262506.25=0$；

平方类运算就不考虑了，我们只对四次方程给出解答。
【由于 6262506.25/15245≈410.790833，故可估计 $x=20$；】
取 $x=20$ 进行如下运算：

以$\{a_4,a_3,a_2,a_1,a_0\}=\{-1,0,15245,0,-6262506.25\}$进行一变：

| 商 | $x=20$ |
|---|---|
| 实 $a_0$ | $(((-x+0)x+15245)x+0)x-6262506.25=-324506.25$ |
| 方 $a_1$ | $((-x+0)x+15245)x+0=296900$ |
| 从上廉 $a_2$ | $(-x+0)x+15245=14845$ |
| 虚下廉 $a_3$ | $-x+0=-20$ |
| 益隅 $a_4$ | $-1$ |

一变结束。以$\{a_4,a_3,a_2,a_1\}=\{-1,-20,14845,296900\}$进行二变：

| 商 | $x=20$ |
|---|---|
| 实 $a_0$ | $-324506.25$ |
| 方 $a_1$ | $((-x-20)x+14845)x+296900=577800$ |
| 从上廉 $a_2$ | $(-x-20)x+14845=14045$ |
| 虚下廉 $a_3$ | $-x-20=-40$ |

| | |
|---|---|
| 益隅 $a_4$ | －1 |

二变结束。以$\{a_4, a_3, a_2\}=\{-1,-40,14045\}$进行三变：

| 商 | $x=20$ |
|---|---|
| 实 $a_0$ | －324506.25 |
| 方 $a_1$ | 577800 |
| 从上廉 $a_2$ | $(-x-40)x+14045=12845$ |
| 虚下廉 $a_3$ | $-x-40=-60$ |
| 益隅 $a_4$ | －1 |

三变结束。以$\{a_4, a_3\}=\{-1,-60\}$进行四变：

| 商 | $x=20$ |
|---|---|
| 实 $a_0$ | －324506.25 |
| 方 $a_1$ | 577800 |
| 从上廉 $a_2$ | 12845 |
| 虚下廉 $a_3$ | $-x-60=-80$ |
| 益隅 $a_4$ | －1 |

四变结束。

实不为 0，故 $x=20\frac{324506.25}{-1-80+12845+577800}=20\frac{1298025}{2362256}$ 为所求近似值。

【本题精确解为 $x=20.5548$ 和 121.748，均可用上述方法求得；】

【大衍矩阵解】设面积为 $x$，依题意可得方程：

$-x^4+15245x^2-6262506.25=0$；

结果估计为两位数。【开四次方，第一步有四变】一变：十位数试商取为 20：

$$\begin{bmatrix}20 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}20 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20^2 & -20\\ 0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}20 & 15245\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}20^2 & -20\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20^3 & 14845\\ 0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 20^3 & 14845 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 20^4 & 296900 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 20 & -6262506.25 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 20^4 & 296900 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 20^5 & 324506.25 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

二变：取得到结果的右上方的 296900，14845，－20 和 $x^4$ 的系数－1 进行下面的运算：

$$\begin{bmatrix} 20 & -20 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 20 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 20^2 & -40 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 20 & 14845 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 20^2 & -40 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 20^3 & 14045 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 20 & 296900 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 20^3 & 14045 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 20^4 & 577800 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

三变：取得到结果的右上方的 14045，－40 和 $x^4$ 的系数－1 进行下面的运算：

$$\begin{bmatrix} 20 & -40 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 20 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 20^2 & -60 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 20 & 14045 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 20^2 & -60 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 20^3 & 12845 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

四变：取得到结果的右上方的－60 和 $x^4$ 的系数－1 进行下面的运算：

$$\begin{bmatrix} 20 & -60 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 20 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 20^2 & -80 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

四变结束，矩阵右上方不为 0，

故 $x=20\dfrac{324506.25}{-1-80+12845+577800}=20\dfrac{1298025}{2362256}$ 为所求近似值。

**《数书九章》第八卷 32．遥度圆城**

问：有圆城不知周径，四门中开，北外三里有乔木，出南门便折行九里，乃见木。欲知城周、径各几何？圆用古法。

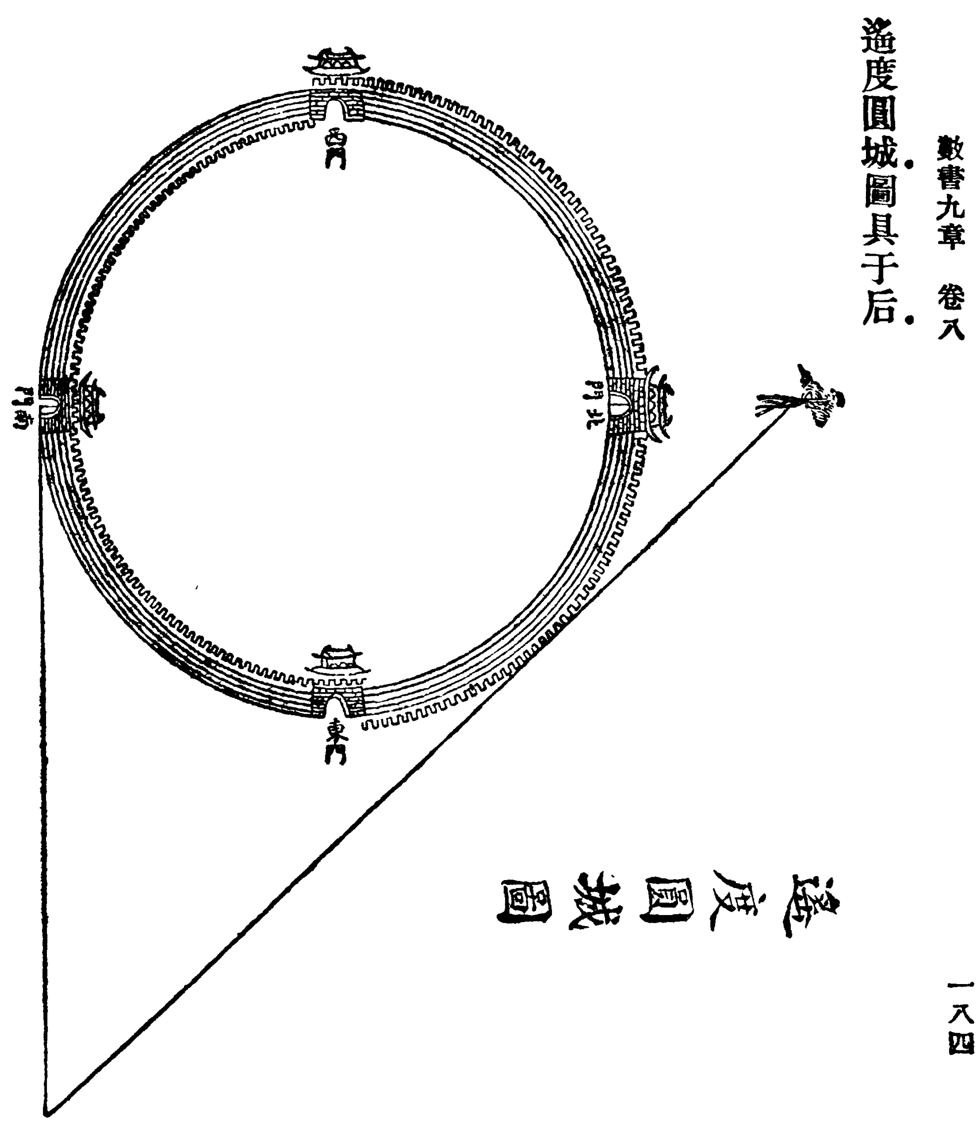
答曰：径九里，周二十七里。

术曰：以勾股差率求之。

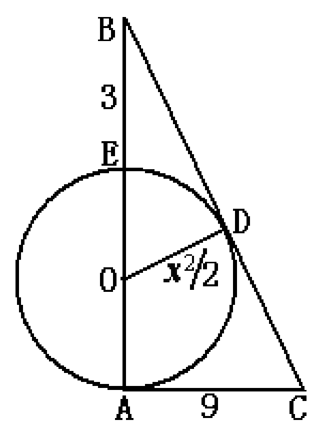
一为从隅，伍西北外里，为从七廉；置北里幂，八因，为从五廉；以北里幂为正率，以东行幂为负率，二率差，四因，乘北里，为益三廉；倍负率，乘五廉，为益上廉；以北里乘上廉为实；

开玲珑九乘方，得数，自乘，为径；

以三因径得周。




草曰：以 1 为从隅，以 5 因北 3 里得 15 里，为从七廉；以北 3 里自乘得 9 里，为正率，以 8 因率得 72，为从五廉；以东行 9 里自乘得 81，为负率；以正率 9 减负率，余 72 为负差；以 4 因之得 288，以乘北 3 里，得 864，系负差所乘者，为益三廉；倍负率 81 得 162，乘五廉 72 得 11664，为益上廉；以北 3 里乘上廉得 34992，为实。




各置实廉隅，玲珑空耦位方廉，以约实，众法不可超进，乃于实上定商 3 里，其隅与商相生，得 3，为从下廉；

又与商相生，入从七廉，共得 24，为星廉；

又与商相生，得 72，为从六廉；

又与商相生，入五廉内，共得 288；

又与商相生，得 864，为从四廉；

又与商相生，得 2592，为正三廉；内消益三廉 864 讫，余 1728 为从三廉；

又与商相生，得 5184，为从二廉；
又与商相生得 15552 为正上廉；内消益上廉 11664 讫，余 3888，为从上廉；
又与商相生，得 11664 为从方。
乃命上商 3 里除实，适尽。
所得 3 里以自乘之，得 9 里，为城圆径之里数；
又以古法圆率 3 因之得 27，为城周。

