

“调日法”分析

On The Method of Regulating the Day-ratio

石远东

Shi-YuangDong

Email:1994754066@qq.com

目录

01 关于调日法的历史文献·····	1
02 何承天调日法·····	7
03 李锐：日法朔馀强弱考（全面考察）·····	11
04 秦九韶调日法·····	26
05 陈久金“加减调日法”分析·····	40
06 连分数与调日法·····	45
07 如何调日法？编制农历历法·····	55

关于调日法的历史文献

中国古代历法中的天文常数，几乎都用分数表示；它们通常是在实测数据的基础上，按照预定的误差控制计算出来的。这种计算方法叫“调日法”。

何承天“调日法”就是根据实测数据选择适当的数值作为日法的一种算法，其本质就是一种实数的有理逼近算法，我们称之为“何承天调日法”。

那么，中国古代数学家是如何进行“调日法”的？我们分析如下：

一、历史文献简介

关于“调日法”，相关的历史文献很少，均出自宋代人的著述，而且十分简略，先简单罗列几条如下，详细内容见后面的附录：

《宋史·志第二十七·律历七》

调日法、朔余、周天分、斗分、岁差、日度母

附：造历之法，必先立元，元正然后定日法，法定然后度周天，以定分、至，三者有程，则历可成矣。日者，积余成之；度者，积分成之。盖日月始离，初行生分，积分成日。自《四分历》洎古之六历，皆以 940 为日法。率由日行一度，经 365 日 $1/4$ ，是为周天；月行 13 度 $7/19$ ，经 29 日有余，与日相会，是为朔策。史官当会集日月之行，以求合朔。

自汉太初至于今，冬至差十日，如刘歆《三统》复强于古，故先儒谓之最疏。后汉刘洪考验《四分》，于天不合，乃减朔余，苟合时用。自是已降，率意加减，以造日法。宋世何承天更以 $26/49$ 为强率， $9/17$ 为弱率，于强、弱之际以求日法。承天日法 752，得 15 强，1 弱。自后治历者，莫不因承天法，累强、弱之数，皆不悟日月有自然合会之数。

《宋史·志第二十九·律历九》

自《元嘉历》后所立日法，以 $26/49$ 为强率、以 $9/17$ 为弱率，并强弱之数为日法、朔余，自后诸历效之。殊不知日、月会合为朔，并朔余、虚分为日法，盖自然之理。其气节加时，晋、汉以来约而要取，有差半日，今立法推求，得尽其数。后之造历者，莫不遵用焉。其疏谬之甚者，即苗守信之《乾元历》、马重绩之《调元历》、郭绍之《五纪历》也。大概无出于此矣。

《建炎以来朝野杂记·卷五·乙集》

宋何承天考正日晷，知南至之端。又用强弱率以配日立法，以求朔策之余分，乃合简易之要。太祖皇帝建隆二年，始命王处讷造“应天历”。处讷乃用 10002 分为日法（盖用万分增二），得强率 201，得弱率 9；以 26 乘强率，以 9 乘弱率，并二者，得 5307，为朔策之余分，则强弱适中合简易之要，自然无秒。

这些文献都只有概括性的描述，至于给出“调日法”具体做法的，则是下面两则：

[宋]秦九韶《数书九章》“治历演纪”题；

[清]李锐《日法朔余强弱考》；

它们都提供了“调日法”求解的具体过程。我们首先读一读这两个做法：

二、“调日法”与强数，弱数

“秦九韶求强弱公式”：

《数术大略》“治历演纪”题术曰：以历法求之，大衍入之。

调日法，如何承天术，用强弱母子互乘，得数，并之，为朔余。

强率子	17	
强率母	49	$100=49+3\times 17$
弱率子	9	

弱率母	26	
分母变形		$16900 = 169 \times 100 = 169 \times (1 \times 49 + 3 \times 17) = 169 \times 49 + 507 \times 17$
调整 507		$507 = 10 \times 49 + 17$
调整分母		$16900 = (169 + 10 \times 17) \times 49 + 17 \times 17$
分子		$(169 + 10 \times 17) \times 26 + 17 \times 9 = 8967$

这并没有解决问题——因为这不是“何承天调日法”。换言之，秦九韶在《数术大略》“治历演纪”题中，并没有用到“何承天调日法”，而是根据假定的日法 16900 去求强数，弱数，然后求出朔余；这首先需要知道 16900 才能进行，其主要工作是在求强数和弱数，因此，我们称之为“秦九韶求强弱公式”。

我们认为：秦九韶也没有理解“何承天调日法”，给出的算法依然不是“何承天调日法”——因为秦九韶把需要用调日法才能得到的日法 16900 当作已知条件看待了。

“李锐调日法”：

是李锐在《日法朔余强弱考》中首先提出的：

术曰：视当时测定朔余[置其术，朔余以万万乘之，如其术日法而一，所得即其术当时测定朔余也]，在强率约余以下，弱率约余以上者[若在强率约余以上，即不可算]；

列强母于右上，强子于右次，一强于右副，下空；

又列弱母于左上，弱子于左次，左副空；一弱于左下；

并左右两行，得中行，以中上退除中次，为约余，约余多于测定数，即弃去右行；

以中行为右行，仍前左行约余少于测定数，即弃去左行，以中行为左行；

仍前右行，依前累求约余，与当时测定数合，中上即日法，中次即朔余，中副即强数，中下即弱数也。

	左行	中行	右行	
上	弱母	左+右	强母	日法
次	弱子	左+右	强子	朔余
副	0	左+右	1	强数
下	1	左+右	0	弱数

但是，“李锐调日法”运算步骤冗长不堪，致使更多的例外杂入，以至于“十一家日法，凡合者三十五家，不合者十六家。”换言之，“李锐调日法”的算法与“何承天调日法”不同，仍然不是“何承天调日法”。

为减少冗长的运算步骤，李锐提出了改进方案，亦即：

“李锐求强弱公式”：

术曰：置日法，以强母去之，余以 $26 \times 17 = 442$ [此数以弱母去之，适尽。以强母去之，余一]乘之，满 $49 \times 17 = 833$ [此数以强、弱二母去之，皆尽。]去之，余为弱实；以弱母除之，得弱数，以弱实转减日法，余为强实；以强母除之，得强数。

强母	49
强子	26
弱母	17
弱子	9
日法	日余 = mod(日法, 强母)
弱实	弱实 = mod(强子 × 弱母 × 日余, 强母 × 弱母)
弱数	弱数 = 弱实 ÷ 弱母
上	上 = 弱子 × 弱数
强实	强实 = 日法 - 弱实 = 日法 - 弱数 × 弱母

强数	强数=强实÷强母
朔余	朔余=强子×强数+弱子×弱数

可以适当精简为:

[有日法, 求强弱]

强母	49	强母
强子	26	强子
弱母	17	弱母
弱子	9	弱子
日寄	$1457=49\times 29+36$	日寄= $\text{mod}(\text{日法}, \text{强母})$
弱数	$26\times 36=49\times 19+5$	弱数= $\text{mod}(\text{强子}\times \text{日寄}, \text{强母})$
强数	$(1457-17\times 5)\div 49=28$	强数= $(\text{日法}-\text{弱数}\times \text{弱母})\div \text{强母}$
朔余	$26\times 28+9\times 5=773$	朔余=强子×强数+弱子×弱数

这里的“求强弱”计算公式可表示成:

$$\text{弱数}=\text{mod}(\text{强子}\times \text{mod}(\text{日法}, \text{强母}), \text{强母});$$

$$\text{强数}=(\text{日法}-\text{弱数}\times \text{弱母})\div \text{强母};$$

$$\text{朔余}=\text{强子}\times \text{强数}+\text{弱子}\times \text{弱数};$$

此公式意在根据日法求朔余, 使得“弱子/弱母<朔余/日法<强子/强母”成立。

也可以进一步得到“根据朔余求日法”的计算公式:

[有朔余, 求强弱]

强母	49	强母
强子	26	强子
弱母	17	弱母
弱子	9	弱子
朔寄	$773=26\times 29+19$	朔寄= $\text{mod}(\text{朔余}, \text{强子})$
弱寄	$49\times 19=931=26\times 35+21$	弱寄= $\text{mod}(\text{强母}\times \text{朔寄}, \text{强子})$
弱数	$26-21=5$	弱数=强子-弱寄
强数	$(773-9\times 5)\div 26=28$	强数= $(\text{朔余}-\text{弱子}\times \text{弱数})\div \text{强子}$
日法	$49\times 28+17\times 5=1457$	日法=强母×强数+弱母×弱数

这里的“求强弱”计算公式可表示成:

$$\text{弱数}=\text{强子}-\text{mod}(\text{强母}\times \text{mod}(\text{朔余}, \text{强子}), \text{强子});$$

$$\text{强数}=(\text{朔余}-\text{弱数}\times \text{弱子})\div \text{强子};$$

$$\text{日法}=\text{强母}\times \text{强数}+\text{弱母}\times \text{弱数};$$

此公式意在根据朔余求日法, 使得“弱子/弱母<朔余/日法<强子/强母”成立。

不过, 上述公式成立的前提条件是: 强子×弱母-弱子×强母=1; 否则, 不能使用。

显然, 这与“秦九韶求强弱公式”形式上相异, 本质上相同。换言之, 李锐也没有理解“何承天调日法”, 给出的算法仍然不是“何承天调日法”。

不过, “李锐调日法”的出发点与“何承天调日法”基本上是吻合的, 亦即: 以实测数据为基础来确定日法和朔余, 并根据实测数据来判定所得分数是否符合要求的日法和朔余。与秦九韶相比, 这是一大进步。

三、现代观点

我们选择曲安京在《中国历法与数学》(科学出版社, 2005年第一版) 181~182页的说法:

现代天算史家普遍据此认为, 调日法作为一种治历的算法, 为何承天所创。但是, 何承

天调日法究竟如何“调”呢？这仍然是一个有争议的问题。目前业已发表的主张，大体如以下三类：

第一，支持秦九韶说。秦九韶在《数书九章》治历演纪题之术文的一开始写道：

调日法，如何承天术，用强弱母子互乘得数，并之为朔余。

秦氏调日法说的主要思想是：已知日法 A ，求解不定方程 $A=49m+17n$ ，调取得强弱二数 m 与 n ，再与强弱二率（ $26/49$ 与 $9/17$ ）之分子互乘，得朔余 $26m+9n$ ，由此确定历取朔望月常数。严敦杰认为：

按秦法与累强弱之数的“累”义不舍，当不是调日法本法。

基本上否定此说。李继闵近年来撰著鸿文多篇，依算理分析、数据考证、探源索流，从多方面论证和宣扬秦氏调日法的合理性与实用性，反驳批评者的否定性论点。

第二，支持李锐说。清代学者李锐曾对历史上数十部历法的日法朔余推演考证，遂悟得一法，认为调日法的真谛在于“累强弱之数，得中平之率”，并且撰著成文，颇受世人推崇。李锐调日法说的主要思想是：反复利用加成法则，通过与实测值的逐次比较，不断累加强数 m 与弱数 n ，使所得中平之率 $(26m+9n)/(49m+17n)$ 的精度斗达到一定的标准为止。

李锐之说曾获顾观光之补充与宣扬，李潢（“复李锐书”，见文献[11]）、严敦杰（见文献[9]）、刘钝等人皆对李锐的调日法说持认同态度，认为“李锐的考证说明了调日法的本法”，“大致反映了古代调日法的原貌。”

第三，陈久金认为，调日法作为一种治历的算法，是手段而不是目的。因此，历家据此选择日法朔余时，未必拘泥于强弱二率，不一定非要像李锐所说的那样逐次逼近。陈久金给出的算法是：历家通常可以选择前任历法中的某两个日法朔余为强弱二率，根据加成法则，即可直接调取新历的数据。

以上观点我们在后面再详细分析。

四、附录

《宋史·志第二十七·律历七》

○明天历

《崇天历》行之至于嘉祐之末，英宗即位，命殿中丞、判司天监周琮及司天冬官正王炳、丞王栋、主簿周应祥、周安世、马杰、灵台郎杨得言作新历，三年而成。琮言：“旧历气节加时，后天半日；五星之行差半次；日食之候差十刻。”既而司天中官正舒易简与监生石道、李遵更陈家学。于是诏翰林学士范镇、诸王府侍讲孙思恭、国子监直讲刘分攸考定是非，上推《尚书》“辰弗集于房”与《春秋》之日食，参今历之所候，而易简、道、遵等所学疏阔，不可用，新书为密。遂赐名《明天历》诏翰林学士王珪序之，而琮亦为义略冠其首。今纪其历法于后：