【秦九韶算法解】依题意得到方程：$x^{10}+15x^8+72x^6-864x^4-11664x^2-34992=0$

取试商 $x=3$ 进行如下运算：以$\{a_{10},a_9,a_8,a_7,a_6,a_5,a_4,a_3,a_2,a_1,a_0\}=\{1,0,15,0,72,0,-864,0,-11664,0,-34992\}$进行一变：

| 商 | $x=3$ |
|---|---|
| 实 $a_0$ | $(((((((((x+0)x+15)x+0)x+72)x+0)-864)+0)-11664)+0)-34992=0$ |
| 方 $a_1$ | $((((((((x+0)x+15)x+0)x+72)x+0)-864)+0)-11664)+0=11664$ |
| 上廉 $a_2$ | $(((((((x+0)x+15)x+0)x+72)x+0)-864)+0)-11664=3888$ |
| 二廉 $a_3$ | $((((((x+0)x+15)x+0)x+72)x+0)-864)+0=5184$ |
| 三廉 $a_4$ | $(((((x+0)x+15)x+0)x+72)x+0)-864=1728$ |
| 四廉 $a_5$ | $((((x+0)x+15)x+0)x+72)x+0=864$ |
| 五廉 $a_6$ | $(((x+0)x+15)x+0)x+72=288$ |
| 六廉 $a_7$ | $((x+0)x+15)x+0=72$ |
| 七廉 $a_8$ | $(x+0)x+15=24$ |
| 下廉 $a_9$ | $x+0=3$ |
| 隅 $a_{10}$ | 1 |

实为 0，一变结束。故 $x=3$ 为所求。

【大衍矩阵解】如图，已知：BE＝3，AC＝9，设城径为 $x^2$，则有：

$AB^2=(x^2+3)^2$，$OD^2=(x^2/2)^2$，$BD^2=(x^2/2+3)^2-(x^2/2)^2=3(x^2+3)$，

$\because \triangle ABC \backsim \triangle BOD$，$\therefore \dfrac{AB}{BD}=\dfrac{AC}{OD} \Rightarrow AB^2\ OD^2=AC^2\ BD^2$

$\Rightarrow (x^2+3)^2(x^2/2)^2=3(x^2+3)9^2 \Rightarrow (x^2+3)x^4=972 \Rightarrow x^6+3x^4-972=0$

$$\Rightarrow(x^2+6)^2(x^6+3x^4-972)=0\Rightarrow x^{10}+15x^8+72x^6-864x^4-11664x^2-34992=0$$

结果估计为一位数。【开十次方，第一步有十变】一变：由于 1024＝$2^{10}$<34992<$3^{10}$＝59049，故取试商为 3：

$$\begin{bmatrix}3&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3^2&3\\0&1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}3&15\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3^2&3\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3^3&24\\0&1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}3&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3^3&24\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3^4&72\\0&1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}3&72\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3^4&72\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3^5&288\\0&1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}3&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3^5&288\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3^6&864\\0&1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}3&-864\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3^6&864\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3^7&1728\\0&1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}3&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3^7&1728\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3^8&5184\\0&1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}3&-11664\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3^8&5184\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3^9&3888\\0&1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}3&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3^9&3888\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3^{10}&11664\\0&1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}3&-34992\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3^{10}&11664\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3^{11}&0\\0&1\end{bmatrix};$$

矩阵右上方为 0，开方结束。方程的解为 $x=3$；

此题简单，虽为开十次方，实则一变即可得到答案。

**《数书九章》第十二卷 51．推知籴数**

问：和籴三百万贯，求米石数。闻每石牙钱三十，籴场量米折支牙人所得。每石出牵钱八百，牙人量米四石六斗八合折与牵头。欲知米数石价，牙钱，牙米牵钱各几何？

答曰：籴到米一十二万石。

石价，二十五贯文；

牙钱，三千六百贯文；

折米，一百四十四石；

牵钱，一百一十五贯二百文。

术曰：以商功求之，率变入之。置籴米，牙钱，牵钱，相乘为实，以牵米为隅，开连枝立方，得石价；以价除本，得籴到米；以牙钱乘米，得总牙钱；以价除之，得牙米；以牵钱乘牙米，得共牵钱。

草曰：置籴米 300 万贯，乘牙钱 30 文，得 9000 万贯；又乘牵钱 800 文，得 720 亿万贯，为价实。置牵米 4 石 6 斗 8 合，于实数零文之下，为立方从隅。

起步，步法常超二位，每超一度，商进之。

今隅凡超四度，当于实上约定首商 20 贯。

乃以商生隅 4 石 6 斗 8 合，得 92 贯 160 文，乃以为廉。

又以商生廉，得 1843200 贯为方。

乃以方命上商 20 贯，除实讫，实余 3513600 万贯。

复以商生隅 4 石 6 斗 8 合，入廉，得 184 贯 320 文。

又以商生廉，加入方 内，得 5529600 贯，为方法。

复以商又生隅 4 石 6 斗 8 合，加入廉，得 276 贯 480 文，为廉法。

其方法一退，廉法二退，从隅三退。乃于首商之次，约实续商 5 贯。

以续商生隅 4 石 6 斗 8 合，入廉，得 299 贯 520 文。

又以续商生廉，入方，得 7027200 贯。

乃命续商 5 贯，除实适尽。所得 25 贯，为每石米价，以为法。

以籴本 300 万贯为实，如法而一，得 12 万石，为籴到米数。

以米数乘牙钱 30 得 3600 贯，为牙钱。

以石价 25 贯除牙钱 3600 贯文，得 144 石，为籴场量米折牙钱。

以牵钱 800 乘牙米 144 石，得 115 贯 200 文，为牵头得牙人所与牵钱之数。

今乃以石价 25 贯文，约牵钱 115 贯 200 文，得 4 石 6 斗 8 合，为牵钱折米，合问。

【秦九韶算法解】依题意得到方程：$4.608x^3=72\times10^{12}$

取 $x=20000$，以 $\{a_3,a_2,a_1,a_0\}=\{4.608,0,0,72\times10^{12}\}$ 进行一变

| 商 | $x=20000$ |
|---|---|
| 实 $a_0$ | $((4.608x+0)x+0)x+72\times10^{12}=-35136\times10^9$ |
| 方 $a_1$ | $(4.608x+0)x+0=18432\times10^5$ |
| 廉 $a_2$ | $4.608x+0=92160$ |
| 隅 $a_3$ | 4.608 |

一变结束。以 $\{a_3,a_2,a_1\}=\{4.608,92160,18432\times10^5\}$ 进行二变：

| 商 | $x=20000$ |
|---|---|
| 实 $a_0$ | $-35136\times10^9$ |
| 方 $a_1$ | $(4.608x+92160)x+18432\times10^5=55296\times10^5$ |

| | |
|---|---|
| 廉 $a_2$ | $4.608x+92160=184320$ |
| 隅 $a_3$ | 4.608 |

二变结束。以$\{a_3, a_2\}=\{4.608, 184320\}$进行

| 商 | $x=20000$ |
|---|---|
| 实 $a_0$ | $-35136\times10^9$ |
| 方 $a_1$ | $55296\times10^5$ |
| 廉 $a_2$ | $4.608x+184320=276480$ |
| 隅 $a_3$ | 4.608 |

三变结束。

取 $x=5000$，以$\{a_3, a_2, a_1, a_0\}=\{4.608, 276480, 55296\times10^5, -35136\times10^9\}$进行一变：

| 商 | $x=5000$ |
|---|---|
| 实 $a_0$ | $((4.608x+276480)x+55296\times10^5)x-35136\times10^9=0$ |
| 方 $a_1$ | $(4.608x+276480)x+55296\times10^5=70272\times10^5$ |
| 廉 $a_2$ | $4.608x+276480=299520$ |
| 隅 $a_3$ | 4.608 |

实为 0，故 $x=25000$ 为所求。

【大衍矩阵解】设石价为 $x$，则籴到米石数为 $3000000000/x$；

而每石牙钱为 30 文，则共牙钱为 $30\times3000000000/x$；

牙米数为 $30\times3000000000/x^2$；

每石牙米牵钱为 800 文，则共牵钱为 $800\times30\times3000000000/x^2$；

已知牙人牵钱折米石数为 4.608，则

$4.608x=800\times30\times3000000000/x^2$，亦即：$4.608x^3=72\times10^{12}$。

结果估计为五位数。【开三次方，第一步有三变】一变：万位数试商取为 20000：

$$\begin{bmatrix}20000 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}20000 & 4.608\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20000^2 & 92160\\ 0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}20000 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}20000^2 & 92160\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20000^3 & 18432\times10^5\\ 0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 20000 & -72\times10^{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 20000^3 & 18432\times10^5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 20000^4 & 35136\times10^9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

二变：取得到结果的右上方的 18432×$10^9$，92160 和 $x^3$ 的系数 4.608 进行下面的运算：

$$\begin{bmatrix} 20000 & 92160 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 20000 & 4.608 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 20000^2 & 184320 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 20000 & 18432\times10^5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 20000^2 & 184320 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 20000^3 & 55296\times10^5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

三变：取得到结果的右上方的 184320 和 $x^3$ 的系数 4.608 进行下面的运算：

$$\begin{bmatrix} 20000 & 184320 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 20000 & 4.608 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 20000^2 & 276480 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

【第二步】一变：取得到结果第一行的右上方的－35136×$10^9$，55296×$10^5$，276480 和 $x^3$ 的系数 4.608 进行下面的运算：

十位数试商取为 5000：

$$\begin{bmatrix} 5000 & 276480 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5000 & 4.608 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5000^2 & 299520 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 5000 & 55296\times10^5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5000^2 & 299520 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5000^3 & 70272\times10^5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 5000 & 35136\times10^9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5000^3 & 70272\times10^5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5000^4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

矩阵右上方为 0，开方结束。方程的解为 $x$ ＝25000；

【注意】本题若预先变形为 4608 $x^3$ ＝72×$10^6$（亦即原来的 0 去掉 9 个，在最后的结果中需加入 3 个 0），则解题会更加简洁。

**SYD 赞曰：**【正负开方术求$n$次方程实数根】
根之位数先确定，从右到左$n$位分；
实有$k$段根$k$位，隅、实、指数估试商；
每位试商有$n$变，除非一变实为零；
幂次从高排到低，系数从里排到外；
从左到右剥洋葱，随即递互累乘之。
中间各层洋葱皮，用来进行下一变；
每变系数少一位，试商数值不变更；
最后一层洋葱皮，留来计算次位商；
上述过程重复做，直到试完$k$位商。
诸位试商求其和，即得方程实数根；
$k$位试商不现零，可得方程近似根；
隅、方之和以为法，实法而一为所求。

# 第十章 《开平方说》与《开立方说》题解

**[明]陈荩谟**

**《开平方说》题解（七题）**

以下取$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$的系数$\{a_2, a_1, a_0\}$进行变换；

大衍矩阵解为：

初商取为$x$：以$\{a_2, a_1, a_0\}$进行一变：

$$\begin{bmatrix} x & a_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\ \begin{bmatrix} x & a_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & a_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 & b_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\ \begin{bmatrix} x & a_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^2 & b_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^3 & b_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