调日法朔余、周天分、斗分、岁差、日度母

附：造历之法，必先立元，元正然后定日法，法定然后度周天，以定分、至，三者有程，则历可成矣。日者，积余成之；度者，积分成之。盖日月始离，初行生分，积分成日。自《四分历》洎古之六历，皆以九百四十为日法。率由日行一度，经三百六十五日四分之一，是为周天；月行十三度九分之七，经二十九日有余，与日相会，是为朔策。史官当会集日月之行，以求合朔。

自汉太初至于今，冬至差十日，如刘歆《三统》复强于古，故先儒谓之最疏。后汉刘洪考验《四分》，于天不合，乃减朔余，苟合时用。自是已降，率意加减，以造日法。宋世何承天更以四十九分之二十六为强率，十七分之九为弱率，于强弱之际以求日法。承天日法七百五十二，得一十五强一弱。自后治历者，莫不因承天法、累强弱之数，皆不悟日月有自然合会之数。

今稍悟其失，定新历以三万九千为日法，六百二十四万为度母，九千五百为斗分，二万

六百九十三为朔余，可以上稽于古，下验于今，反覆推求，若应绳准。又以二百三十万一千为月行之余，月行十三度之余。

以一百六十万四百四十七为日行之余。日行周天之余。

乃会日月之行，以盈不足平之，并盈不足，是为一朔之法。日法也，名元法。

今乃以大月乘不足之数，以小月乘盈行之分，平而并之，是为一朔之实。周天分也。

以法约实，得日月相会之数，皆以等数约之，悉得今有之数。盈为朔虚，不足为朔余。

又二法相乘为本母，各母互乘，以减周天，余则岁差生焉，亦以等数约之，即得岁差、度母、周天实用之数。此之一法，理极幽眇，所谓反覆相求，潜遁相通，数有冥符，法有偶会，古历家皆所未达。以等数约之，得三万九千为元法，九千五百为斗分，二万六百九十三为朔余，六百二十四万为日度母，二十二亿七千九百二十万四百四十七为周天分，八万四百四十七为岁差。

《宋史·志第二十九·律历九》

琮又论历曰：“古今之历，必有术过于前人，而可以为万世之法者，乃为胜也。若一行为《大衍历》，议及略例，校正历世，以求历法强弱，为历家体要，得中平之数。刘焯悟日行有盈缩之差。旧历推日行平行一度，至此方悟日行有盈缩，冬至前后定日八十八日八十九分，夏至前后定日九十三日七十四分，冬至前后日行一度有余，夏至前后日行不及一度。

李淳风悟定朔之法，并气朔、闰余，皆同一术。旧历定朔平注一大一小，至此以日行盈缩、月行迟疾加减朔余，余为定朔、望加时，以定大小，不过三数。自此后日食在朔，月食在望，更无晦、二之差。旧历皆须用章岁、章月之数，使闰余有差，淳风造《麟德历》，以气朔、闰余同归一母。

张子信悟月行有交道表里，五星有入气加减。北齐学士张子信因葛荣乱，隐居海岛三十余年，专以圆仪揆测天道，始悟月行有交道表里，在表为外道阳历，在里为内道阴历。月行在内道，则日有食之，月行在外道则无食。若月外之人北户向日之地，则反观有食。又旧历五星率无盈缩，至是始悟五星皆有盈缩、加减之数。

宋何承天始悟测景以定气序。景极长，冬至；景极短，夏至。始立八尺之表，连测十余年，即知旧《景初历》冬至常迟天三日。乃造《元嘉历》，冬至加时比旧退减三日。

晋姜岌始悟以月食所冲之宿，为日所在之度。日所在不知宿度，至此以月食之宿所冲，为日所在宿度。

后汉刘洪作《乾象历》，始悟月行有迟疾数。旧历，月平行十三度十九分度之七，至是始悟月行有迟疾之差，极迟则日行十二度强，极疾则日行十四度太，其迟疾极差五度有余。

宋祖冲之始悟岁差。《书·尧典》曰：“日短星昴，以正仲冬；宵中星虚，以殷仲秋。”至今三千余年，中星所差三十余度，则知每岁有渐差之数，造《大明历》率四十五年九月而退差一度。

唐徐升作《宣明历》，悟日食有气、刻差数。旧历推日食皆平求食分，多不允合，至是推日食，以气刻差数增损之，测日食分数，稍近天验。

《明天历》悟日月会合为朔，所立日法，积年有自然之数，及立法推求晷景，知气节加时所在。自《元嘉历》后所立日法，以四十九分之二十六为强率、以十七分之九为弱率，并强弱之数为日法、朔余，自后诸历效之。殊不知日月会合为朔，并朔余虚分为日法，盖自然之理。其气节加时，晋、汉以来约而要取，有差半日，今立法推求，得尽其数。

后之造历者，莫不遵用焉。其疏谬之甚者，即苗守信之《乾元历》、马重绩之《调元历》、郭绍之《五纪历》也。大概无出于此矣。然造历者，皆须会日月之行，以为晦朔之数，验《春秋》日食，以明强弱。其于气序，则取验于《传》之南至。其日行盈缩、月行迟疾、五星加减、二曜食差、日宿月离、中星晷景、立数立法，悉本之于前语。然后较验，上自夏仲康五年九月“辰弗集于房”，以至于今，其星辰气朔、日月交食等，使三千年间若应准绳。而有

前有后、有亲有疏者，即为中平之数，乃可施于后世。其较验则依一行、孙思恭，取数多而不以少，得为亲密。较日月交食，若一分二刻以下为亲，二分四刻以下为近，三分五刻以上为远。以历注有食而天验无食，或天验有食而历注无食者为失。其较星度，则以差天二度以下为亲，三度以下为近，四度以上为远；其较晷景尺寸，以二分以下为亲，三分以下为近，四分以上为远。若较古而得数多，又近于今，兼立法、立数，得其理而通于本者为最也。”琮自谓善历，尝曰：“世之知历者甚少，近世独孙思恭为妙。”而思恭又尝推刘羲叟为知历焉。

《建炎以来朝野杂记·卷五·乙集》

宋何承天考正日晷，知南至之端。又用强弱率以配日立法，以求朔策之余分，乃合简易之要。北齐张子正以圆仪揆天测，知五星有入气、盈缩之差；傅仁均以合朔定月之大小，不过连三，则日月之食常在朔望；李淳风谓前历日分度数参差不齐，立演撰法使一术以齐之；一行立九服晷漏之术，随所在而求合焉；徐升创气刻二差定日之分。稍验各成一家法，后代述之者，互有损益，渐加精密；自五代之“调元”，次及“钦天”，而历法始弊；调元作于马重绩施于晋代其法，则不复推古上元冬至，七曜之会而起。唐天宝十四载乙未为上元，用正月雨水为气首，盖仿曹士蒦小历之旧，失之矣。“钦天”作于王朴，施于周世宗时，而朴昧乎前人易之要求之不合，遂于朔分之下横立小分，而谓之秒说者，谓“前代诸历朔余未有秒者，若朔余可以用秒，则可随意而加減，何待求日法以齐朔分也”。是时民间又有所谓“万分历”者，明历之士往往鄙之。太祖皇帝建隆二年，始命王处讷造“应天历”。处讷乃用一万二分为日法（盖用万分增二），得强率二百有一，得弱率九；以二十六乘强率，以九乘弱率，并二者，得五千三百七，为朔策之余分，则强弱适中合简易之要，自然无秒。

何承天调日法

何承天是如何调日法的？我们分析如下：

[汉]刘歆“三统历”曰：

闰法十九，因为章岁。合天地终数，得闰法。19

会数四十七。叁天九，两地十，得会数。 $3 \times 9 + 2 \times 10 = 47$

章月二百三十五。五位乘会数，得章月。 $19 \times 12 + 7 = 235 = 5 \times 47$

月周二百五十四。以章月加闰法，得月周。 $235 + 19 = 254$

按照“三统历”约定：闰法十九，章月二百三十五。

因此，闰月周期（简称：闰周）为 235/19；

有了以上数据，即可编制历法了。

何承天默认“三统历”的“会数四十七”和“十九年七闰”作为基本参数；

何承天为什么会选择 $16 \times 47 = 752$ 作为日法？我们来看以下数据：

n	日法 $49A + 17B = 47n$	(强数 A, 弱数 B)	朔余 $26A + 9B$	近似值
9	423	{1,22}	224	0.5295508274
10	470	{3,19}	249	0.5297872340
11	517	{5,16}	274	0.5299806576
12	564	{7,13}	299	0.5301418440
13	611	{9,10}	324	0.5302782324
14	658	{11,7}	349	0.5303951368
15	705	{13,4}	374	0.5304964539
16	752	{15,1}	399	0.5305851064
17	799	{17,-2}	424	0.5306633292
18	846	{2,44}	448	0.5295508274
19	893	{4,41}	473	0.5296752520
20	940	{6,38}	498	0.5297872340
21	987	{8,35}	523	0.5298885512
22	1034	{10,32}	548	0.5299806576
23	1081	{12,29}	573	0.5300647549
24	1128	{14,26}	598	0.5301418440
25	1175	{16,23}	623	0.5302127660
26	1222	{1,69}	647	0.5294599018

其中 A, B 是不定方程 $49A + 17B = 47n$ 的解，要提前解出来，结果如下：

{423,A=1,B=22},{470,A=3,B=19},{517,A=5,B=16},

{564,A=7,B=13},{611,A=9,B=10},{658,A=11,B=7},

{705,A=13,B=4},{752,A=15,B=1},{799,A=17,B=-2},

{846,A=2,B=44},{893,A=4,B=41},{940,A=6,B=38},

{987,A=8,B=35},{1034,A=10,B=32},{1081,A=12,B=29},

{1128,A=14,B=26},{1175,A=16,B=23},{1222,A=1,B=69}

在何承天之前，已知的历法如下：

历法	日法	朔余	约余
[汉]刘歆“三统术”	81	43	0.530864197530864
[后汉]“四分术”	940	499	0.530851063829787
刘洪“乾象术”	1457	773	0.530542210020590
[魏]韩翊“黄初术”	12079	6409	0.530590280652372
杨伟“景初术”	4559	2419	0.530598815529721
[晋]刘智“正术”	35250	18703	0.530581560283688
姜岌“三纪甲子元术”	6063	3217	0.530595414811150
赵[匪文]“玄始术”	89052	47251	0.530600098818668
[宋]何承天“元嘉术”	752	399	0.530585106382979

根据这些数据，显然是取 $16 \times 47 = 752$ 作为日法最为合理。

至于 $17 \times 47 = 799$ ，则是由于 $49 \times 17 - 2 \times 17 = 799$ 中出现了负数，自然就不能考虑了。

现代实测的精确值为 0.5305902777777777，显然，仍然是 752 为最佳选择。

所谓何承天调日法，实际上是预先设定一个日法数值（根据“会数四十七”来选择），然后用逐个验证的办法来确定强数，弱数，从而确定朔望月；

因此，何承天以 $47 \times 16 = 752$ 为日法，再对 $49 \times A + 17 \times B$ 进行验证，确认：

当 $A = 15$ ， $B = 1$ 时， $49 \times A + 17 \times B = 752$ ，从而得到 $26 \times A + 9 \times B = 399$ ；

亦即朔望月为 $29 + (399/752)$ 日；

至于回归年(365+岁余)，则有固定的计算公式。

$(29 + \text{朔余}) \times (12 + \text{闰周}) = (365 + \text{岁余})$ ；

$(365 + \text{岁余}) \div (29 + \text{朔余}) = (12 + \text{闰周})$ ；

朔余，岁余，闰周之中知道任意两个即可推出第三个。

因为：回归年 = 朔望月 \times 闰周，即：

$(29 + 399/752) \times (235/19) = 111035/304 = 365 + 75/304$ ；

实测应该是选择朔余，闰周比较靠谱，时间比较短，容易实现。

岁余则需要若干个回归年的实测，相对困难一些。

实测若选择朔望月，则交食（月食）周期亦可同时考虑。

何承天方法属于非常特殊的情形，难以作为通用方法加以推广。

关于弱率 9/17，强率 26/49 的来由：

[刘宋]何承天之元嘉历所测定的朔余为 0.530585，即日月合宿为 29.530585 日。

为方便计，考察 0.53 即可。何承天在 53/100 附近调整分子，分母，得到：

强率： $(53 - 1)/(100 - 2) = 52/98 = 26/49$ ；

弱率： $(53 + 1)/(100 + 2) = 54/102 = 9/17$ ；

因为，当 $2 < m < 2n$ 时， $\frac{n+1}{m+2} < \frac{n}{m} < \frac{n-1}{m-2}$ ，

所以， $(53 + 1)/(100 + 2) < 53/100 < (53 - 1)/(100 - 2)$ ；

得到 $9/17 = 54/102 < 53/100 < 52/98 = 26/49$ ；

在两位数以内，这是比较容易找到的数据。

更重要的是： $26/49 - 9/17 = 1/(49 \times 17) = 1/833$ ；这一性质保证了后续运算的简洁性与正确性。

何承天根据实测数据判断：朔望月介于 $29 + (9/17)$ 日至 $29 + (26/49)$ 日之间，于是确定弱率 9/17，强率 26/49；

如果认为这样的解释属于牵强附会，则可从缀术（连分数）去考虑：

何承天实测得到的数据应该是：

朔望月：29+约余 530585，回归年：365+岁余 24671；

利用缀术可得到对应的分数近似值：

朔望月约余 530585/1000000：

{0,1,1/2,8/15,9/17,26/49,373/703,**399/752**,6358/11983,6757/12735,19872/37453,106117/200000}