一变结束。以$\{a_2, b_1\}$进行二变：

$$\begin{bmatrix} x & a_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\ \begin{bmatrix} x & b_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & a_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 & c_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

次商取为$x'$：以$\{a_2, c_1, b_0\}$进行一变：如此等等。

其余依此类推。开立方亦然。

**（01）二商单位例：** $x^2 = 361$

初商取为10：以{1,0,－361}进行一变：

$$\begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 10^2 & 10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 10^3 & -261 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

一变结束。以{1,10}进行二变：

$$\begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 10^2 & 20 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

二变结束。

次商取为9：以{1,20,－261}进行一变：

$$\begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 9^2 & 29 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 9^3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

一变结束。矩阵右上方为0，开方结束。解为$x = 19$；

**（02）二商变位例：** $x^2 = 2809$

初商取为50：以{1,0,－2809}进行一变：

$$\begin{bmatrix} 50 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 50^2 & 50 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 50^3 & -309 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

一变结束。以{1,50}进行二变：

$$\begin{bmatrix} 50 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 50^2 & 100 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

二变结束。

次商取为 3：以{1,100,－309}进行一变：

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3^2 & 103 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3^3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

一变结束。矩阵右上方为 0，开方结束。解为 $x$＝53。

**（03）三商例：** $x^2$＝58081

初商取为 200：以{1,0,－58081}进行一变：

$$\begin{bmatrix} 200 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 200^2 & 200 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 200^3 & -18081 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

一变结束。以{1,200}进行二变：

$$\begin{bmatrix} 200 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 200^2 & 400 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

二变结束。

次商取为 40：以{1,400,－18081}进行一变：

$$\begin{bmatrix} 40 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 40^2 & 440 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 40^3 & -481 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

一变结束，以{1,440}进行二变：

$$\begin{bmatrix} 40 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 40^2 & 480 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

二变结束。

三商取为 1：以{1,480,－481}进行一变：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1^2 & 481 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1^3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

一变结束。矩阵右上方为 0，开方结束。解为 $x$＝241。

**（04）升筹例：** $x^2$＝228484

初商取为 400：以{1,0,－228484}进行一变：

$$\begin{bmatrix} 400 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 400^2 & 400 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 400^3 & -68484 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

一变结束。以{1,400}进行二变：

$$\begin{bmatrix} 400 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 400^2 & 800 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

二变结束。

次商取为 70：以{1,800,－68484}进行一变：

$$\begin{bmatrix}70 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}70^2 & 870\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}70^3 & -7584\\0 & 1\end{bmatrix}$$

一变结束。以{1,870}进行二变：

$$\begin{bmatrix}70 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}70^2 & 940\\0 & 1\end{bmatrix}$$

二变结束。

三商取为 8：以{1,940,－7584}进行一变：

$$\begin{bmatrix}8 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}8^2 & 948\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}8^3 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

一变结束。矩阵右上方为 0，开方结束。解为 $x$＝478。

**（05）隔筹例[四商]：** $x^2$＝36096064

初商取为 6000：以{1,0,－36096064}进行一变：

$$\begin{bmatrix}6000 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}6000^2 & 6000\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}6000^3 & -96064\\0 & 1\end{bmatrix}$$

一变结束。以{1,6000}进行二变：

$$\begin{bmatrix}6000 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}6000^2 & 12000\\0 & 1\end{bmatrix}$$

二变结束。

次商取为 8：以{1,12000,－96064}进行一变：

$$\begin{bmatrix}8 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}8^2 & 12008\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}8^3 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

一变结束。矩阵右上方为 0，开方结束。解为 $x$＝6008。

**（06）当位例：** $x^2$＝483025

初商取为 600：以{1,0,－483025}进行一变：

$$\begin{bmatrix}600 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}600^2 & 600\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}600^3 & -123025\\0 & 1\end{bmatrix}$$

一变结束。以{1,600}进行二变：

$$\begin{bmatrix}6000 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}6000^2 & 12000\\0 & 1\end{bmatrix}$$

二变结束。

次商取为 90：以{1,12000,－123025}进行一变：

$$\begin{bmatrix} 90 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 90^2 & 1290 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 90^3 & -6925 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

一变结束。

以{1,1290}进行二变:

$$\begin{bmatrix} 90 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 90^2 & 1380 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

二变结束。

三商取为 5:以{1,1380,－6925}进行一变:

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5^2 & 1385 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5^3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

矩阵右上方为 0,开方结束。解为 $x$ ＝695。

**(07)命分法例:** $x^2$ ＝1821

初商取为 40:以{1,0,－1821}进行一变:

$$\begin{bmatrix} 40 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 40^2 & 40 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 40^3 & -221 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

一变结束。以{1,40}进行二变:

$$\begin{bmatrix} 40 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 40^2 & 80 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

二变结束。

若次商取为 2:以{1,80,－221}进行一变:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2^2 & 82 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2^3 & -57 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

一变结束。矩阵右上方为－57,开方结束。

近似值可取为 $x \approx 42\dfrac{57}{1+82} \approx 42.68674698$

若次商取为 3:以{1,80,－221}进行一变:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3^2 & 83 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3^3 & 28 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

一变结束。矩阵右上方为 28,开方结束。

近似值可取为 $x \approx 43-\dfrac{28}{1+83} \approx 42.66666667$

准确的近似值解为 $x \approx 42.673176$。

## 《开立方说》题解(九题)

**(01)二商四位例:** $x^3$ ＝6859

初商取为 10:以{1,0, 0,－6859}进行一变:

$$\begin{bmatrix}10 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}10^2 & 10\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}10^3 & 100\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}10^4 & -5859\\0 & 1\end{bmatrix}$$

一变结束。以{1,10,100}进行二变：

$$\begin{bmatrix}10 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}10^2 & 20\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}10^3 & 300\\0 & 1\end{bmatrix}$$

二变结束。以{1,20}进行三变：

$$\begin{bmatrix}10 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}10^2 & 30\\0 & 1\end{bmatrix}$$

三变结束。

次商取为 9：以{1,30,300,－5859}进行一变：

$$\begin{bmatrix}9 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}9^2 & 39\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}9^3 & 651\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}9^4 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

一变结束。矩阵右上方为 0，开立方结束。解为 $x$ ＝19。

**（02）二商五位例：** $x^3$ ＝91125

初商取为 40：以{1,0, 0,－91125}进行一变：

$$\begin{bmatrix}40 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}40^2 & 40\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}40^3 & 1600\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}40^4 & -27125\\0 & 1\end{bmatrix}$$

一变结束。以{1,40,1600}进行二变：

$$\begin{bmatrix}40 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}40^2 & 80\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}40^3 & 4800\\0 & 1\end{bmatrix}$$

二变结束。以{1,80,4800}进行三变：

$$\begin{bmatrix}40 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}40^2 & 120\\0 & 1\end{bmatrix}$$

三变结束。

次商取为 5：以{1,120,4800,－27125}进行一变：

$$\begin{bmatrix}5 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}5^2 & 125\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}5^3 & 5425\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}5^4 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

一变结束。矩阵右上方为 0，开方结束。解为 $x$ ＝45。

**（03）二商六位例：** $x^3$ ＝592704【正确】

初商取为 80：以{1,0, 0,－592704}进行一变：

$$\begin{bmatrix}80 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}80^2 & 80\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}80^3 & 6400\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}80^4 & -80704\\0 & 1\end{bmatrix}$$

一变结束。以{1,80,6400}进行二变：

$$\begin{bmatrix}80 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}80^2 & 160\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}80^3 & 19200\\0 & 1\end{bmatrix}$$

二变结束。以{1,160}进行三变：

$$\begin{bmatrix}80 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}80^2 & 240\\0 & 1\end{bmatrix}$$

三变结束。

次商取为 4：以{1,240,19200,－80704}进行一变：

$$\begin{bmatrix}4 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4^2 & 244\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4^3 & 20176\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4^4 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

一变结束。矩阵右上方为 0，开方结束。解为 $x=84$。

**（04）二商七位例：** $x^3=19034163$；【正确】

初商取为 200：以{1,0,0,－19034163}进行一变：

$$\begin{bmatrix}200 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}200^2 & 200\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}200^3 & 40000\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}200^4 & -11034163\\0 & 1\end{bmatrix}$$

一变结束。以{1,200,40000}进行二变：

$$\begin{bmatrix}200 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}200^2 & 400\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}200^3 & 120000\\0 & 1\end{bmatrix}$$

二变结束。以{1,400}进行三变：

$$\begin{bmatrix}200 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}200^2 & 600\\0 & 1\end{bmatrix}$$

三变结束。

次商取为 60：以{1,600,120000,－11034163}进行一变：

$$\begin{bmatrix}60 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}60^2 & 660\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}60^3 & 159600\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}60^4 & -1458163\\0 & 1\end{bmatrix}$$

一变结束。以{1,660,159600}进行二变：

$$\begin{bmatrix}60 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}60^2 & 720\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}60^3 & 202800\\0 & 1\end{bmatrix}$$

二变结束。以{1,720}进行三变：

$$\begin{bmatrix}60 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}60^2 & 780\\0 & 1\end{bmatrix}$$

三变结束。

三商取为 7：以{1,780,202800,－1458163}进行一变：

$$\begin{bmatrix}7 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}7^2 & 787\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}7^3 & 208309\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}7^4 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

一变结束。矩阵右上方为 0，开方结束。解为 $x$＝267。

**（05）三商八位例：** $x^3$＝30371328；

初商取为 300：以{1,0,0,－30371328}进行一变：

$$\begin{bmatrix}300 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}300^2 & 300\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}300^3 & 90000\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}300^4 & -3371328\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

一变结束。以{1,300,90000}进行二变：

$$\begin{bmatrix}300 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}300^2 & 600\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}300^3 & 270000\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

二变结束。以{1,600}进行三变：

$$\begin{bmatrix}300 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}300^2 & 900\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

三变结束。
次商取为 10：以{1,900,270000,－3371328}进行一变：

$$\begin{bmatrix}10 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}10^2 & 910\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}10^3 & 279100\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}10^4 & -580328\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

一变结束。以{1,910,279100}进行二变：

$$\begin{bmatrix}10 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}10^2 & 920\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}10^3 & 288300\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

二变结束。以{1,920}进行三变：

$$\begin{bmatrix}10 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}10^2 & 930\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