再比较 530585A/1000000 当 A=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 时的分数近似值，可取无变化的最大的分数值 399/752 作为朔望月约余的最佳分数近似值；

{0,1,1/2,8/15,9/17,26/49,373/703,**399/752**,6358/11983,6757/12735,19872/37453,106117/200000}

{0,1,1/2,8/15,9/17,26/49,373/703,**399/752**,110497/208255,994872/1875047,1105369/2083302,2100241/3958349,5305851/10000000}

{0,1,1/2,8/15,9/17,26/49,**399/752**,7208/13585,7607/14337,37636/70933,45243/85270,128122/241473,1326463/2500000}

{0,1,1/2,8/15,9/17,26/49,**399/752**,3617/6817,51037/96190,54654/103007,160345/302204,375344/707415,911033/1717034,2197410/4141483,5305853/10000000}

{0,1,1/2,8/15,9/17,26/49,**399/752**,2021/3809,2420/4561,55261/104151,112942/212863,2652927/5000000}

{0,1,1/2,8/15,9/17,26/49,**399/752**,1622/3057,3643/6866,8908/16789,12551/23655,209724/395269,1061171/2000000}

{0,1,1/2,8/15,9/17,26/49,**399/752**,1223/2305,1622/3057,2845/5362,41452/78125}

{0,1,1/2,8/15,9/17,26/49,**399/752**,824/1553,1223/2305,13054/24603,14277/26908,27331/51511,68939/129930,509904/961021,1598651/3012993,5305857/10000000}

{0,1,1/2,8/15,9/17,26/49,**399/752**,824/1553,2047/3858,31529/59423,65105/122704,161739/304831,2652929/5000000}

{0,1,1/2,8/15,9/17,26/49,**399/752**,824/1553,5343/10070,38225/72043,81793/154156,1265120/2384383,1346913/2538539,5305859/10000000}

回归年岁余 24671/1000000：

{0,1/4,18/73,19/77,56/227,**75/304**,1481/6003,1556/6307,7705/31231,24671/100000}

再比较 24671A/1000000 当 A=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 时的分数近似值，可取无变化的最大的分数值 75/304=150/608 作为朔望月约余的最佳分数近似值；

{0,1/4,18/73,19/77,56/227,**75/304**,1481/6003,1556/6307,7705/31231,24671/100000}

{0,1/4,18/73,19/77,**75/304**,1669/6765,1744/7069,3413/13834,8570/34737,29123/118045,37693/152782,104509/423609,246711/1000000}

{0,1/4,18/73,19/77,**75/304**,544/2205,6059/24559,30839/125000}

{0,1/4,18/73,19/77,**75/304**,319/1293,2627/10648,8200/33237,10827/43885,40681/164892,51508/208777,246713/1000000}

{0,1/4,18/73,19/77,**75/304**,169/685,244/989,1633/6619,6776/27465,21961/89014,50698/205493,123357/500000}

{0,1/4,18/73,19/77,**75/304**,169/685,1089/4414,24127/97793,49343/200000}

{0,1/4,18/73,19/77,**75/304**,94/381,169/685,432/1751,601/2436,1033/4187,1634/6623,2667/1

0810,4301/17433,6968/28243,18237/73919,61679/250000}

{0,1/4,18/73,19/77,**75/304**,94/381,263/1066,620/2513,883/3579,1503/6092,5392/21855,6895/27947,246717/1000000}

{0,1/4,18/73,19/77,**75/304**,94/381,545/2209,3909/15844,27908/113117,31817/128961,123359/500000}

{0,1/4,18/73,19/77,**75/304**,94/381,4023/16306,16186/65605,36395/147516,52581/213121,246719/1000000}

日法朔余强弱考

[清]李锐

序

何承天“调日法”以四十九分之二十六为强率，十七分之九为弱率，累强弱之数得中平之率，以为日法，朔余。唐宋演撰家皆墨守其法，无敢失坠。元、明以来，畴人子弟罔识古义，竟无知其说者。

今年春，读宋史志，忽有启悟，爰列《开元占经》，《授时术议》所载五十一家日法，朔余之数一一考其强弱，凡合者三十五家，不合者十六家。反复推演，验知不合之故，盖有三端：

其一，朔余强于朔率。如杨忠辅“统天术”，朔余 6368，约余 53066666；鲍瀚之讥其“无复强弱之法”者，是也；

【编者注： $6368/12000 - 26/49 = 1/18375$ ，与 $9/17 < 6368/12000 < 26/49$ 矛盾，故此术于率不合。但是，若用“求强弱公式”计算结果：朔余 6367，239 强，17 弱；符合要求。类似问题：[汉]刘歆“三统术”，[后汉]“四分术”，赵[匪父]“元始术”。吴昭素“乾元术”亦可入此类。】

其一，朔余之下增立秒数。如刘孝荣“乾道术”，朔余 15917 秒 76，裴伯寿诋为“不入术格”者是也；

【编者注：虽然是“增立秒数”，其结果却符合要求，应该无伤大雅，可以放大适当倍数后实现转化。类似问题：南宫说“神龙术”，[后周]王朴“钦天术”，刘孝荣“淳熙术”。】

其一，日法积分太多，朔余虽在强弱之间，亦为于率不合。如[晋]刘智“正术”，日法 35250，命为 701 强，53 弱，则朔余正得 18703；若命为 718 强，4 弱，则朔余为 18704，较多一分；

【编者注：“李锐调日法”与“求强弱公式”计算结果不相同。类似问题：[后汉]“四分术”，[後魏]张龙祥“正光术”，[东魏]李业兴“兴和术”，[北齐]宋景业“天保术”，[周]甄鸾“天和术”，马显“丙寅元术”，[隋]张宾“开皇术”。】

玉海载至道元年王睿献新术言“于二万以下修撰法”者是也；

次为一卷，以质当世明算君子，或亦步天者求故之一助也；

嘉庆四年（1799 年）五月十八日

何承天“强弱率”

强母 49，强子 26[以万万平之，得约余 53061224]；

弱母 17，弱子 9[以万万平之，得约余 52941176]；

(01) [汉]刘歆(xīn)“三统术”

日法 81；朔余 43[约余 53086419]；右术于率不合；

【编者注： $43/81 - 26/49 = 1/3969$ ，与 $9/17 < 43/81 < 26/49$ 矛盾；

“李锐调日法”运算：

1 次：日法 66；朔余 35；1 强，1 弱；

2 次：日法 115；朔余 61；2 强，1 弱；故此术于率不合。

“求强弱公式”计算结果：朔余 42，-15 强，48 弱；】

(02) [后汉]“四分术”

日法 940；朔余 499[约余 53085106]；右术于率不合；

【编者注： $499/940 - 26/49 = 11/46060$ ，与 $9/17 < 43/81 < 26/49$ 矛盾。

“李锐调日法”运算：

18 次：日法 899；朔余 477；18 强，1 弱；

19次；日法948；朔余503；19强，1弱；故此术于率不合。

“求强弱公式”计算结果：朔余498，6强，38弱；】

(03) 刘洪“乾象术”

日法1457；朔余773[约余53054221]；右术28强，5弱；

【编者注：刘洪“乾象历”第一次引入月亮视运动的不均匀性。

“李锐调日法”运算次数：9；】

调日法

术曰：视当时测定朔余[置其术，朔余以万万乘之，如其术日法而一，所得即其术当时测定朔余也]，在强率约余以下，弱率约余以上者[若在强率约余以上，即不可算]；

列强母于右上，强子于右次，一强于右副，下空；

又列弱母于左上，弱子于左次，左副空；一弱于左下；

并左右两行，得中行，以中上退除中次，为约余，约余多于测定数，即弃去右行；

以中行为右行，仍前左行约余少于测定数，即弃去左行，以中行为左行；

仍前右行，依前累求约余，与当时测定数合，中上即日法，中次即朔余，中副即强数，中下即弱数也。

	左行	中行	右行	
上	弱母	左+右	强母	日法
次	弱子	左+右	强子	朔余
副	0	左+右	1	强数
下	1	左+右	0	弱数

草曰：置朔余773，以10000000乘之，得7730000000；以日法1457除之，得53054221，即乾象术当时测定朔余也[在强率约余以下，弱率约余以上]。

朔余	7730000000
日法	1457
当时测定朔余	$773 \div 1457 = 0.5305422100$

列强母49于右上，强子26于右次，1强于右副，下空；

又列弱母17于左上，弱子9于左次，左副空；1弱于左下；

并左右两行，得中上66，中次35，中副1，中下1；

	左行	中行	右行	
上	17	66	49	日法
次	9	35	26	$35 \div 66 = 0.5303030303$ 朔余
副	0	1	1	强数
下	1	1	0	弱数

以中上66，退除中次35，得约余5303303，少于测定数，即弃去左行，以中行为左行；仍前右行，并左右两行，得中上115，中次61，中副2，中下1；

	左行	中行	右行	
上	66	115	49	日法
次	35	61	26	$61 \div 115 = 0.5304347826$ 朔余
副	1	2	1	强数
下	1	1	0	弱数

以中上115，退除中次61，得约余53043478，少于测定数，又弃去左行，以中行为左行；仍前右行，并左右两行，得中上164，中次87，中副3，中下1；

	左行	中行	右行	
--	----	----	----	--

上	115	164	49		日法
次	61	87	26	$87 \div 164 = 0.5304878048$	朔余
副	2	3	1		强数
下	1	1	0		弱数

以中上 164，退除中次 87，得约余 53048780，少于测定数，又弃去左行，以中行为左行；仍前右行，并左右两行，得中上 164，中次 87，中副 4，中下 1；

	左行	中行	右行		
上	164	213	49		日法
次	87	113	26	$113 \div 213 = 0.5305164319$	朔余
副	3	4	1		强数
下	1	1	0		弱数

以中上 213，退除中次 113，得约余 53051643，少于测定数，又弃去左行，以中行为左行；仍前右行，并左右两行，得中上 262，中次 139，中副 5，中下 1；

	左行	中行	右行		
上	213	262	49		日法
次	113	139	26	$139 \div 262 = 0.5305343511$	朔余
副	4	5	1		强数
下	1	1	0		弱数

以中上 262，退除中次 139，得约余 53053435，少于测定数，又弃去左行，以中行为左行；仍前右行，并左右两行，得中上 311，中次 165，中副 6，中下 1；

	左行	中行	右行		
上	262	311	49		日法
次	139	165	26	$165 \div 311 = 0.5305466237$	朔余
副	5	6	1		强数
下	1	1	0		弱数

以中上 311，退除中次 165，得约余 53054662，多于测定数，又弃去右行，以中行为右行；仍前左行，并左右两行，得中上 573，中次 304，中副 11，中下 2；

	左行	中行	右行		
上	262	573	311		日法
次	139	304	165	$304 \div 573 = 0.5305410122$	朔余
副	5	11	6		强数
下	1	2	1		弱数

以中上 573，退除中次 304，得约余 53054101，少于测定数，又弃去左行，以中行为左行；仍前右行，并左右两行，得中上 884，中次 469，中副 17，中下 3；

	左行	中行	右行		
上	573	884	311		日法
次	304	469	165	$469 \div 884 = 0.5305429864$	朔余
副	11	17	6		强数
下	2	3	1		弱数

以中上 884，退除中次 469，得约余 53054298，多于测定数，又弃去右行，以中行为右行；仍前左行，并左右两行，得中上 1457，中次 773，中副 28，中下 5；

	左行	中行	右行		
上	573	1457	884		日法

次	304	773	469	$773 \div 1457 = 0.53054221002$	朔余
副	11	28	17		强数
下	2	5	3		弱数

以中上 1457，退除中次 773，得约余 53054221，与测定数合；中上 1457 即日法，中次 773 即朔余，中副 28 即强数，中下 5 即弱数也；它皆仿此。

求日法朔余[有强弱，求日法，朔余，依此术算]

术曰：以强母乘强数，又以弱母乘弱数，并之，得日法；

以强子乘强数，又以弱子乘弱数，并之，得朔余；

草曰：以强母 49 乘强数 28，得 1372，于上；又以弱母 17 乘弱数 5，得 85，并上，得 1457，即日法也；

以强子 26 乘强数 28，得 728，于上；又以弱子 9 乘弱数 5，得 45，并上，得 773，即朔余也；

强母	49
强子	26
强数	28
弱母	17
弱子	9
弱数	5
上	$49 \times 28 = 1372$
日法	$17 \times 5 + 1372 = 1457$
上	$26 \times 28 = 728$
朔余	$9 \times 5 + 728 = 773$

它皆仿此。

求强弱[有日法，求强弱，依此术算]

术曰：置日法，以强母去之，余以 $26 \times 17 = 442$ [此数以弱母去之，适尽。以强母去之，余一] 乘之，满 $49 \times 17 = 833$ [此数以强、弱二母去之，皆尽。] 去之，余为弱实；以弱母除之，得弱数，以弱实转减日法，余为强实；以强母除之，得强数。

【编者注：考虑齐同术： $26/49 = 442/833$ ； $9/17 = 441/833$ ；】

草曰：置日法 1457，以强母 49 去之，余 36，以 442 乘之，得 15912，满 833，去之，余 85 为弱实；以弱母 17 除之，得 5，即弱数也；以弱实 85 转减日法 1457，余 1372，为强实；以强母 49 除之，得 28，即强数也；

强母	49	强母
强子	26	强子
弱母	17	弱母
弱子	9	弱子
日法	$1457 = 49 \times 29 + 36$	日余 = $\text{mod}(\text{日法}, \text{强母})$
弱实	$442 \times 36 = 833 \times 19 + 85$	弱实 = $\text{mod}(\text{强子} \times \text{弱母} \times \text{日余}, \text{强母} \times \text{弱母})$
弱数	$85 \div 17 = 5$	弱数 = 弱实 \div 弱母
上	$9 \times 5 = 45$	上 = 弱子 \times 弱数
强实	$1457 - 85 = 1372$	强实 = 日法 - 弱实 = 日法 - 弱数 \times 弱母
强数	$1372 \div 49 = 28$	强数 = 强实 \div 强母
朔余	$26 \times 28 + 45 = 773$	朔余 = 强子 \times 强数 + 弱子 \times 弱数

它皆仿此。

【编者注：可以适当精简为：

[有日法，求强弱]

强母	49	强母
强子	26	强子
弱母	17	弱母
弱子	9	弱子
日寄	$1457=49\times 29+36$	日寄 $=\text{mod}(\text{日法},\text{强母})$
弱数	$26\times 36=49\times 19+5$	弱数 $=\text{mod}(\text{强子}\times\text{日寄},\text{强母})$
强数	$(1457-17\times 5)\div 49=28$	强数 $=(\text{日法}-\text{弱数}\times\text{弱母})\div\text{强母}$
朔余	$26\times 28+9\times 5=773$	朔余 $=\text{强子}\times\text{强数}+\text{弱子}\times\text{弱数}$

这里的“求强弱”计算公式可表示成：

弱数 $=\text{mod}(\text{强子}\times\text{mod}(\text{日法},\text{强母}),\text{强母})$ ；

强数 $=(\text{日法}-\text{弱数}\times\text{弱母})\div\text{强母}$ ；

朔余 $=\text{强子}\times\text{强数}+\text{弱子}\times\text{弱数}$ ；

此公式意在根据日法求朔余，使得“弱子/弱母 $<$ 朔余/日法 $<$ 强子/强母”成立。

也可以进一步得到“根据朔余求日法”的计算公式：

[有朔余，求强弱]

强母	49	强母
强子	26	强子
弱母	17	弱母
弱子	9	弱子
朔寄	$773=26\times 29+19$	朔寄 $=\text{mod}(\text{朔余},\text{强子})$
弱寄	$49\times 19=931=26\times 35+21$	弱寄 $=\text{mod}(\text{强母}\times\text{朔寄},\text{强子})$
弱数	$26-21=5$	弱数 $=\text{强子}-\text{弱寄}$
强数	$(773-9\times 5)\div 26=28$	强数 $=(\text{朔余}-\text{弱子}\times\text{弱数})\div\text{强子}$
日法	$49\times 28+17\times 5=1457$	日法 $=\text{强母}\times\text{强数}+\text{弱母}\times\text{弱数}$

这里的“求强弱”计算公式可表示成：

弱数 $=\text{强子}-\text{mod}(\text{强母}\times\text{mod}(\text{朔余},\text{强子}),\text{强子})$ ；

强数 $=(\text{朔余}-\text{弱数}\times\text{弱子})\div\text{强子}$ ；

日法 $=\text{强母}\times\text{强数}+\text{弱母}\times\text{弱数}$ ；

此公式意在根据朔余求日法，使得“弱子/弱母 $<$ 朔余/日法 $<$ 强子/强母”成立。

不过，上述公式成立的前提条件是：强子 \times 弱母 $-$ 弱子 \times 强母 $=1$ ；否则，不能使用。】

(04) [魏]韩詡“黄初术”

日法 12079；朔余 6409[约余 53059028]；右术 242 强，13 弱；

【编者注：“李锐调日法”运算次数：24；】

(05) 杨伟“景初术”

日法 4559；朔余 2419[约余 53059881]；右术 92 强，3 弱；

【编者注：“李锐调日法”运算次数：33；】

(06) [晋]刘智“正术”

日法 35250；朔余 18703[约余 53058156]；右术于率不合。

【编者注：“李锐调日法”运算：

23 次：日法 35250；朔余 18703；701 强，53 弱；右术合于率。

“求强弱公式”计算结果：朔余 18704，718 强，4 弱；】

(07) [后秦]姜岌“三纪甲子元术”

日法 6063; 朔余 3217[约余 53059541]; 右术 122 强, 5 弱;

【编者注: “李锐调日法”运算次数: 28 次;】

(08) [凉]赵[匪文]“元始术”

日法 89052; 朔余 47251[约余 53060009]; 右术于率不合。

【编者注: $47251/89052 - 26/49 = 22049/1090887$, 与 $9/17 < 47251/89052 < 26/49$ 矛盾。

“李锐调日法”运算:

49 次: 日法 82271; 朔余 43653; 1662 强, 49 弱;

50 次: 日法 144395; 朔余 76616; 2917 强, 86 弱; 故此术于率不合。

“求强弱公式”计算结果: 朔余 47252, 1816 强, 4 弱;】

(09) [宋]何承天“元嘉术”

日法 752; 朔余 399[约余 53058510]; 右术 15 强, 1 弱;

【编者注: “李锐调日法”运算次数: 15;】

(10) 祖冲之“大明术”

日法 3939; 朔余 2090[约余 53059152]; 右术 79 强, 4 弱;

【编者注: “李锐调日法”运算次数: 23;

祖冲之改变了闰周和冬至测定点, 以提高精确度。】

(11) [梁]“大同术”

日法 1536; 朔余 815[约余 53059895]; 《隋志》及《开元占经》俱无此朔余数; 此以算推知。下刘孝孙术, 马显“丙寅元术”同。案: 《开元占经》载“大同术”, 章岁 619, 纪法 39616; 置纪法, 以章岁除之, 得 64, 是大同以 64 章为一纪也。以古章闰 7 乘章岁, 得 4333; 如古章岁 19 而一, 得 228, 为章闰, 余 1 弃之; 又以 12 乘章岁, 得 7428, 为章中, 以加章闰, 得 7656, 为章月; 以 64 乘之, 得 489984, 为纪月; 凡日法为纪月之约数; 月法为纪日之约数; 以日法除纪月, 得 319, 即约率也。置纪法, 以 365 日乘之, 得 14459840; 又以 4 除纪法, 得 9904, 为假岁余, 加之, 共得 14469744, 为假岁分; 以约率除之, 得 45359, 为月法, 余 223, 弃之; 置月法, 以约率乘之, 得 14469521, 为岁分, 一名纪日; 以日法除月法, 得 29 日, 余 815 为朔余; 右术 31 强, 1 弱;

强母	49	章岁	619
强子	26	纪法	$39616 = 619 \times 64$
弱母	17	章闰	$7 \times 619 = 4333 = 19 \times 228 + 1$
弱子	9	章月	$12 \times 619 + 228 = 7656$
日法	$1536 = 49 \times 31 + 17$	纪月	$7656 \times 64 = 489984$
弱实	$442 \times 17 = 833 \times 9 + 17$	约率	$489984 \div 1536 = 319$
弱数	$17 \div 17 = 1$	假岁余	$39616 \div 4 = 9904$
上	$9 \times 1 = 9$	假岁分	$39616 \times 365 + 9904 = 14469744$
强实	$1536 - 17 = 1519$	月法	$14469744 = 319 \times 45359 + 223$
强数	$1519 \div 49 = 31$	岁分(纪日)	$45359 \times 319 = 14469521$
朔余	$26 \times 31 + 9 = 815$	朔余	$45359 = 1536 \times 29 + 815$
	有日法, 求强弱		二者朔余相同

【编者注: “李锐调日法”运算次数: 31;】

(12) [後魏]张龙祥“正光术”

日法 74952; 朔余 39769[约余 53059291]; 右术于率不合。

【编者注: “李锐调日法”运算:

34 次: 日法 70719; 朔余 37523; 1420 强, 67 弱;

35 次: 日法 108718; 朔余 57685; 2183 强, 103 弱; 故此术于率不合。

“求强弱公式”计算结果：朔余 39770，1522 强，22 弱；】

(13) [东魏]李业兴“兴和术”

日法 208530；朔余 110647[约余 53060470]；右术于率不合。

【编者注：“李锐调日法”运算：

70 次：日法 186638；朔余 99031；3785 强，69 弱；

71 次：日法 354341；朔余 188015；7186 强，131 弱；故此术于率不合。

“求强弱公式”计算结果：朔余 110648，4246 强，28 弱；】

(14) 刘孝孙术

日法 1144；朔余 607[约余 53059440；案：《隋志》及《开元占经》载“刘孝孙术”，章岁 619，纪法 8047，岁余 1966；此章岁与“大同术”同，则亦以 7656 为章月也；置纪法，以章岁除之，得 13，是孝孙以 13 章为一纪也。以 13 乘章月，得 99528，为纪月；以日法除纪月，得 87，为约率；又以 365 日乘纪法，加岁余，得 2939121，为纪日；以约率除之，得 33783，为月法；以日法除之，得 29 日，余 607 为朔余]；右术 23 强，1 弱；

强母	49	章岁	619
强子	26	纪法	8047 = 619 × 13
弱母	17	岁余	1966
弱子	9	章月	7656
日法	1144 = 49 × 23 + 17	纪月	13 × 7656 = 99528
弱实	442 × 17 = 833 × 9 + 17	约率	99528 ÷ 1144 = 87
弱数	17 ÷ 17 = 1	纪日	365 × 8047 + 1966 = 2939121
上	9 × 1 = 9	月法	2939121 ÷ 87 = 33783
强实	1144 - 17 = 1127		33783 ÷ 1144 = 29.5305944056
强数	1127 ÷ 49 = 23	朔余	33783 = 1144 × 29 + 607
朔余	26 × 23 + 9 = 607		
	有日法，求强弱		二者朔余相同

【编者注：“李锐调日法”运算次数：23；】

(15) [北齐]宋景业“天保术”

日法 292635；朔余 155272[约余 53059955]；右术于率不合。

【编者注：“李锐调日法”运算：

50 次：日法 226670；朔余 120271；4577 强，141 弱；

51 次：日法 432441；朔余 229453；8732 强，269 弱；故此术于率不合。

“求强弱公式”计算结果：朔余 155275，5960 强，35 弱；】

(16) [周]甄鸾“天和术”