三变结束。
三商取为 2：以{1,930,288300,－580328}进行一变：

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}2^2 & 932\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}2^3 & 290164\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}2^4 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

一变结束。矩阵右上方为 0，开方结束。解为 $x$＝312。

**（06）三商九位例：** $x^3$＝771095213

初商取为 900：以{1,0,0,－771095213}进行一变：

$$\begin{bmatrix}900 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}900^2 & 900\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}900^3 & 810000\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}900^4 & -42095213\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

一变结束。以{1,900,810000}进行二变：

$$\begin{bmatrix}900 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}900^2 & 1800\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}900^3 & 2430000\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

二变结束。以{1,1800}进行三变：

$$\begin{bmatrix} 900 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 900^2 & 2700 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

三变结束。

次商取为 10：以{1,2700,2430000,－42095213}进行一变：

$$\begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10^2 & 2710 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10^3 & 2457100 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10^4 & -17524213 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

一变结束。以{1,2710,2457100}进行二变：

$$\begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10^2 & 2720 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10^3 & 2484300 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

二变结束。以{1,2720}进行三变：

$$\begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10^2 & 2730 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

三变结束。

三商取为 7：以{1,2730,2484300,－17524213}进行一变：

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7^2 & 2737 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7^3 & 2503459 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7^4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

一变结束。矩阵右上方为 0，开方结束。解为 $x=917$。

**（07）四商十二位例：** $x^3=118298461429$

初商取为 4000：以{1,0,0,－118298461429}进行一变：

$$\begin{bmatrix} 4000 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4000^2 & 4000 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4000^3 & 16000000 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4000^4 & -54298461429 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

一变结束。以{1,4000,16000000}进行二变：

$$\begin{bmatrix} 4000 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4000^2 & 8000 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4000^3 & 48000000 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

二变结束。以{1,8000}进行三变：

$$\begin{bmatrix} 4000 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4000^2 & 12000 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

三变结束。

次商取为 900：以{1,12000,48000000,－54298461429}进行一变：

$$\begin{bmatrix} 900 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 900^2 & 12900 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 900^3 & 59610000 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 900^4 & -649461429 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

一变结束。以{1,12900,59610000}进行二变：

$$\begin{bmatrix}900 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}900^2 & 13800\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}900^3 & 72030000\\0 & 1\end{bmatrix}$$

二变结束。以{1,13800}进行三变：

$$\begin{bmatrix}900 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}900^2 & 14700\\0 & 1\end{bmatrix}$$

三变结束。

四商取为 9：以{1,14700,72030000,－649461429}进行一变：

$$\begin{bmatrix}9 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}9^2 & 14709\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}9^3 & 72162381\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}9^4 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

一变结束。矩阵右上方为 0，开方结束。解为 $x$ ＝4909。

**（08）四商十二位例：** $x^3$ ＝250881416443

初商取为 6000：以{1,0,0,－250881416443}进行一变：

$$\begin{bmatrix}6000 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6000^2 & 6000\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6000^3 & 36000000\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6000^4 & -34881416443\\0 & 1\end{bmatrix}$$

一变结束。以{1,6000,36000000}进行二变：

$$\begin{bmatrix}6000 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6000^2 & 12000\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6000^3 & 108000000\\0 & 1\end{bmatrix}$$

二变结束。以{1,12000}进行三变：

$$\begin{bmatrix}6000 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6000^2 & 18000\\0 & 1\end{bmatrix}$$

三变结束。

次商取为 300：以{1, 18000,108000000,－34881416443}进行一变：

$$\begin{bmatrix}300 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}300^2 & 18300\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}300^3 & 113490000\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}300^4 & -834416443\\0 & 1\end{bmatrix}$$

一变结束。以{1,18300,113490000}进行二变：

$$\begin{bmatrix}300 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}300^2 & 18600\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}300^3 & 119070000\\0 & 1\end{bmatrix}$$

二变结束。以{1,18600}进行三变：

$$\begin{bmatrix}300 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}300^2 & 18900\\0 & 1\end{bmatrix}$$

三变结束。

四商取为 7：以{1,18900,119070000,－834416443}进行一变：

$$\begin{bmatrix}7 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}7^2 & 18907\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}7^3 & 119202349\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}7^4 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

一变结束。矩阵右上方为 0，开方结束。解为 $x$＝6307。

**（09）三商七位例：** $x^3$＝9159899

初商取为 200：以{1,0,0,－9159899}进行一变：

$$\begin{bmatrix}200 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}200^2 & 200\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}200^3 & 40000\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}200^4 & -1159899\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

一变结束。以{1,200,40000}进行二变：

$$\begin{bmatrix}200 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}200^2 & 400\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}200^3 & 120000\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

二变结束。以{1,400}进行三变：

$$\begin{bmatrix}200 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}200^2 & 600\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

三变结束。

次商取为 9：以{1,600,120000,－1159899}进行一变：

$$\begin{bmatrix}9 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}9^2 & 609\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}9^3 & 125481\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}9^4 & -30570\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

一变结束。矩阵右上方为 30570，开立方结束。

近似值可取为 $x \approx 209 + \dfrac{30570}{1+609+125481} \approx 209.242444$

准确的近似值解为 $x$≈209.2330223。

# 第十一章 正负开方术中的精确度问题

[明]陈荩谟在其《度测》一书中有两个附录：《开平方说》与《开立方说》。《开平方说》（07）命分法例，《开立方说》（09）三商七位例，除命分法。其中“除命分法”例中研究了高精确度的计算问题。他正确地指出无理数“为无方之根，开之终莫能尽。”并且给出具体的运算方法：“此三开不成方之余实也。欲求细分，以前《开平方》下命分第一法求之，即将细分之大略，更求其细。又有命分第二法列于后，开平方，开立方俱可通用。”（《续修四库全书》1044.子部.天文算法类（数学），469～526 页，《开平方说》1 卷，《开立方说》1 卷。上海古籍出版社，2002 年 4 月。）

由于计算机是做浮点运算，取小数计算时会出现机器运算误差。因此，陈荩谟关于正负开方术中的精确度计算就显得很有价值了，我们特意整理出来，以资参考：

**《开平方说》（07）命分法例**

| | |
|---|---|
| 积实 | 1821 |
| 余实 | 221 |
| 余实 | 57 |

初商起双位，实前加 4 算，在平方筹四格内除实 1600，置方根 40 为初商。

次倍 4 作 8，取八号筹列平方筹左，初商下加 2 算于二格内，于实 164 为次商 2，所余 221；欲总开作 43，则少 28；今开作 42，则多出 57 个。

此 57 是不成方之数。再倍次商 2 作 4，取四号筹列平方筹左，八号筹右，视一格内 0841 之数，命为 841 分之 570；言再有 271 分便是得开方 421 分也。商位愈多，则命分愈细，其平方筹之隅数定为分数上位，则层层而升之，例见《开立方说》之末。

**（07）命分法例：** $x^2=1821$

初商取为 40：以{1,0,－1821}进行一变：

$$\begin{bmatrix}40 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}40^2 & 40\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}40^3 & -221\\0 & 1\end{bmatrix}$$

一变结束。以{1,40}进行二变：

$$\begin{bmatrix}40 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}40^2 & 80\\0 & 1\end{bmatrix}$$

二变结束。

若次商取为 2：以{1,80,－221}进行一变：

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}2^2 & 82\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}2^3 & -57\\0 & 1\end{bmatrix}$$

一变结束。矩阵右上方为－57，开方结束。

近似值可取为 $x\approx 42\dfrac{57}{1+82}\approx 42.68674698$

若次商取为 3：以{1,80,－221}进行一变：

$$\begin{bmatrix}3 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}3^2 & 83\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}3^3 & 28\\0 & 1\end{bmatrix}$$

一变结束。矩阵右上方为 28，开方结束。

近似值可取为 $x \approx 43-\dfrac{28}{1+83} \approx 42.66666667$

准确的近似值解为 $x \approx 42.673176$。

若需要更高的精确度，可继续如下的运算：

若次商取为 2：以{1,80,－221}进行一变：

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2^2 & 82 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2^3 & -57 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

一变结束。以{1,82}进行二变：

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2^2 & 84 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

二变结束。

我们的运算要求限制在整数范围内进行，可作如下变通：

{1,84,－57}要变为{1,840,－5700}方可。

亦即{ $a_2, a_1, a_0$ }变换为{ $a_2 \times 1, a_1 \times 10, a_0 \times 100$ }；

于是，三商取为 6（小数点后 1 位数字）：以{1,840,－5700}进行一变：

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6^2 & 846 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6^3 & -624 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

一变结束。以{1,846}进行二变：

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6^2 & 852 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

二变结束。

四商取为 7（小数点后 2 位数字）：以{1,8520,－62400}进行一变：

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7^2 & 8527 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7^3 & -2711 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

一变结束。以{1,8527}进行二变：

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7^2 & 8534 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

二变结束。

五商取为 3（小数点后 3 位数字）：以{1,85340,－271100}进行一变：

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3^2 & 85343 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3^3 & -15071 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

一变结束。以{1,85343}进行二变：

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3^2 & 85346 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

二变结束。

这里可精确到小数点后三位数。为获得更高的精确度，继续上面的运算即可。

**《开立方说》（09）三商七位例，除命分法**

| | |
|---|---|
| 积实 | 9159899 |
| 余实 | 1159899 |
| 平廉 | 120000 |
| 长廉 | 600 |
| 自乘数 | 81 |

置实初商起单位，在实前二位上加 2 算，于立方筹二格内除实 008000000；置方根 200 为初商。

次用初商 200 自乘得 40000 为平廉面，三倍之得 120000 为平廉法，取一二号筹列立方筹左。

以初商 200 三倍之得 600 为长廉法，取六号筹列立方筹右。

视列筹内一数至九数皆多于余实，则知商有空位也。置次商方根 200，再以初、次两商 200 自乘得 40000 为平廉面，三倍之得 120000 为平廉法，取一二号筹列立方筹左。