日法 290160；朔余 153961[约余 53060725]；右术于率不合。

【编者注：“李锐调日法”运算：

112 次：日法 224718；朔余 119237；4567 强，55 弱；

113 次：日法 335035；朔余 177772；6809 强，82 弱；故此术于率不合。

“求强弱公式”计算结果：朔余 153962，5914 强，22 弱；

[日]蕞内清《中国の天文历法》345 页的数据“153991/290160”应该是错误的。】

(17) 马显“丙寅元术”

日法 53563；朔余 28422[约余 53062748；案：《隋志》及《开元占经》载“丙寅元术”，章岁 448，章闰 165，斗分 3167，蓂法 12992；置蓂法，以章岁除之，得 29，是以 29 章为一蓂也。以 12 乘章岁，加章闰，得 5541，为章月；以 29 乘之，得 160689，为蓂月；以日法除之，得 3，为约率；又以 365 日乘蓂法，加入斗分，得 4745247，为蓂日；以约率约之，

得 1581749，为月法；以日法除之，得 29 日，余 28422 为朔余]；右术于率不合。

强母	49	章岁	448
强子	26	章闰	165
弱母	17	斗分	3167
弱子	9	蓂法	$12992=29\times 448$
日法	$53563=49\times 1093+6$	章月	$12\times 448+165=5376+165=5541$
弱实	$442\times 6=833\times 3+153$	蓂月	$5541\times 29=160689$
弱数	$153\div 17=9$	约率	$160689\div 53563=3$
上	$9\times 9=81$	蓂日	$365\times 12992+3167=4745247$
强实	$53563-153=53410$	月法	$4745247\div 3=1581749$
强数	$53410\div 49=1090$		$1581749\div 53563=29.5306274854$
朔余	$26\times 1090+81=28421$	朔余	$1581749=53563\times 29+28422$
	有日法，求强弱		二者朔余差 1

【编者注：“李锐调日法”运算：

1092 次：日法 53525；朔余 28401；1092 强，1 弱；

1093 次：日法 53574；朔余 28427；1093 强，1 弱；故此术于率不合。

“求强弱公式”计算结果：日法 53563，；朔余 28421；1090 强，9 弱；】

(18) [隋]张宾“开皇术”

日法 181920；朔余 96529[约余 53061235]；右术于率不合。

【编者注：“李锐调日法”运算：

3712 次：日法 181905；朔余 96521；3712 强，1 弱；

3713 次：日法 181954；朔余 96547；3713 强，1 弱；故此术于率不合。

“求强弱公式”计算结果：朔余 96528，3696 强，48 弱；】

(19) 张胄元“大业术”

日法 1144；朔余 607；右术与刘孝孙术同。

(20) 刘焯“皇极术”

日法 1242；朔余 659[约余 53059581]；右术 25 强，1 弱；

【编者注：“李锐调日法”运算次数：25；

北齐张子兴发现：“日行在春分后则迟，秋分后则速”，并以算步其“差变之数”，揭开了中国古代历法对太阳周年视运动不均匀性研究的新篇章。据此，刘焯在“皇极历”中创立了二次内插算法，用于计算太阳位置，定朔时刻，月日交食，五星运行，等等。】

(21) [唐]傅仁均“戊寅术”

日法 13006；朔余 6901[约余 53060126]；右术 263 强，7 弱；

【编者注：“李锐调日法”运算次数：42；】

(22) 南宫说“神龙术”

日法 100；朔余 53 秒 6[约余 53060000]；右术于率不合。

【编者注：等价于“日法 1000；朔余 536[约余 53000000]”；

“李锐调日法”运算：

20 次：日法 997；朔余 529；20 强，1 弱；

21 次：日法 1046；朔余 555；21 强，1 弱；故此术于率不合。

乘上 10 后实现转化：

“求强弱公式”计算结果：朔余 53【0】；10 强，30 弱；】

(23) 李淳风“麟德术”

日法 1340；朔余 711[约余 53059701]；右术 27 强，1 弱；

【编者注：“李锐调日法”运算次数：27；

梅文鼎曰：非淳风之“麟德历”不能用定朔。】

(24) [僧]一行“大衍术”

日法 3040；朔余 1613[约余 53059210]；右术 61 强，3 弱；

【编者注：“李锐调日法”运算次数：23；

一行的“大衍历”可谓中国古代历法史上冠绝一时的好历法。

梅文鼎曰：非一行之“大衍历”无以知岁自为岁，天自为天。】

(25) 郭献之“五纪术”

日法 1340；朔余 711[约余]；右术与麟德术同。

(26) 徐承嗣“贞元术”

日法 1095；朔余 581[约余 53059360]；右术 22 强，1 弱；

【编者注：“李锐调日法”运算次数：22；】

(27) 徐昂“宣明术”

日法 8400；朔余 4457[约余 53059523]；右术 169 强，7 弱；

【编者注：“李锐调日法”运算次数：31；

梅文鼎曰：不考“宣明历”不知气、刻、时三差。】

(28) 边冈“崇元术”

日法 13500；朔余 7163[约余 53059259]；右术 271 强，13 弱；

【编者注：“李锐调日法”运算次数：28；】

(29) [后周]王朴“钦天术”

日法 7200；朔余 3820 秒 28[约余 53059444]；右术于率不合。

【编者注：“李锐调日法”运算：

29 次：日法 6913；朔余 3668；139 强，6 弱；

30 次：日法 8057；朔余 4275；162 强，7 弱；故此术于率不合。

“求强弱公式”计算得：朔余 3820；140 强，20 弱；

乘上 100 后实现转化：日法 720000；朔余 382028[约余 53059444]；

55 次：日法 635001；朔余 336928；12767 强，554 弱；

56 次：日法 787447；朔余 417815；15832 强，687 弱；故此术于率不合。

“求强弱公式”计算得：朔余 382040；14680 强，40 弱；

梅文鼎曰：不考王朴之“钦天历”不知斜正升降之理。】

(30) [宋]王处讷(nè)“应天术”

日法 10002；朔余 5307[约余 53059388]；右术 201 强，9 弱；

【编者注：“李锐调日法”运算：

27 次：日法 7763；朔余 4119；156 强，7 弱；

28 次：日法 11097；朔余 5888；223 强，10 弱；故此术于率不合。

“求强弱公式”计算得：朔余 5307；201 强，9 弱；】

(31) 吴昭素“乾元术”

日法 2940；朔余 1560[约余与强率约余同]；右术 60 强，弱空；

【编者注： $1560/2940=26/49$ ，与 $9/17 < 1560/2940 < 26/49$ 矛盾。

“李锐调日法”运算：

59 次：日法 2908；朔余 1543；59 强，1 弱；

60 次：日法 2957；朔余 1569；60 强，1 弱；故此术于率不合。

“求强弱公式”计算得：朔余 1560；60 强，0 弱；】

(32) 史序“仪天术”

日法 10100; 朔余 5359[约余 53059405]; 右术 203 强, 9 弱;

【编者注:“李锐调日法”运算次数: 28;】

(33) 宋行古“崇天术”

日法 10590; 朔余 5619[约余 53059490]; 右术 213 强, 9 弱;

【编者注:“李锐调日法”运算:

28 次: 日法 9397; 朔余 4986; 189 强, 8 弱;

29 次: 日法 12927; 朔余 6859; 260 强, 11 弱; 故此术于率不合。

“求强弱公式”计算得: 朔余 5619; 213 强, 9 弱;】

(34) 周琮“明天术”

日法 39000; 朔余 20693[约余 53058974]; 右术 781 强, 43 弱;

【编者注:“李锐调日法”运算:

28 次: 日法 22671; 朔余 12029; 454 强, 25 弱;

29 次: 日法 39899; 朔余 21170; 799 强, 44 弱; 故此术于率不合。

“求强弱公式”计算得: 朔余 20693; 781 强, 43 弱;】

(35) 卫朴“奉元术”

日法 23700; 朔余 12575[约余 53059071; 案: 此及“占天术”, “淳祐术”, “会天术”, 金“乙未术”五术各史不载, 朔余数以设立推知。置日法, 以强母 49 去之, 余 33; 以 442 乘之, 得 14586, 满 833 去之, 余 425 为弱实; 以弱母 17 除之, 得 25, 为弱数; 以弱子 9 乘之, 得 225, 于上; 以弱实反减日法, 余 23275, 为强数; 以强母除之, 得 475, 为强数; 以强子 26 乘之, 得 12350, 加上位得 12575, 为朔余]; 右术 475 强, 25 弱;

强母	49
强子	26
弱母	17
弱子	9
日法	$23700 = 49 \times 483 + 33$
弱实	$442 \times 33 = 833 \times 17 + 425$
弱数	$425 \div 17 = 25$
上	$9 \times 25 = 225$
强实	$23700 - 425 = 23275$
强数	$23275 \div 49 = 475$
朔余	$26 \times 475 + 225 = 12575$

【编者注:“李锐调日法”运算:

43 次: 日法 23651; 朔余 12549; 474 强, 25 弱;

44 次: 日法 24599; 朔余 13052; 493 强, 26 弱; 故此术于率不合。

“求强弱公式”计算得: 朔余 12575; 475 强, 25 弱;】

(36) 皇居卿“观天术”

日法 12030; 朔余 6383[约余 53059019]; 右术 241 强, 13 弱;

【编者注:“李锐调日法”运算次数: 26;】

(37) 姚舜辅“占天术”

日法 28080; 朔余 14899[约余 53059116; 置日法, 以强母 49 去之, 余 3; 以 442 乘之, 得 1326, 满 833 去之, 余 493 为弱实; 以弱母 17 除之, 得 29, 为弱数; 以弱子 9 乘之, 得 261, 于上; 以弱实反减日法, 余 27587, 为强数; 以强母除之, 得 563, 为强数; 以强子 26 乘之, 得 14638, 加上位得 14899, 为朔余]; 右术 563 强, 29 弱;

强母	49
----	----

强子	26
弱母	17
弱子	9
日法	$28080=49\times 573+3$
弱实	$442\times 3=833\times 1+493$
弱数	$493\div 17=29$
上	$9\times 29=261$
强实	$28080-493=27587$
强数	$27587\div 49=563$
朔余	$26\times 563+261=14899$

【编者注：“李锐调日法”运算：

28次：日法 26135；朔余 13867；524 强，27 弱；

29次：日法 30973；朔余 16434；621 强，32 弱；故此术于率不合。

“求强弱公式”计算得：朔余 14899；563 强，29 弱；】

(38) “纪元术” [亦姚舜辅造]

日法 7290；朔余 3868[约余 53058984]；右术 146 强，8 弱；

【编者注：“李锐调日法”运算：

23次：日法 4544；朔余 2411；91 强，5 弱；

24次：日法 8189；朔余 4345；164 强，9 弱；故此术于率不合。

“求强弱公式”计算得：朔余 3868；146 强，8 弱；】

(39) 陈德一“统元术”

日法 6930；朔余 3677[约余 53059163]；右术 139 强，7 弱；

【编者注：“李锐调日法”运算次数：26；】

(40) 刘孝荣“乾道术”

日法 30000；朔余 15917 秒 76[约余 53059200]；右术于率不合。

【编者注：“李锐调日法”运算：

28次：日法 22179；朔余 11768；445 强，22 弱；

29次：日法 31250；朔余 16581；627 强，31 弱；故此术于率不合。

“求强弱公式”计算得：朔余 15918；606 强，18 弱；

乘上 100 后实现转化：日法 3000000；朔余 1591776[约余 53059200]；

124次：日法 2977821；朔余 1580008；59747 强，2954 弱；

125次：日法 3009071；朔余 1596589；60374 强，2985 弱；故此术于率不合。

“求强弱公式”计算得：朔余 1591836；61212 强，36 弱；

或者等价于“日法 2999887；朔余 1591776[约余 53061198]”；

“李锐调日法”运算：

1587次：日法 2234207；朔余 1185497；45586 强，29 弱；

1588次：日法 3312788；朔余 1757805；67593 强，43 弱；故此术于率不合。

“求强弱公式”计算得：朔余 1591776；61209 强，38 弱；

或者等价于“日法 2999886；朔余 1591776[约余 53061216]”；

“李锐调日法”运算：

4912次：日法 2644227；朔余 1403059；53960 强，11 弱；

4913次：日法 3125000；朔余 1658163；63771 强，13 弱；故此术于率不合。

“求强弱公式”计算得：朔余 1591776；61218 强，12 弱；】

(41) “淳熙术”

日法 5640；朔余 2992 秒 56[约余 53059504]；右术于率不合。

【编者注：“李锐调日法”运算：

27 次：日法 4723；朔余 2506；95 强，4 弱；

28 次：日法 5916；朔余 3139；119 强，5 弱；故此术于率不合。

“求强弱公式”计算得：朔余 2992；104 强，32 弱；

乘上 100 后实现转化：日法 564000；朔余 299256[约余 53059504]；

41 次：日法 451936；朔余 239795；9091 强，381 弱；

42 次：日法 588347；朔余 312174；11835 强，496 弱；故此术于率不合。

“求强弱公式”计算得：朔余 299265；强 11505，15 弱；

或者等价于“日法 563984；朔余 299256[约余 53061079]”；

“李锐调日法”运算：

300 次：日法 533031；朔余 282832；10865 强，38 弱；

301 次：日法 715385；朔余 379591；14582 强，51 弱；故此术于率不合。

“求强弱公式”计算得：朔余；11496 强，40 弱；

或者等价于“日法 563983；朔余 299256[约余 53061173]”；

“李锐调日法”运算：

816 次：日法 515260；朔余 273403；10511 强，13 弱；

817 次：日法 594527；朔余 315463；12128 强，15 弱；故此术于率不合。

“求强弱公式”计算得：朔余；11505 强，14 弱；】

(42) “会元术” [以上二术亦刘孝荣造]

日法 38700；朔余 20534[约余 53059431]；右术 778 强，34 弱；

【编者注：“李锐调日法”运算：

34 次：日法 37556；朔余 19927；755 强，33 弱；

35 次：日法 46659；朔余 24757；938 强，41 弱；故此术于率不合。

“求强弱公式”计算得：朔余 20534；778 强，34 弱；】

(43) 杨忠辅“统天术”

日法 12000；朔余 6368[约余 53066666]；案：此朔余强于强率，故推“天正经朔有 500，乘距算，退位减之”之法；然较诸家，终为太强]；右术于率不合。

【编者注：“李锐调日法”运算：

244 次：日法 11973；朔余 6353；244 强，1 弱；

245 次：日法 12022；朔余 6379；245 强，1 弱；故此术于率不合。

“求强弱公式”计算得：朔余 6367；239 强，17 弱；

杨忠辅是最早发现回归年长不是常数的人。

梅文鼎曰：不读“统天历”不知“授时”之岁时消长。】

(44) 鲍瀚之“开禧术”

日法 16900；朔余 8967[约余 53059171]；右术 339 强，17 弱；

【编者注：“李锐调日法”运算：

35 次：日法 15903；朔余 8438；319 强，16 弱；

36 次：日法 30809；朔余 16347；618 强，31 弱；故此术于率不合。

“求强弱公式”计算得：朔余 8967；339 强，17 弱；】

(45) 李德卿“淳祐术”

日法 3530；朔余 1873[约余 53059490 与“崇天术”同；置日法，以强母 49 去之，余 2；以 442 乘之，得 884，满 833 去之，余 51 为弱实；以弱母 17 除之，得 3，为弱数；以弱子 9 乘之，得 27，于上；以弱实反减日法，余 3479，为强数；以强母除之，得 71，为强数；

以强子 26 乘之，得 1846，加上位得 1873，为朔余；右术 71 强，3 弱；

强母	49
强子	26
弱母	17
弱子	9
日法	$3530=49\times 72+2$
弱实	$442\times 2=833\times 1+51$
弱数	$51\div 17=3$
上	$9\times 3=27$
强实	$3530-51=3479$
强数	$3479\div 49=71$
朔余	$26\times 71+27=1873$

【编者注：“李锐调日法”运算次数：26；】

(46) 谭玉 “会天术”

日法 9740；朔余 5168[约余 53059548；置日法，以强母 49 去之，余 38；以 442 乘之，得 16796，满 833 去之，余 136 为弱实；以弱母 17 除之，得 8，为弱数；以弱子 9 乘之，得 72，于上；以弱实反减日法，余 9604，为强数；以强母除之，得 196，为强数；以强子 26 乘之，得 5096，加上位得 5168，为朔余；右术 196 强，8 弱；

强母	49
强子	26
弱母	17
弱子	9
日法	$9740=49\times 198+38$
弱实	$442\times 38=833\times 20+136$
弱数	$136\div 17=8$
上	$9\times 8=72$
强实	$9740-136=9604$
强数	$9604\div 49=196$
朔余	$26\times 196+72=5168$

【编者注：“李锐调日法”运算：

29 次：日法 8498；朔余 4509；171 强，7 弱；

30 次：日法 10933；朔余 5801；220 强，9 弱；故此术于率不合。】

(47) 陈鼎 “成天术”

日法 7420；朔余 3937[约余 53059299]；右术 149 强，7 弱；

【编者注：“李锐调日法”运算次数：26；】

(48) [金]杨级 “大明术”

日法 5230；朔余 2775[约余 53059273；案：金元二史志俱不载级术朔余数，此据赵知微“重修大明术”补]；右术 105 强，5 弱；

【编者注：“李锐调日法”运算：

25 次：日法 5181；朔余 2749；104 强，5 弱；

26 次：日法 6227；朔余 3304；125 强，6 弱；故此术于率不合。】

(49) 赵知微 “重修大明术”

日法 5230；朔余 2775；右术与前术同。

(50) 耶律履 “乙未术”

日法 20690; 朔余 10978[约余 53059449; 置日法, 以强母 49 除之, 余 12, 以 442 乘之, 得 5304, 满 833 去之, 余 306, 为弱实; 以弱母 17 除之, 得 18, 为弱数; 以弱子 9 乘之, 得 162, 于上; 以弱实反减日法, 余 20384, 为强实; 以强母除之, 得 416, 为强数; 以强子 26 乘之, 得 10816, 加上位得 10978, 为朔余]; 右术 416 强, 18 弱;

强母	49
强子	26
弱母	17
弱子	9
日法	$20690 = 49 \times 422 + 12$
弱实	$442 \times 12 = 5304 = 833 \times 6 + 306$
弱数	$306 \div 17 = 18$
上	$9 \times 18 = 162$
强实	$20690 - 306 = 20384$
强数	$20384 \div 49 = 416$
朔余	$26 \times 416 + 162 = 10978$

【编者注：“李锐调日法”运算：

33 次：日法 11489；朔余 6096；231 强，10 弱；

34 次：日法 21834；朔余 11585；439 强，19 弱；故此术于率不合。】

(51) [元]郭守敬“授时术”

日法 10000；朔余 5305 秒 93[约余 53059300；案：日法 10000 于率为 202 强，6 弱；朔余当 5306；今朔余止 5 有奇，不合强弱之率，不得为日法，故《授时术议》云：积年，日法不用也。《元史·卷五十三·志第五·历二·授时历议下》末演纪三条：

【编者注：乘上 100 后实现转化：

“李锐调日法”运算：39 次：日法 1000000；朔余 530593；20081 强，943 弱；

“求强弱公式”计算得：日法 1000000；朔余 530612；20404 强，12 弱；

二者有出入。】

其云：日法 2190 者，以强弱求之，为 44 强，2 弱；朔余 1162；

【编者注：“李锐调日法”运算：

23 次：日法 2141；朔余 1136；43 强，2 弱；

24 次：日法 3187；朔余 1691；64 强，3 弱；故此术于率不合。】

其云：日法 8270 者，以强弱求之，为 166 强，8 弱；朔余 4388；

【编者注：“李锐调日法”运算：

26 次：日法 7420；朔余 3937；149 强，7 弱；

27 次：日法 10607；朔余 5628；213 强，10 弱；故此术于率不合。】

其云：日法 6570 者，以强弱求之，为 132 强，6 弱；朔余 3486；

【编者注：“李锐调日法”运算：

25 次：日法 4233；朔余 2246；85 强，4 弱；

26 次：日法 7420；朔余 3937；149 强，7 弱；故此术于率不合。】

此三日法并与何承天密合，言“若用日法，则如此三条也”，所以为此说者强弱率为唐宋相傳旧法，一旦废弃恐议者非之，故反复申明以示改宪之意耳]；右术于率不合。

日法朔余强弱考 [清]李锐

同县门人 蒋廷荣 校字

【编者注：统计结果：

合于率的：3, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 14, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 32, 36, 39, 45, 47; (22个)。

不合于率的：1, 2, 6, 8, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 22, 29, 30, 31, 33, 34, 35, 37, 38, 40, 41, 42, 43, 44, 46, 48, 49, 50, 51; (29个)。

不合于“李锐调日法”，合于“求强弱公式”的：30, 31, 33, 34, 35, 37, 38, 42, 44, 46, 48, 49, 50。(14个);

不合于“李锐调日法”和“求强弱公式”的：1, 2, 6, 8, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 22, 29, 40, 41, 43, 51。(16个);】

秦九韶调日法

秦九韶调日法来源于《数术大略》“天时第二”的**第12题：治历演纪**：

问：开禧历，积年七百八十四万八千一百八十三，欲知：推演之原，调日法，求朔余，朔率，斗分，岁率，岁闰，入元岁，入闰，朔定骨，闰泛骨，闰缩，纪率，气元率，元闰，元数，及气等率，因率，蓍率，朔等数，因数，蓍数，朔积年，二十三事，各几何？

答曰：日法，一万六千九百；

朔余，八千九百六十七；

朔率，四十九万九千六十七；

斗分，四千一百八；【编者注：其余略去，下同。】

术曰：以历法求之，大衍入之。

调日法，如何承天术，用强弱母子互乘，得数，并之，为朔余。

以二十九日通日法，增入朔余，为朔率。

又以日法乘前历所测冬至气刻分，收弃末位为偶数，得斗分。

草曰：本历以何承天术，调得16900为日法。

强率子	17	
强率母	49	$100=49+3\times 17$
弱率子	9	
弱率母	26	
分母变形		$16900=169\times 100=169\times (1\times 49+3\times 17)=169\times 49+507\times 17$
调整 507		$507=10\times 49+17$
调整分母		$16900=(169+10\times 17)\times 49+17\times 17$
分子		$(169+10\times 17)\times 26+17\times 9=8967$ ，直观的选取方法见下表

设： $m=169+17i$ ； $n=507-49i$ ；

i	强数 m	弱数 n	$49m+17n$	朔余 $26m+9n$	
0	169	507	16900	8957	0.5300000000
1	186	458	16900	8958	0.5300591716
2	203	409	16900	8959	0.5301183432
3	220	360	16900	8960	0.5301775148
4	237	311	16900	8961	0.5302366864
5	254	262	16900	8962	0.5302958580
6	271	213	16900	8963	0.5303550296
7	288	164	16900	8964	0.5304142012
8	305	115	16900	8965	0.5304733728
9	322	66	16900	8966	0.5305325444
10	339	17	16900	8967	0.5305917160
11	356	-32	16900	8968	0.5306508876

系339强，17弱；先以强数339，乘弱母26，得8814于上；次以弱数17，乘弱子9，得153，并上，共得8967，为朔余。

次以日法16900，通朔策29日，得490100，增入朔余，得499067，为朔率。

又以日法16900，乘统天历所测，每岁冬至周日下24刻31分，得4108分39秒，为斗泛分。斗泛分见偶则弃，见奇则收为偶。验8分既偶，遗弃39秒，只以4108分为斗定分。

据此，我们得到秦九韶调日法（亦即“秦九韶求强弱公式”）的计算程序是：

基数 P	$P=C \times 49 + D \times 17$
分母变形	日法 $= Q \times P = Q \times (C \times 49 + D \times 17) = Q \times C \times 49 + Q \times D \times 17$
调整	$Q \times D = E \times 49 + B$
调整分母	日法 $= Q \times P = (Q \times C + E \times 17) \times 49 + B \times 17 = A \times 49 + B \times 17$
朔余	$A \times 26 + B \times 9 = \text{朔余}$

许多日法的基数 P 都不只一种，因此，许多日法都有不只一种的拆法，在这里，我不能罗列全部的拆法，最多只能罗列其中的五个。

(01) [汉]刘歆“三统历”

日法 81；朔余 43[约余 53086419]；右术于率不合；

没有合适的基数 P。

(02) [后汉]“四分历”

日法 940；朔余 499[约余 53085106]；右术于率不合；

只有一种拆法，无法得到朔余 499；

基数 P	$470 = 3 \times 49 + 19 \times 17$
分母变形	$940 = 2 \times 470 = 2 \times (3 \times 49 + 19 \times 17) = 6 \times 49 + 38 \times 17$
调整	$38 = 0 \times 49 + 38$
调整分母	$940 = (6 + 0 \times 17) \times 49 + 38 \times 17 = 6 \times 49 + 38 \times 17$
朔余	$6 \times 26 + 38 \times 9 = 498$

(03) 刘洪“乾象历”