以初、次两商 200 三倍之得 600 为长廉法，取六〇号筹列立方筹右。

次于列筹内并数，取其近少于余实者，至第九格遇 1080729 为约数，另列之。

次向右九格内自乘数 81，乘长廉法 600 得 48600，并约数得 1129329，除余实置三商方根 209。

| | |
|---|---|
| 余实 | 30570 |
| 平廉 | 131043 |
| 长廉 | 627 |
| 自乘数 | 40 |

此三开不成方之余实也。欲求细分，以前《开平方》下命分第一法求之，即将细分之大略，更求其细。又有命分第二法列于后，开立方俱可通用。

余实更加 3，空得余分 30570000，以前商 209 自乘为平廉面 43681，三倍之得 131043，筹列立方筹左。

以前商 209 三倍之得 627 为长廉法，取六二七号筹列立方筹右。

次于列筹内并数，取其近少于余实者，至第二格遇 16208608 为约数，另列之。

次向右二格内自乘数取 40，乘长廉法 627 得 25080，并约数得 16233688。

除实未尽，得立方根 209 又 10 分分之 2。

| | |
|---|---|
| 余实 | 4336312 |
| 平廉 | 13129392 |
| 长廉 | 6276 |
| 自乘数 | 90 |

此四开不成方之余实也。更加三空得 4336312000

以前商 2092 自乘得 4376464 为平廉面，三倍之得 13129392 为平廉法，取一三一九三九二号筹列立方筹左。

以前商 2092 三倍之得 6276 为长廉法，此因余分升位，得数取六二七六筹列立方筹右。

次于列筹并数，取其近少于余实者，至第三格遇 3938817627 为约数，另列之。

次向右三格内自乘数取 90，乘长廉法得 25080，并得 3939382467，除实未尽，得立方根 209 又 100 分分之 23。

| | |
|---|---|
| 余实 | 396929533 |

| | |
|---|---|
| 平廉 | 1313315787 |
| 长廉 | 62769 |
| 自乘数 | 90 |

此五开不成方之余实也。更加三空得 396929533000。

以前商 20923 自乘得 437771929 为平廉面，三倍之得 1313315787 为平廉法，取一三一三三一五七八七号筹列立方筹左。

以前商 20923 三倍之得 62769 为长廉法，取六二七六九筹列立方筹右。

次于列筹并数，取其近少于余实者，至第三格遇 393994736127 为约数，另列之。

次向右三格内自乘数取 90，乘长廉法得 5649210，并得 394559657127，除实未尽，得立方根 209 又 1000 分分之 233，是余实为无方之根，开之终莫能尽。

**（09）三商七位例：** $x^3=9159899$

初商取为 200：以{1,0,0,－9159899}进行一变：

$$\begin{bmatrix}200 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}200^2 & 200\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}200^3 & 40000\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}200^4 & -1159899\\0 & 1\end{bmatrix}$$

一变结束。以{1,200,40000}进行二变：

$$\begin{bmatrix}200 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}200^2 & 400\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}200^3 & 120000\\0 & 1\end{bmatrix}$$

二变结束。以{1,200}进行三变：

$$\begin{bmatrix}200 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}200^2 & 600\\0 & 1\end{bmatrix}$$

三变结束。

次商取为 9：以{1,600,120000,－1159899}进行一变：

$$\begin{bmatrix}9 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}9^2 & 609\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}9^3 & 125481\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}9^4 & -30570\\0 & 1\end{bmatrix}$$

一变结束。矩阵右上方为－30570，开立方结束。

近似值可取为 $x\approx 209+\dfrac{30570}{1+609+125481}\approx 209.242444$

准确的近似值解为 $x\approx 209.2330223$。

若需要更高的精确度，可继续如下的运算：

次商取为 9：以{1,600,120000,－1159899}进行一变：

$$\begin{bmatrix}9 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}9^2 & 609\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}9^3 & 125481\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}9^4 & -30570\\0 & 1\end{bmatrix}$$

一变结束。以{1,609,125481}进行二变：

$$\begin{bmatrix}9 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}9^2 & 618\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}9^3 & 131043\\0 & 1\end{bmatrix}$$

二变结束。以{1,618}进行三变：

$$\begin{bmatrix}9 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}9^2 & 627\\0 & 1\end{bmatrix}$$

三变结束。
我们的运算要求限制在整数范围内进行，可作如下变通：
{1,627,131043,－30570}要变为{1,6270,13104300,－30570000}方可。

亦即$\{a_3,a_2,a_1,a_0\}$变换为$\{a_3\times1,a_2\times10,a_1\times100,a_0\times1000\}$；

于是，三商取为 2（小数点后 1 位数字）：以{1,6270,13104300,−30570000}进行一变：

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2^2 & 6272\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2^3 & 13116844\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2^4 & -4336312\\0 & 1\end{bmatrix}$$

一变结束。以{1,6272,13116844}进行二变：

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2^2 & 6274\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2^3 & 13129392\\0 & 1\end{bmatrix}$$

二变结束。以{1,618}进行三变：

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2^2 & 6276\\0 & 1\end{bmatrix}$$

三变结束。
四商取为 3（小数点后 2 位数字）：以{1,62760, 1312939200,－4336312000}进行一变：

$$\begin{bmatrix}3 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3^2 & 62763\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3^3 & 1313127489\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3^4 & -396929533\\0 & 1\end{bmatrix}$$

一变结束。以{1,62763,1313127489}进行二变：

$$\begin{bmatrix}3 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3^2 & 62766\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3^3 & 1313315787\\0 & 1\end{bmatrix}$$

二变结束。以{1,62766}进行三变：

$$\begin{bmatrix}3 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3^2 & 62769\\0 & 1\end{bmatrix}$$

三变结束。
五商取为 3（小数点后 3 位数字）：
以{1,627690, 131331578700,－396929533000}进行一变：

$$\begin{bmatrix}3 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3^2 & 627693\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3^3 & 131333461779\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3^4 & -2929147663\\0 & 1\end{bmatrix}$$

一变结束。以{1,627693, 131333461779}进行二变：

$$\begin{bmatrix}3 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3^2 & 627696\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3^3 & 131335344867\\0 & 1\end{bmatrix}$$

二变结束。以{1,627696}进行三变：

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3^2 & 627699 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

三变结束。

六商取为 0（小数点后 4 位数字）：以{1,6276990,13133534486700,－2929147663000}进行变换，数值仍旧是原来的数值。在这里，不能像整数部分那样处理，那里的 0 是可以忽略不计的。

七商取为 2（小数点后 5 位数字）：

以{1,62769900,1313353448670000,－2929147663000000}进行一变：

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2^2 & 62769902 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2^3 & 1313353574209804 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2^4 & -302440514580392 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

一变结束。以{1,6272,13116844}进行二变：

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2^2 & 62769904 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2^3 & 1313353699749612 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

二变结束。以{1,618}进行三变：

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2^2 & 62769906 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

三变结束。

八商取为 2（小数点后 6 位数字）：

以{1, 627699060,131335369974961200,－302440514580392000}继续进行变换。只要一变结束时矩阵右上方的数值仍然为负数，则说明变形正确；为零则可结束；若为正数，则说明变形出现问题，应该调整试商了。

这里已经精确到小数点后六位数了。为获得更高的精确度，继续上面的运算即可。

## Horner（霍纳）论文中的近似值计算问题

练习 II. 求 $x^3-2x=5$ 的近似值解。

初商取为 2：以{1,0,－2,－5}进行一变：

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2^2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2^3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2^4 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

一变结束。以{1,2,2}进行二变：

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2^2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2^3 & 10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

二变结束。以{1,4}进行三变：

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2^2 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

三变结束。得到方程： $x^3+6x^2+10x=1$；

以下是小数点后数字的计算：

次商取为 94：以{1,6×10^3,10×10^6,－1×10^9}进行一变：

$$\begin{bmatrix} 94 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 94^2 & 6094 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 94^3 & 10572836 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 94^4 & -6153416 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

一变结束。以{1,6094,10572836}进行二变：

$$\begin{bmatrix} 94 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 94^2 & 6188 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 94^3 & 11154508 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

二变结束。以{1,6188}进行三变：

$$\begin{bmatrix} 94 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 94^2 & 6282 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

三变结束。

三商取为 55148：以{1,6282×10^5,11154508×10^10,－6153416×10^15}进行一变：

$$\begin{bmatrix} 55148 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 55148^2 & 628255148 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 55148^3 & 111579727014901904 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 55148^4 & -17214582189798208 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

一变结束。以{1,628255148,111579727014901904}进行二变：

$$\begin{bmatrix} 55148 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 55148^2 & 628310296 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 55148^3 & 111614377071105712 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

二变结束。以{1,628310296}进行三变：

$$\begin{bmatrix} 55148 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 55148^2 & 628365444 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

三变结束。

四商取为 1542326590：以{1,628365444×10^10,111614377071105712×10^20,－17214582189798208×10^30}进行一变：

$$\begin{bmatrix} 1542326590 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1542326590^2 & 6283654441542326590 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1542326590^3 & 1116143771680201852756233091022102810 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1542326590^4 & -1654556505926796915478720558423282100 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

一变结束。以{1,6283654441542326590,111614377168020185275623309102210281 00}进行二变：

$$\begin{bmatrix} 1542326590 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1542326590^2 & 6283654443084653180 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1542326590^3 & 11161437726493465857503433130663084300 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

二变结束。以{1,6283654443084653180}进行三变：

$$\begin{bmatrix} 1542326590 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1542326590^2 & 6283654444626979770 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

三变结束。

这里已经精确到小数点后 18 位数了。为获得更高的精确度，继续上面的运算即可。

# 第十二章 笔算开高次方

如何用笔算开高次方（暂时只考虑一个正数值），这是很多人都感兴趣的问题。其实，这个问题的本质是求代数方程$x^n = A$的数值解，其算法早在宋朝时期（1247 年之前）就由秦九韶彻底解决了，其具体内容可参考《普通高中课程标准实验教科书·数学 3·必修》第 37～39 页的“1.3 算法案例·案例 2 秦九韶算法”。我们举例说明如下：

**第一类：可以开尽的，即可求出其精确值的：**

【01】求 28561 的四次方根：

秦九韶算法表示：

| | |
|---|---|
| 首商 | $x$＝10 |
| 一变 | $(((x+0)x+0)x+0)x-28561=-18561$（一变结果） |
| | $((x+0)x+0)x+0=1000$ |
| | $(x+0)x+0=100$ |
| | $x+0=10$ |
| 二变 | $((x+10)x+100)x+1000=4000$（二变结果） |
| | $(x+10)x+100=300$ |
| | $x+10=20$ |
| 三变 | $(x+20)x+300=600$（三变结果） |
| | $x+20=30$ |
| 四变 | $x+30=40$（四变结果） |
| | |
| 次商 | $x$＝3 |
| 一变 | $(((x+40)x+600)x+4000)x-18561=0$（一变结果） |
| | $((x+40)x+600)x+4000=6187$ |
| | $(x+40)x+600=729$ |
| | $x+40=43$ |