日法 1457；朔余 773[约余 53054221]；右术 28 强，5 弱；

没有合适的基数 P。

(04) [魏]韩詡“黄初历”

日法 12079；朔余 6409[约余 53059028]；右术 242 强，13 弱

没有合适的基数 P。

(05) 杨伟“景初历”

日法 4559；朔余 2419[约余 53059881]；右术 92 强，3 弱；

没有合适的基数 P。

(06) [晋]刘智“正历”

日法 35250；朔余 18703[约余 53058156]；右术 701 强，53 弱；

若取 $35250 = 17625 \times 2$ ，则：

基数 P	$17625 = 2 \times 49 + 1031 \times 17$
分母变形	$35250 = 17625 \times 2 = 2 \times (2 \times 49 + 1031 \times 17) = 4 \times 49 + 2062 \times 17$
调整	$2062 = 42 \times 49 + 4$
调整分母	$35250 = 17625 \times 2 = (4 + 42 \times 17) \times 49 + 4 \times 17 = 718 \times 49 + 4 \times 17$
朔余	$718 \times 26 + 4 \times 9 = 18704$

不正确，朔余为 18704，718 强，4 弱；还有以下拆分方法，均不正确。

基数 P	Q	PQ	E	D	C	A	B
$17625 = 17 \times 1031 + 49 \times 2$	2	$35250 = 17625 \times 2$	42	1031	2	718	4
$470 = 17 \times 19 + 49 \times 3$	75	$35250 = 470 \times 75$	29	19	3	718	4
$11750 = 17 \times 671 + 49 \times 7$	3	$35250 = 11750 \times 3$	41	67	7	718	4
$1410 = 17 \times 57 + 49 \times 9$	25	$35250 = 1410 \times 25$	29	57	9	718	4
$7050 = 17 \times 383 + 49 \times 11$	5	$35250 = 7050 \times 5$	39	383	11	718	4

(07) [后秦]姜岌“三纪甲子元历”

日法 6063；朔余 3217[约余 53059541]；右术 122 强，5 弱；

朔余 3217，正确，还有以下拆分方法，

基数 P	Q	PQ	E	D	C	A	B
$2021=17*116+49*1$	3	$6063=2021*3$	7	116	1	122	5
$2021=17*67+49*18$	3	$6063=2021*3$	4	67	18	122	5

(08) [凉]赵[匪父]“元始历”

日法 89052；朔余 47251[约余 53060009]；右术于率不合。

朔余 47252，不正确，还有以下拆分方法，

基数 P	Q	PQ	E	D	C	A	B
$1086=17*61+49*1$	82	$89052=1086*82$	102	61	1	1816	4
$2172=17*122+49*2$	41	$89052=2172*41$	102	122	2	1816	4
$7421=17*425+49*4$	12	$89052=7421*12$	104	425	4	1816	4
$44526=17*2599+49*7$	2	$89052=44526*2$	106	2599	7	1816	4
$14842=17*850+49*8$	6	$89052=14842*6$	104	850	8	1816	4

(09) [宋]何承天“元嘉历”

日法 752；朔余 399[约余 53058510]；右术 15 强，1 弱；

没有合适的基数 P。

(10) 祖冲之“大明历”

日法 3939；朔余 2090[约余 53059152]；右术 79 强，4 弱；

只有一种拆法，正确：

基数 P	$1313=15 \times 49 + 34 \times 17$
分母变形	$3939=1313 \times 3=3 \times (15 \times 49 + 34 \times 17)=45 \times 49 + 102 \times 17$
调整	$102=2 \times 49 + 4$
调整分母	$3939=(45+2 \times 17) \times 49 + 4 \times 17=79 \times 49 + 4 \times 17$
朔余	$79 \times 26 + 4 \times 9=2090$

(11) [梁]“大同历”

日法 1536；朔余 815[约余 53059895；]；右术 31 强，1 弱；

只有一种拆法，正确：

基数 P	$768=7 \times 49 + 25 \times 17$
分母变形	$1536=2 \times (7 \times 49 + 25 \times 17)=14 \times 49 + 50 \times 17$
调整	$50=1 \times 49 + 1$
调整分母	$1536=(14+1 \times 17) \times 49 + 1 \times 17=31 \times 49 + 1 \times 17$
朔余	$31 \times 26 + 1 \times 9=815$

(12) [後魏]张龙详“正光历”

日法 74952；朔余 39769[约余 53059291]；右术于率不合。

朔余 39770，不正确，还有以下拆分方法，

基数 P	Q	PQ	E	D	C	A	B
$8328=17*487+49*1$	9	$74952=8328*9$	89	487	1	1522	22
$1388=17*73+49*3$	54	$74952=1388*54$	80	73	3	1522	22
$24984=17*1461+49*3$	3	$74952=24984*3$	8	146	3	1522	22
$347=17*6+49*5$	216	$74952=347*216$	26	6	5	1522	22
$6246=17*353+49*5$	12	$74952=6246*12$	86	353	5	1522	22

(13) [东魏]李业兴“兴和历”

日法 208530；朔余 110647[约余 53060470]；右术于率不合。

朔余 110648，不正确，还有以下拆分方法，

基数 P	Q	PQ	E	D	C	A	B
$6951=17*406+49*1$	30	$208530=6951*30$	248	406	1	4246	28
$13902=17*812+49*2$	15	$208530=13902*15$	248	812	2	4246	28
$20853=17*1218+49*3$	10	$208530=20853*10$	248	1218	3	4246	28
$315=17*7+49*4$	662	$208530=315*662$	94	7	4	4246	28
$993=17*44+49*5$	210	$208530=993*210$	188	44	5	4246	28

(14) 刘孝孙术

日法 1144；朔余 607[约余 53059440；]；右术 23 强，1 弱；

只有一种拆法，正确：

基数 P	$572=3\times 49+25\times 17$
分母变形	$1144=2\times(3\times 49+25\times 17)=6\times 49+50\times 17$
调整	$50=1\times 49+1$
调整分母	$1144=(6+1\times 17)\times 49+1\times 17=23\times 49+1\times 17$
朔余	$23\times 26+1\times 9=607$

(15) [北齐]宋景业“天保历”

日法 292635；朔余 155272[约余 53059955]；右术于率不合。

朔余 155275，不正确，还有以下拆分方法，

基数 P	Q	PQ	E	D	C	A	B
$58527=17*3437+49*2$	5	$292635=58527*5$	350	3437	2	5960	35
$929=17*46+49*3$	315	$292635=929*315$	295	46	3	5960	35
$32515=17*1904+49*3$	9	$292635=32515*9$	349	1904	3	5960	35
$315=17*7+49*4$	929	$292635=315*929$	132	7	4	5960	35
$6503=17*371+49*4$	45	$292635=6503*45$	340	371	4	5960	35

(16) [周]甄鸾“天和历”

日法 290160；朔余 153961[约余 53060725]；右术于率不合。

朔余 153962，不正确，还有以下拆分方法，

基数 P	Q	PQ	E	D	C	A	B
$117=17*4+49*1$	2480	$290160=117*2480$	202	4	1	5914	22
$372=17*19+49*1$	780	$290160=372*780$	302	19	1	5914	22
$780=17*43+49*1$	372	$290160=780*372$	326	43	1	5914	22
$2480=17*143+49*1$	117	$290160=2480*117$	341	143	1	5914	22
$19344=17*1135+49*1$	15	$290160=19344*15$	347	1135	1	5914	22

(17) 马显“丙寅元历”

日法 53563；朔余 28422[约余 53062748；]；右术于率不合。

朔余 28421，不正确，还有以下拆分方法，

基数 P	Q	PQ	E	D	C	A	B
$1847=17*100+49*3$	29	$53563=1847*29$	59	100	3	1090	9
$1847=17*51+49*20$	29	$53563=1847*29$	30	51	20	1090	9

(18) [隋]张宾“开皇历”

日法 181920；朔余 96529[约余 53061235]；右术于率不合。

朔余 96528，不正确，还有以下拆分方法，

基数 P	Q	PQ	E	D	C	A	B
$1137=17*64+49*1$	160	$181920=1137*160$	208	64	1	3696	48
$7580=17*443+49*1$	24	$181920=7580*24$	216	443	1	3696	48
$2274=17*128+49*2$	80	$181920=2274*80$	208	128	2	3696	48
$15160=17*886+49*2$	12	$181920=15160*12$	216	886	2	3696	48
$22740=17*1329+49*3$	8	$181920=22740*8$	216	1329	3	3696	48

(19) 张胄元 “大业历”

日法 1144；朔余 607；右术与刘孝孙术同。

(20) 刘焯 “皇极历”

日法 1242；朔余 659[约余 53059581]；右术 25 强，1 弱；

只有一种拆法，正确：

基数 P	$621=4\times 49+25\times 17$
分母变形	$1242=2\times(4\times 49+25\times 17)=8\times 49+50\times 17$
调整	$50=1\times 49+1$
调整分母	$1242=(8+1\times 17)\times 49+1\times 17=25\times 49+1\times 17$
朔余	$25\times 26+1\times 9=659$

(21) [唐]傅仁均 “戊寅历”

日法 13006；朔余 6901[约余 53060126]；右术 263 强，7 弱；

朔余 6901，正确，还有以下拆分方法，

基数 P	Q	PQ	E	D	C	A	B
$929=17*46+49*3$	14	$13006=929*14$	13	46	3	263	7
$6503=17*371+49*4$	2	$13006=6503*2$	15	371	4	263	7
$1858=17*92+49*6$	7	$13006=1858*7$	13	92	6	263	7
$6503=17*322+49*21$	2	$13006=6503*2$	13	322	21	263	7
$1858=17*43+49*23$	7	$13006=1858*7$	6	43	23	263	7

(22) 南宮说 “神龙历”

日法 100；朔余 53 秒 6[约余 53060000]；右术于率不合。

若取日法 100；朔余 53.6，则：

基数 P	$100=1\times 49+3\times 17$
分母变形	$100=1\times 100=1\times(1\times 49+3\times 17)=1\times 49+3\times 17$
调整	$3=0\times 49+3$
调整分母	$100=(1+0\times 17)\times 49+3\times 17=1\times 49+3\times 17$
朔余	$1\times 26+3\times 9=53$

若取日法 1000；朔余 536，则：

基数 P	$100=1\times 49+3\times 17$
分母变形	$1000=10\times 100=10\times(1\times 49+3\times 17)=10\times 49+30\times 17$
调整	$30=0\times 49+30$
调整分母	$1000=(10+0\times 17)\times 49+30\times 17=10\times 49+30\times 17$
朔余	$10\times 26+30\times 9=530$

无论如何，秦九韶方法都不正确。

(23) 李淳风 “麟德历”

日法 1340；朔余 711[约余 53059701]；右术 27 强，1 弱；

基数 P	Q	PQ	E	D	C	A	B
------	---	----	---	---	---	---	---

$134=17*5+49*1$	10	$1340=134*10$	1	5	1	27	1
$268=17*10+49*2$	5	$1340=268*5$	1	10	2	27	1
$670=17*25+49*5$	2	$1340=670*2$	1	25	5	27	1

(24) 僧一行“大衍历”

日法 3040；朔余 1613[约余 53059210]；右术 61 强，3 弱；

朔余 1613，正确，还有以下拆分方法，

基数 P	Q	PQ	E	D	C	A	B
$304=17*15+49*1$	10	$3040=304*10$	3	15	1	61	3
$608=17*30+49*2$	5	$3040=608*5$	3	30	2	61	3
$1520=17*75+49*5$	2	$3040=1520*2$	3	75	5	61	3
$760=17*13+49*11$	4	$3040=760*4$	1	13	11	61	3
$1520=17*26+49*22$	2	$3040=1520*2$	1	26	22	61	3

(25) 郭献之“五纪历”

日法 1340；朔余 711[约余]；右术与麟德术同。

(26) 徐承嗣“贞元历”

日法 1095；朔余 581[约余 53059360]；右术 22 强，1 弱；

只有一种拆法，正确：

基数 P	$219=1*49+10*17$
分母变形	$1095=5*(1*49+10*17)=5*49+50*17$
调整	$50=1*49+1$
调整分母	$1095=(5+1*17)*49+1*17=22*49+1*17$
朔余	$22*26+1*9=581$

(27) 徐昂“宣明历”

日法 8400；朔余 4457[约余 53059523]；右术 169 强，7 弱；

若取 $8400=84*100$ ，则：

基数 P	$100=1*49+3*17$
分母变形	$8400=84*100=84*(1*49+3*17)=84*49+252*17$
调整	$252=5*49+7$
调整分母	$8400=(84+5*17)*49+7*17=169*49+7*17$
朔余	$(84+5*17)*26+7*9=4457$