大衍（DaYan）矩阵表示：方程：$x^4=28561$的解估计为两位数。

【开四次方，每位试商都有四变；亦即：开$n$次方，每位试商都有$n$变；】

百位数试商取为 30：一变：

$$\begin{bmatrix}10 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10^2 & 10\\0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}10 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10^2 & 10\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10^3 & 100\\0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}10 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10^3 & 100\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10^4 & 1000\\0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}10 & -28561\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10^4 & 1000\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10^5 & -18561\\0 & 1\end{bmatrix};$$

二变：取得到结果的右上方的 1000，100，10 和 $x^4$ 的系数 1 进行下面的运算：

$$\begin{bmatrix}10 & 10\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10^2 & 20\\0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}10 & 100\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10^2 & 20\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10^3 & 300\\0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}10 & 1000\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10^3 & 300\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10^4 & 4000\\0 & 1\end{bmatrix};$$

三变：取得到结果的右上方的 300，20 和 $x^4$ 的系数 1 进行下面的运算：

$$\begin{bmatrix}10 & 20\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10^2 & 30\\0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}10 & 300\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10^2 & 30\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10^3 & 600\\0 & 1\end{bmatrix};$$

四变：取得到结果的右上方的 30 和 $x^4$ 的系数 1 进行下面的运算：

$$\begin{bmatrix}10 & 30\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10^2 & 40\\0 & 1\end{bmatrix};$$

四变结束。

个位数试商取为 3：取－18561，4000，600，40，1 进行一变：

$$\begin{bmatrix}3 & 40\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3^2 & 43\\0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}3 & 600\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3^2 & 43\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3^3 & 729\\0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}3 & 4000\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3^3 & 729\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3^4 & 6187\\0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}3 & -18561\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3^4 & 6187\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3^5 & 0\\0 & 1\end{bmatrix};$$

矩阵右上方为 0，开方结束。方程的解为 $x=13$；

带运算关系的简单表示：

| 系数 | 1 | 0 | 0 | 0 | －28561 |
|---|---|---|---|---|---|
| 首商 10 | 1 | 10×1＋0<br>＝10 | 10×10＋0<br>＝100 | 10×100＋0<br>＝1000 | 10×1000－28561<br>＝－18561<br>（一变结果） |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 10×1＋10<br>＝20 | 10×20＋100<br>＝300 | 10×300＋1000<br>＝4000<br>（二变结果） | |
| | 1 | 10×1＋<br>＝30 | 10×30＋300<br>＝600<br>（三变结果） | | |
| | 1 | 10×1＋30<br>＝40<br>（四变结果） | | | |
| 次商 3 | 1 | 3×1＋40<br>＝43 | 3×43＋600<br>＝729 | 3×729＋4000<br>＝6187 | 3×6187－18561<br>＝0（一变结果） |

不带运算关系的简单表示：

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 系数 | 1 | 0 | 0 | 0 | －28561 |
| 首商 10 | 1 | 10 | 100 | 1000 | －18561<br>（一变结果） |
| | 1 | 20 | 300 | 4000<br>（二变结果） | |
| | 1 | 30 | 600<br>（三变结果） | | |
| | 1 | 40<br>（四变结果） | | | |
| 次商 3 | 1 | 43 | 729 | 6187 | 0（一变结果） |

这实际上就是通常教科书所谓的 Horner's Method（霍纳方法）了。为简便起见，后面就只提供不带运算关系的简单表示，省略的运算关系请读者自行补充。

【编者注：老实说，Horner（1819 年）的论文我认真读过，原本是计划翻译成中文版的，但是，Horner 的表述实在是太糟糕了，逻辑关系混乱不堪，与秦九韶的叙述比较，实在是没有翻译的价值。与其读 Horner 的论文，还不如直接去读 J.L.Lagrange 在 1808 年出版的 Traité des équations numériquesde tous les degrés，avec des notes sur plusieurs points de lathéorie des equations algébriques（各阶数值方程的解法论述，及代数方程式的几点说明）。】

【02】求 6436343 的五次方根：

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 系数 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6436343 |
| 首商 20 | 1 | 20 | 400 | 8000 | 160000 | －3236343 |
| | 1 | 40 | 1200 | 32000 | 800000 | |
| | 1 | 60 | 2400 | 80000 | | |
| | 1 | 80 | 4000 | | | |
| | 1 | 100 | | | | |
| 次商 3 | 1 | 103 | 4309 | 92927 | 1078781 | 0 |
| | | | | | | |

【03】求 7477247.04957 的五次方根：

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 系数 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 7477247.04957 |
| 首商 20 | 1 | 20 | 400 | 8000 | 160000 | －4277247.04957 |
| | 1 | 40 | 1200 | 32000 | 800000 | |
| | 1 | 60 | 2400 | 80000 | | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 80 | 4000 | | | |
| | 1 | 100 | | | | |
| 次商 3 | 1 | 103 | 4309 | 92927 | 1078781 | －1040904.04957 |
| | 1 | 106 | 4627 | 106808 | 1399205 | |
| | 1 | 109 | 4954 | 121670 | | |
| | 1 | 112 | 5290 | | | |
| | 1 | 115 | | | | |
| 三商 0.7 | 1 | 115.7 | 5370.99 | 125429.693 | 1487005.7851 | 0 |

【04】求 62748517 的七次方根：

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 系数 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | －62748517 |
| 首商 10 | 1 | 10 | 100 | 1000 | 10000 | 100000 | 1000000 | －52748517 |
| | 1 | 20 | 300 | 4000 | 50000 | 600000 | 7000000 | |
| | 1 | 30 | 600 | 10000 | 150000 | 2100000 | | |
| | 1 | 40 | 1000 | 20000 | 350000 | | | |
| | 1 | 50 | 1500 | 35000 | | | | |
| | 1 | 60 | 2100 | | | | | |
| | 1 | 70 | | | | | | |
| 次商 3 | 1 | 73 | 2319 | 41957 | 475871 | 3527613 | 17582839 | 0 |

**第二类：不能开尽的，只能求出其近似值：**

【05】求 5 的二次方根（2.2360679774）：

带运算关系的简单表示

| | | | |
|---|---|---|---|
| 系数 | 1 | 0 | －5 |
| 首商 2 | 1 | 2×1＋0＝2 | 1×4－5＝－1 |
| | 1 | 2×1＋2＝4 | |
| 二商 0.2 | 1 | 0.2×1＋4＝4.2 | 0.2×4.2－1＝－0.16 |
| | 1 | 0.2×1＋4.2＝4.4 | |
| 三商 0.03 | 1 | 0.03×1＋4.4＝4.43 | 0.03×4.43－0.16＝－0.0271 |
| | 1 | 0.03×1＋4.43＝4.46 | |
| 四商 0.006 | 1 | 0.006×1＋4.46＝4.466 | 0.006×4.466－0.0271＝－0.000304 |
| | 1 | 0.006×1＋4.466＝4.472 | |
| 五商 0.00006 | 1 | 0.00006×1＋4.472 ＝4.47206 | 0.00006×4.47206－0.000304 ＝－0.0000356764 |
| | 1 | 0.00006×1＋4.47206 ＝4.47212 | |

不带运算关系的简单表示

| | | | |
|---|---|---|---|
| 系数 | 1 | 0 | －5 |
| 首商 2 | 1 | 2 | －1 |
| | 1 | 4 | |
| 二商 0.2 | 1 | 4.2 | －0.16 |
| | 1 | 4.4 | |
| 三商 0.03 | 1 | 4.43 | －0.0271 |
| | 1 | 4.46 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 四商 0.006 | 1 | 4.466 | －0.000304 |
| | 1 | 4.472 | |
| 五商 0.00006 | 1 | 4.47206 | －0.0000356764 |
| | 1 | 4.47212 | |

【06】求 5 的三次方根（1.7099759466）：

带运算关系的简单表示：

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 系数 | 1 | 0 | 0 | －5 |
| 首商 1 | 1 | 1×1＋0＝1 | 1×1＋0＝1 | 1×1－5＝－4 |
| | 1 | 1×1＋1＝2 | 1×2＋1＝3 | |
| | 1 | 1×1＋2＝3 | | |
| 二商 0.7 | 1 | 0.7×1＋3＝3.7 | 0.7×3.7＋3＝5.59 | 0.7×5.59－4＝－0.087 |
| | 1 | 0.7×1＋3.7＝4.4 | 0.7×4.4＋5.59＝8.67 | |
| | 1 | 0.7×1＋4.4＝5.1 | | |
| 三商 0.009 | 1 | 0.009×1＋5.1 ＝5.109 | 0.009×5.109＋8.67 ＝8.715981 | 0.009×8.715981－0.087 ＝－0.008556171 |
| | 1 | 0.009×1＋5.109 ＝5.118 | 0.009×5.118＋8.715981 ＝8.762043 | |
| | 1 | 0.009×1＋5.118 ＝5.127 | | |

不带运算关系的简单表示：

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 系数 | 1 | 0 | 0 | －5 |
| 首商 1 | 1 | 1 | 1 | －4 |
| | 1 | 2 | 3 | |
| | 1 | 3 | | |
| 二商 0.7 | 1 | 3.7 | 5.59 | －0.087 |
| | 1 | 4.4 | 8.67 | |
| | 1 | 5.1 | | |
| 三商 0.009 | 1 | 5.109 | 8.715981 | －0.008556171 |
| | 1 | 5.118 | 8.762043 | |
| | 1 | 5.127 | | |

【07】求 5 的五次方根（1.3797296614）：

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 系数 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | －5 |
| 首商 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | －4 |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |
| | 1 | 3 | 6 | 10 | | |
| | 1 | 4 | 10 | | | |
| | 1 | 5 | | | | |
| 二商 0.3 | 1 | 5.3 | 11.59 | 13.477 | 9.0431 | －1.28707 |
| | 1 | 5.6 | 13.27 | 17.458 | 14.2805 | |
| | 1 | 5.9 | 15.04 | 21.97 | | |
| | 1 | 6.2 | 16.9 | | | |
| | 1 | 6.5 | | | | |
| 三商 0.07 | 1 | 6.57 | 17.3599 | 23.185193 | 15.90346 | －0.17383 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 6.64 | 17.8247 | 24.432922 | 17.61377 | |
| | 1 | 6.71 | 18.2944 | 25.71353 | | |
| | 1 | 6.78 | 18.769 | | | |
| | 1 | 6.85 | | | | |
| 四商 0.009 | 1 | 6.859 | 18.83073 | 25.88300658 | 17.84672 | －0.01321 |
| | 1 | 6.868 | 18.89254 | 26.05303947 | 18.08119 | |
| | 1 | 6.877 | 18.95444 | 26.22362939 | | |
| | 1 | 6.886 | 19.01641 | | | |
| | 1 | 6.895 | | | | |

如何估计某个商的数值？这是个比较复杂的问题。我的方法是：

对 $x^n = A$（或者 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 x + a_0 = 0$）而言，

假设估计的第 $k$ 位商是 $b_k \times 10^m$，如果一变结果仍然是负数，

但是，第 $k$ 位商取为 $(b_k + 1) \times 10^m$ 时，一变结果就变成正数，

则 $b_k$ 就是最佳的第 $k$ 位估商值。

其中，$b_k$ 是集合{1,2,3,4,5,6,7,8,9}中的一个数值。

为什么可以这样做？其具体内容可参考《普通高中课程标准实验教科书•数学 1•必修》第 86～94 页的“3.1 函数与方程”。

# 第十三章 整除性判定

## 一、 $p$ 进制数

我们通常使用的是十进制表示的数，亦即：

$$N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 10^1 + a_0 10^0$$

若将每个数位上的数字拿出来，则可表示为：$[a_n, a_{n-1}, \cdots\cdots, a_1, a_0]_{10}$；

若将 10 更换为 $p$，则有

$N = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 p + a_0 = [a_n a_{n-1} \cdots\cdots a_1 a_0]_p$，（其中 $0 \leqslant a_i < p$）

则称 $N$ 为 $p$ 进制数，或者是 p-adic 数。

给定数 $N$，可按照下述方法获得其 $p$ 进制数：

| 带余除法 | 商 | 余数 |
|---|---|---|
| $q_0 = N = p\ q_1 + a_0$ | $q_1$ | $0 < a_0 < p$ |
| $q_1 = p\ q_2 + a_1$ | $q_2$ | $0 < a_1 < p$ |
| $q_2 = p\ q_3 + a_2$ | $q_3$ | $0 < a_2 < p$ |
| $q_3 = p\ q_4 + a_3$ | $q_4$ | $0 < a_3 < p$ |
| …… | …… | …… |
| $q_{n-1} = p\ q_n + a_{n-1}$ | $q_n$ | $0 < a_{n-1} < p$ |
| $q_n = p\ q_{n+1} + a_n$ | $q_{n+1} = 0$ | $0 < a_n < p$ |

当 $q_{n+1} = 0$ 时，运算停止。

现在，我们用大衍矩阵来表示 $p$ 进制数 $[a_n, a_{n-1}, \cdots\cdots, a_1, a_0]_p$：

| | |
|---|---|
| 带余除法矩阵 | $\begin{bmatrix} N = q_0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} q_1 \\ 1 \end{bmatrix}, \cdots\cdots, \begin{bmatrix} q_n \\ 1 \end{bmatrix}$<br>其中：$\begin{bmatrix} q_{i-1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & a_{i-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_i \\ 1 \end{bmatrix}$；<br>当 $q_{n+1} = 0$ 时，运算停止。 |
| “大衍”矩阵 | $\begin{bmatrix} p & a_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p & a_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \cdots\cdots, \begin{bmatrix} p & a_n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ |

求 $p$ 进制数 $N$： $\prod_{i=0}^{n}\begin{bmatrix} p & a_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p^{n+1} & N \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

注意：大衍矩阵一定要按照下面顺序进行：

$\begin{bmatrix} x & a_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & a_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdots\cdots\begin{bmatrix} x & a_n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$；

否则，结果不正确！！

SYD 曰：【 $p$ -adic 方法】求一术：
所化之数是为实，以 $p$ 为法不变更。
以法除实不间断，所得余数归大衍。
视商为实连续除，商取零时是为止。
以 $p$ 为底求对数，所求长度再加一。

SYD 曰：【 $p$ -adic 方法】大衍术：
左上之数全为 $p$ ，所得余数立右上。
右下天元左下零，无论如何不变更。
左横右竖对乘之，其和立为阵中元。
左上得到 $p$ 之幂，右上露出真面目。

## 二、十进制小数

设 $10^n < p \leqslant 10^{n+1}$，则 $1/p=0.q_1 q_2 \ \ q_3\cdots\cdots q_{n+1}\cdots\cdots$可如下求得：

| 带余除法 | 商 | 余数 |
|---|---|---|
| $10^{n+1}=p\ q_1+a_0$ | $q_1$ | $0\leqslant a_0$ |
| $10\,a_0=p\ q_2+a_1$ | $q_2$ | $0\leqslant a_1$ |
| $10\,a_1=p\ q_3+a_2$ | $q_3$ | $0\leqslant a_2$ |
| $10\,a_2=p\ q_4+a_3$ | $q_4$ | $0\leqslant a_3$ |
| …… | …… | …… |
| $10\,a_{n-1}=p\ q_{n+1}+a_n$ | $q_{n+1}$ | $0\leqslant a_n$ |
| …… | …… | …… |

$\prod_{i=1}^{n}\begin{bmatrix} 10 & q_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10^{n+1} & N \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

其中 $N=q_1 q_2 \ \ q_3\cdots\cdots q_{n+1}\cdots\cdots$；

$1/p=N/10^{n+1}$；

例如：取 $p$ ＝23，则$\{q_1, q_2, q_3, \cdots\cdots, q_{n+1}\}$

＝{0,4,3,4,7,8,2,6,0,8,6,9,5,6,5,2,1,7,3,9,1,3}

计算得：$N$ ＝434782608695652173913，1/23＝ $N/10^{22}$；

## 三、 $p$ 进制数性质

我们介绍几个 $p$ 进制数性质：

性质 01：设 $p^i \equiv b_i (\bmod m)$，则 $m \mid N \Leftrightarrow m \mid S = \sum_{i=0}^{n} a_i\ b_i$；

证明：设 $N = [a_n\ a_{n-1} \cdots\cdots a_1\ a_0]_p$

$= a_n\ p^n + a_{n-1}\ p^{n-1} + \cdots\cdots + a_1\ p + a_0$，（其中 $0 \leqslant a_i < p$）

由于 $p^i \equiv b_i (\bmod m)$，因此

$$N = a_n\ b_n + a_{n-1}\ b_{n-1} + \cdots\cdots + a_1\ b + a_0 \equiv \sum_{i=0}^{n} a_i\ b_i = S\ (\bmod m)$$

结论显然成立。

性质 02：（1）$(p-1) \mid N \Leftrightarrow (p-1) \mid \sum_{i=0}^{n} a_i$；

（2）$(p+1) \mid N \Leftrightarrow (p+1) \mid \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i$；

性质 03：若 $m \mid N$，则 $m \mid N(p^{kl} + \cdots\cdots + p^l + 1)$，其中 $l$>1 是使得 $10^l \equiv 1 (\bmod m)$ 成立的最小值。

其他性质的证明显而易见，请读者自行完成证明。

事实上，性质 01 就是 $p$ 进制下的**整除性判定法则**。

要判定整除性是否可行，直接根据性质 01 去计算当然是可以的。不过，我们这里仍然用大衍矩阵进行求和运算，以求表达方式的一致性，过程如下：

（1）提取$[a_n\ a_{n-1} \cdots\cdots a_1\ a_0]_p$的数字$\{a_0, a_1, \cdots\cdots, a_{n-1}, a_n\}$；

（2）$\prod_{i=0}^{n} \begin{bmatrix} p \bmod m & a_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & S \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;

其中 $p \bmod m$ 表示 $p^i \equiv b_i (\bmod m)$，$S = \sum_{i=0}^{n} a_i\ b_i$，$M = \sum_{i=0}^{n} b_i$；这里的 $p^i$ 会在矩阵运算中自然产生，我们只需要作模运算即可。最后根据 $m \mid S$ 是否成立来判定 $m \mid N$ 的情况。

比如说：
被 7 整除判定法：{1,3,2,6,4,5}
被 13 整除判定法：{1,10,9,12,3,4}
被 17 整除判定法：{1,10,15,14,4,6,9,5,16,7,2,3,13,11,8,12}
被 19 整除判定法：{1,10,5,12,6,3,11,15,17,18,9,14,7,13,16,8,4,2}
被 23 整除判定法：{1,10,8,11,18,19,6,14,2,20,16,22,13,15,12,5,4,17,9,21,3,7}
……
如此等等，不一而足。
我们在十进制下，以 7 和 23 为例说明如下：

（一）被 7 整除的判定：$[a_n, a_{n-1}, \cdots\cdots, a_1, a_0]_{10}$＝691355 的数字：

$\{a_0, a_1, \cdots\cdots, a_{n-1}, a_n\}$＝{5,5,3,1,9,6}

直接求出和：1×5＋3×5＋2×3＋6×1＋4×9＋5×6＝98＝7×14，
因此，691355 可被 7 整除；
事实上，691355＝7×98765；

（二）被 23 整除的判定：$[a_n, a_{n-1}, \cdots\cdots, a_1, a_0]_{10}$＝2839506149839506147 的数字：

$\{a_0, a_1, \cdots\cdots, a_{n-1}, a_n\}$＝{7,4,1,6,0,5,9,3,8,9,4,1,6,0,5,9,3,8,2}

用大衍矩阵求出和：$\prod_{i=0}^{n}\begin{bmatrix}10 \bmod 23 & a_i \\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}21 & 943 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$，

显然，943/23＝41；结束。

当然，943 能否被 23 整除，也可以这样判定：943 的数字：$\{a_0, a_1, a_2\}$＝{3,4,9}，

用大衍矩阵求出和：$\begin{bmatrix}10 & 3 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10 & 4 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10 & 9 \\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8 & 43 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10 & 9 \\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}80 & 115 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$；

再判定 115 能否被 23 整除：115 的数字：$\{a_0, a_1, a_2\}$＝{5,1,1}，

用大衍矩阵求出和：$\begin{bmatrix}10 & 5 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10 & 1 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10 & 1 \\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8 & 15 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10 & 1 \\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}80 & 23 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$；

故 2839506149839506147 可被 23 整除。
事实上，2839506149839506147＝23×123456789123456789；
在计算机上，这些计算通过编程可以很容易地处理，具有相当的实用性。
（三）如果觉得这些数据太小了，可以试一试下面这个：
判定 2299999999999999999999999999999999999999999999998689 能否被 23 整除；这是个 52 位数字的数，用大衍矩阵求出的和是：$\prod_{i=0}^{n}\begin{bmatrix}10 \bmod 23 & a_i \\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 5152 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$；

其中 5152÷23＝224；
（四）或者，让我们去判定 RSA-768 吧：$N$ ＝

1230186684530117755130494958384962720772853569595334792197322452151726400507263657518745202199786469389956474942774063845925192557326303453731548268507917026122142913461670429214311602221240479274737794080665351419597459856902143413＝

3347807169895689878604416984821269081770479498371376856891243138898288379387800228761471165253174308773781446799948 9×

3674604366679959042824463379962795263227915816434308764267603228381573966651127923337341714339681027009279873630891 7

取 $m$ ＝334780716989568987860441698482126908177047949837137685689124313889828837938780022876147116525317430877378144679994 89，

用大衍矩阵求出和：$\prod_{i=0}^{n}\begin{bmatrix}10\bmod m & a_i\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}M & S\\ 0 & 1\end{bmatrix}$；其中

$M$ ＝67336328340600314380218466355285573119660198689193745237257759392180665048289980658237720661186248236855105135866 32，

$S$ ＝17241206924962802874812747471829535771117969416612590812989902165326185153847171178121576501053847690184974451019736835

＝17241206924962802874812747471829535771117969416612590812989902165326185153847171178121576501053847690184974451019736835×515；

若感到这里的 $S$ 仍然太大，我们可以对这里的 $S$ 再作一次判定：

取 $m=S$ ＝17241206924962802874812747471829535771117969416612590812989902165326185153847171178121576501053847690184974451019736835；

用大衍矩阵求出和：$\prod_{i=0}^{n}\begin{bmatrix}10\bmod m & a_i\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}M & S\\ 0 & 1\end{bmatrix}$；其中

$M$ ＝99983521574332608606466338869252751577738364697328465856744110812610768640716689485629388768339692714818408552635 7

$S$ ＝33478071698956898786044169848212690817704794983713768568912431388982883793878002287614711652531743087737814467999489 0

我想，到了这里，大家应该可以判定了吧。

（五）利用 Wilson 定理判定素数：

Wilson 定理：若 $n>1$，则 $n$ 是素数的充要条件是

$$(n-1)!\equiv -1 \pmod{n}$$

取 $n$ ＝257，则 $(n-1)!$ ＋1＝

857817775342842654119082271681232625157781520279485619859655650377269452553147589377440291360451408450375885342336584306157196834693696475322289288497426025679637332563368786442675207626794560187968867971521143307702077526646451464709187326100832876325702818980773671781454170250523018608495319068138257481070252817559459476987034665712738139286205234756808218860701203611083152093501947437109101726968262861606263662435022840944191408424615936000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000001

用大衍矩阵求出的和是：$\prod_{i=0}^{n}\begin{bmatrix}10\bmod 257 & a_i\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}238 & 254687\\ 0 & 1\end{bmatrix}$；

显然，254687÷257＝991；故 257 是素数。

对于 254687，其大衍矩阵为 $\prod_{i=0}^{n}\begin{bmatrix}10\bmod 257 & a_i\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13 & 2827\\ 0 & 1\end{bmatrix}$；

2827÷257＝11；

对于 2827，其大衍矩阵为 $\prod_{i=0}^{n}\begin{bmatrix}10\bmod 257 & a_i\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}234 & 1285\\ 0 & 1\end{bmatrix}$；

1285÷257＝5；

对于 1285，其大衍矩阵为 $\prod_{i=0}^{n}\begin{bmatrix}10\bmod 257 & a_i\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}234 & 514\\ 0 & 1\end{bmatrix}$；

514÷257＝2；只能到这里了，继续下去毫无意义。

性质 02 中的$(p-1)\mid N \Leftrightarrow (p-1)\mid \sum_{i=0}^{n} a_i$，在十进制中则是我们熟悉的“弃九法”。

不过，这里的结果可以适用于 $p$ 进制数情形。

如果担心出现误差，可同时检验$(p+1)\mid N \Leftrightarrow (p+1)\mid \sum_{i=0}^{n}(-1)^i a_i$；

它们是 $p$ 进制数中计算量最小的情形。

# 第十四章 “五家共井”问题解答

## 一、“五家共井”问题

五家共井问题取自《九章算术》卷第八 方程。这是中国数学史上首次明确地提出不定方程问题。

刘徽指出，《九章算术》的解法是“举率以言之”，实际上是按照解方程的方法处理的，也只给出了最小的一组正整数解。

《九章算术》卷第八 方程

【原文：不逮类】[十三]今有五家共井，甲二绠不足，如乙一绠。乙三绠不足，以丙一绠；丙四绠不足，以丁一绠；丁五绠不足，以戊一绠；戊六绠不足，以甲一绠。如各得所不足一绠，皆逮，问井深、绠长各几何？

答曰：井深七丈二尺一寸。甲绠长二丈六尺五寸。乙绠长一丈九尺一寸。丙绠长一丈四尺八寸。丁绠长一丈二尺九寸。戊绠长七尺六寸。

术曰：如方程，以正负术入之。〔此率初如方程为之，名各一逮井。其后，法得七百二十一，实七十六，是为七百二十一绠而七十六逮井，并用逮之数。以法除实者，而戊一绠逮井之数定，逮七百二十一分之七十六。是故七百二十一为井深，七十六为戊绠之长，举率以言之。〕

【译文】十三、假设五家共用一口水井取水，用甲的井绳 2 根还不够长，还差乙的井绳 1 根那么长；用乙的井绳 3 根还不够长，还差丙的井绳 1 根那么长；用丙的井绳 4 根还不够长，还差丁的井绳 1 根那么长；用丁的井绳 5 根还不够长，还差戊的井绳 1 根那么长；用戊的井绳 6 根还不够长，还差甲的井绳 1 根那么长；如果各家得到所差的一根井绳，都能打到井水。问井深，以及各家井绳长各是多少？

答案：井深 7 丈 2 尺 l 寸。甲的井绳长 2 丈 5 尺 6 寸；乙的井绳长 1 丈 9 尺 1 寸；丙的井绳长 l 丈 4 尺 8 寸；丁的井绳长 1 丈 2 尺 9 寸；戊的井绳长 7 尺 6 寸。

算法：仿照“方程”算法，用正负数算法推算之。此题列置各行，右行起初亦仿“方程”来进行，下实之名各为 1“逮井”。其后（左行经消夺后）法数得 721，实数得 76，即为戊用绳 72I 根而相当于 76 “逮井”。用逮井之数来以“法”除“实”。而戊之绳 l 根的“逮井”之数可以确定，即到达井深的 76/721，于是取 721 为井深，76 为戊绳 1 根之长，这是接比率而言的。

【解答】设诸家绠长分别为 $a_i$，井深为 $p$；已知诸家绠数分别为 $m_i$，于是有

$$\begin{cases} m_1a_1 + a_2 = p \\ m_2a_2 + a_3 = p \\ \vdots \\ m_na_n + a_1 = p \end{cases}$$

经大衍矩阵运算得到：$\prod_{i=1}^{n}\begin{bmatrix} m_i & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & -1 \end{bmatrix}$，

于是有：$(A-(-1)^n)a_1 = B\ p$，

显然有 $(A-(-1)^n)a_1 \equiv 0 \pmod{B}$ 以及 $B\ p \equiv 0 \pmod{A-(-1)^n}$

故可取最小一组值： $p = A-(-1)^n$， $a_1 = B$；

这种由系数构成的大衍矩阵我们称之为形式大衍矩阵。

【SYD 曰：“五家共井”不逮类方法——大衍术（无需求一）】：

诸家共井绠度深，此绠不足如后绠。
诸家轮换如一绠，井深、绠长各几何？
诸家绠数立左上，家数奇偶有玄机。
左下天元右上零，右下天元添负号。
左横右竖对乘之，其和立为阵中元。
右列之元零负一，左列之元天(A)与地(B)。
家数为奇天(A)加一，家数为偶天(A)减一。
井深取此为结果，首家绠长与地(B)同。

## 二、“五家共井”问题的推广

【富逮类推广】

【题目】[十三]今有五家共井，甲取二绠需去乙一绠。乙取三绠需去丙一绠；丙取四绠需去丁一绠；丁取五绠需去戊一绠；戊取六绠需去甲一绠。如各得所逮皆富各绠，问井深、绠长各几何？

【解答】设诸家绠长分别为$a_i$，井深为$p$；已知诸家绠数分别为$m_i$，于是有

$$\begin{cases} m_1a_1 - a_2 = p \\ m_2a_2 - a_3 = p \\ \vdots \\ m_na_n - a_1 = p \end{cases}$$

经大衍矩阵运算得到：$\prod_{i=1}^{n}\begin{bmatrix} m_i & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & 1 \end{bmatrix}$,

于是有：$(A-1)\,a_1 = B\ p$，

显然有$(A-1)\,a_1 \equiv 0 (\bmod B)$以及$B\ p \equiv 0(\bmod (A-1))$

故可取最小一组值：$p = A-1$，$a_1 = B$；

【SYD 曰：“五家共井”富逮类方法——大衍术（无需求一）】：

诸家共井绠度深，所逮皆富去后绠。
诸家轮换去一绠，井深、绠长各几何？
诸家绠数立左上，下行天元右上零。
左横右竖对乘之，其和立为阵中元。
右列之元零和一，左列之元天(A)与地(B)。
井深长度天(A)减一，首家绠长与地(B)同。

【推广到任意情形】

【题目】已知$m_i$，$r_i$，$b$均为常数，并且满足$\begin{cases} m_1a_1 - ba_2 = r_1p \\ m_2a_2 - ba_3 = r_2p \\ \vdots \\ m_na_n - ba_1 = r_np \end{cases}$，求$a_i$和$p$的值。

【解答】经大衍矩阵运算得到：$\prod_{i=1}^{n}\begin{bmatrix} m_i & 0 \\ r_i & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & b \end{bmatrix}$，

于是有：$(A - b^n)a_1 = B\ p$，

显然有$(A - b^n)a_1 \equiv 0 \pmod{B}$以及$B\ p \equiv 0 \pmod{A - b^n}$

故可取最小一组值：$p = A - b^n$，$a_1 = B$；

显然，对应的方程亦可同样处理。