朔余正确，还有以下拆分方法，

基数 P	Q	PQ	E	D	C	A	B
$100=17*3+49*1$	84	$8400=100*84$	5	3	1	169	7
$168=17*7+49*1$	50	$8400=168*50$	7	7	1	169	7
$525=17*28+49*1$	16	$8400=525*16$	9	28	1	169	7
$200=17*6+49*2$	42	$8400=200*42$	5	6	2	169	7
$336=17*14+49*2$	25	$8400=336*25$	7	14	2	169	7

(28) 边冈“崇玄历”

日法 13500；朔余 7163[约余 53059259]；右术 271 强，13 弱；

若取 $13500=135*100$ ，则：

基数 P	$100=1*49+3*17$
分母变形	$13500=135*100=135*(1*49+3*17)=135*49+405*17$
调整	$405=8*49+13$

调整分母	$13500=(135+8\times 17)\times 49+13\times 17=271\times 49+13\times 17$
朔余	$(135+8\times 17)\times 26+13\times 9=7163$

朔余正确，还有以下拆分方法，

基数 P	Q	PQ	E	D	C	A	B
$100=17\times 3+49\times 1$	135	$13500=100\times 135$	8	3	1	271	13
$270=17\times 13+49\times 1$	50	$13500=270\times 50$	13	13	1	271	13
$540=17\times 26+49\times 2$	25	$13500=540\times 25$	13	26	2	271	13
$300=17\times 9+49\times 3$	45	$13500=300\times 45$	45	49	3	271	13
$3375=17\times 187+49\times 4$	4	$13500=3375\times 4$	15	187	4	271	13

(29) [后周]王朴“钦天历”

日法 7200；朔余 3820 秒 28[约余 53059444]；右术于率不合。

若取 $7200=72\times 100$ ，则：

基数 P	$100=1\times 49+3\times 17$
分母变形	$7200=72\times 100=72\times (1\times 49+3\times 17)=72\times 49+216\times 17$
调整	$216=4\times 49+20$
调整分母	$7200=(72+4\times 17)\times 49+20\times 17=\times 49+20\times 17$
朔余	$(72+4\times 17)\times 26+20\times 9=3820$

朔余 3820，不正确，还有以下拆分方法，

基数 P	Q	PQ	E	D	C	A	B
$100=17\times 3+49\times 1$	72	$7200=100\times 72$	4	3	1	140	20
$1800=17\times 103+49\times 1$	4	$7200=1800\times 4$	8	103	1	140	20
$200=17\times 6+49\times 2$	36	$7200=200\times 36$	4	6	2	140	20
$3600=17\times 206+49\times 2$	2	$7200=3600\times 2$	8	206	2	140	20
$300=17\times 9+49\times 3$	24	$7200=300\times 24$	4	9	3	140	20

(30) [宋]王处讷“应天历”

日法 10002；朔余 5307[约余 53059388]；右术 201 强，9 弱；

朔余正确，还有以下拆分方法，

基数 P	Q	PQ	E	D	C	A	B
$5001=17\times 274+49\times 7$	2	$10002=5001\times 2$	11	274	7	201	9
$1667=17\times 75+49\times 8$	6	$10002=1667\times 6$	9	75	8	201	9
$3334=17\times 150+49\times 16$	3	$10002=3334\times 3$	9	150	16	201	9
$5001=17\times 225+49\times 24$	2	$10002=5001\times 2$	9	225	24	201	9
$1667=17\times 26+49\times 25$	6	$10002=1667\times 6$	3	26	25	201	9

(31) 吴昭素“乾元历”

日法 2940；朔余 1560[约余与强率约余同]；右术 60 强，弱空；

朔余正确，还有以下拆分方法，

基数 P	Q	PQ	E	D	C	A	B
$980=17\times 49+49\times 3$	3	$2940=980\times 3$	3	49	3	60	0
$1470=17\times 49+49\times 13$	2	$2940=1470\times 2$	2	49	13	60	0

(32) 史序“仪天历”

日法 10100；朔余 5359[约余 53059405]；右术 203 强，9 弱；

若取 $10100=101\times 100$ ，则：

基数 P	$100=1\times 49+3\times 17$
------	-----------------------------

分母变形	$10100=101\times 100=101\times(1\times 49+3\times 17)=101\times 49+303\times 17$
调整	$303=6\times 49+9$
调整分母	$10100=(101+6\times 17)\times 49+9\times 17=203\times 49+9\times 17$
朔余	$(101+6\times 17)\times 26+9\times 9=5359$

朔余正确，还有以下拆分方法，

基数 P	Q	PQ	E	D	C	A	B
$100=17\times 3+49\times 1$	101	$10100=100\times 101$	6	3	1	203	9
$202=17\times 9+49\times 1$	50	$10100=202\times 50$	9	9	1	203	9
$404=17\times 18+49\times 2$	25	$10100=404\times 25$	9	18	2	203	9
$2525=17\times 137+49\times 4$	4	$10100=2525\times 4$	11	137	4	203	9
$1010=17\times 45+49\times 5$	10	$10100=1010\times 10$	9	45	5	203	9

(33) 宋行古“崇天历”

日法 10590；朔余 5619[约余 53059490]；右术 213 强，9 弱；

朔余正确，还有以下拆分方法，

基数 P	Q	PQ	E	D	C	A	B
$353=17\times 15+49\times 2$	30	$10590=353\times 30$	9	15	2	213	9
$3530=17\times 199+49\times 3$	3	$10590=3530\times 3$	12	199	3	213	9
$706=17\times 30+49\times 4$	15	$10590=706\times 15$	9	30	4	213	9
$1059=17\times 45+49\times 6$	10	$10590=1059\times 10$	9	45	6	213	9
$1765=17\times 75+49\times 10$	6	$10590=1765\times 6$	9	75	10	213	9

(34) 周琮“明天历”

日法 39000；朔余 20693[约余 53058974]；右术 781 强，43 弱；

若取 $39000=390\times 100$ ，则：

基数 P	$100=1\times 49+3\times 17$
分母变形	$39000=390\times 100=390\times(1\times 49+3\times 17)=390\times 49+1170\times 17$
调整	$1170=23\times 49+43$
调整分母	$39000=(390+23\times 17)\times 49+43\times 17=781\times 49+43\times 17$
朔余	$(390+23\times 17)\times 26+43\times 9=20693$

朔余正确，还有以下拆分方法，

基数 P	Q	PQ	E	D	C	A	B
$100=17\times 3+49\times 1$	390	$39000=100\times 390$	23	3	1	781	43
$780=17\times 43+49\times 1$	50	$39000=780\times 50$	43	43	1	781	43
$200=17\times 6+49\times 2$	195	$39000=200\times 195$	23	6	2	781	43
$1560=17\times 86+49\times 2$	25	$39000=1560\times 25$	43	86	2	781	43
$4875=17\times 281+49\times 2$	8	$39000=4875\times 8$	45	281	2	781	43

(35) 卫朴“奉元历”

日法 23700；朔余 12575[约余 53059071]；右术 475 强，25 弱；

若取 $23700=100\times 237$ ，则：

基数 P	$100=1\times 49+3\times 17$
分母变形	$23700=237\times 100=237\times(1\times 49+3\times 17)=237\times 49+711\times 17$
调整	$711=14\times 49+25$
调整分母	$23700=(237+14\times 17)\times 49+25\times 17=475\times 49+25\times 17$
朔余	$(237+14\times 17)\times 26+25\times 9=12575$

朔余正确，还有以下拆分方法，

基数 P	Q	PQ	E	D	C	A	B
$100=17*3+49*1$	237	$23700=100*237$	14	3	1	475	25
$474=17*25+49*1$	50	$23700=474*50$	25	25	1	475	25
$948=17*50+49*2$	25	$23700=948*25$	25	50	2	475	25
$300=17*9+49*3$	79	$23700=300*79$	14	9	3	475	25
$5925=17*337+49*4$	4	$23700=5925*4$	27	337	4	475	25

(36) 皇居卿“观天历”

日法 12030；朔余 6383[约余 53059019]；右术 241 强，13 弱；

朔余正确，还有以下拆分方法，

基数 P	Q	PQ	E	D	C	A	B
$4010=17*233+49*1$	3	$12030=4010*3$	14	233	1	241	13
$1203=17*65+49*2$	10	$12030=1203*10$	13	65	2	241	13
$2406=17*130+49*4$	5	$12030=2406*5$	13	130	4	241	13
$802=17*27+49*7$	15	$12030=802*15$	8	27	7	241	13
$2005=17*92+49*9$	6	$12030=2005*6$	11	92	9	241	13

(37) 姚舜辅“占天历”

日法 28080；朔余 14899[约余 53059116；]；右术 563 强，29 弱；

朔余正确，还有以下拆分方法，

基数 P	Q	PQ	E	D	C	A	B
$117=17*4+49*1$	240	$28080=117*240$	19	4	1	563	29
$270=17*13+49*1$	104	$28080=270*104$	27	13	1	563	29
$780=17*43+49*1$	36	$28080=780*36$	31	43	1	563	29
$14040=17*823+49*1$	2	$28080=14040*2$	33	823	1	563	29
$234=17*8+49*2$	120	$28080=234*120$	19	8	2	563	29

(38) “纪元历”[亦姚舜辅造]

日法 7290；朔余 3868[约余 53058984]；右术 164 强，8 弱；

朔余正确，还有以下拆分方法，

基数 P	Q	PQ	E	D	C	A	B
$270=17*13+49*1$	27	$7290=270*27$	7	13	1	146	8
$729=17*40+49*1$	10	$7290=729*10$	8	40	1	146	8
$1458=17*80+49*2$	5	$7290=1458*5$	8	80	2	146	8
$810=17*39+49*3$	9	$7290=810*9$	7	39	3	146	8
$3645=17*200+49*5$	2	$7290=3645*2$	8	200	5	146	8

(39) 陈德一“统元历”

日法 6930；朔余 3677[约余 53059163]；右术 139 强，7 弱；

朔余正确，还有以下拆分方法，

基数 P	Q	PQ	E	A	B	A	B
$66=17*1+49*1$	105	$6930=66*105$	2	1	1	139	7
$2310=17*133+49*1$	3	$6930=2310*3$	8	133	1	139	7
$693=17*35+49*2$	10	$6930=693*10$	7	35	2	139	7
$198=17*3+49*3$	35	$6930=198*35$	2	3	3	139	7
$385=17*14+49*3$	18	$6930=385*18$	5	14	3	139	7

(40) 刘孝荣“乾道历”

日法 30000；朔余 15917 秒 76[约余 53059200]；右术于率不合。

若取 $30000=300\times 100$ ，则：

基数 P	$100=1\times 49+3\times 17$
分母变形	$30000=300\times 100=300\times (1\times 49+3\times 17)=300\times 49+900\times 17$
调整	$900=18\times 49+18$
调整分母	$30000=(300+18\times 17)\times 49+18\times 17=606\times 49+18\times 17$
朔余	$(300+18\times 17)\times 26+18\times 9=15918$ ，差 1.76

朔余 15918，不正确，还有以下拆分方法，

基数 P	Q	PQ	E	D	C	A	B
$100=17\times 3+49\times 1$	300	$30000=100\times 300$	18	3	1	606	18
$200=17\times 6+49\times 2$	150	$30000=200\times 150$	18	6	2	606	18
$625=17\times 31+49\times 2$	48	$30000=625\times 48$	30	31	2	606	18
$300=17\times 9+49\times 3$	100	$30000=300\times 100$	18	9	3	606	18
$2000=17\times 109+49\times 3$	15	$30000=2000\times 15$	33	109	3	606	18

(41) “淳熙历”

日法 5640；朔余 2992 秒 56[约余 53059504]；右术于率不合。

朔余 2992，不正确，还有以下拆分方法，

基数 P	Q	PQ	E	D	C	A	B
$2820=17\times 163+49\times 1$	2	$5640=2820\times 2$	6	163	1	104	32
$470=17\times 19+49\times 3$	12	$5640=470\times 12$	4	19	3	104	32
$940=17\times 38+49\times 6$	6	$5640=940\times 6$	4	38	6	104	32
$564=17\times 13+49\times 7$	10	$5640=564\times 10$	2	13	7	104	32
$1410=17\times 57+49\times 9$	4	$5640=1410\times 4$	4	57	9	104	32

(42) “会元历” [以上二术亦刘孝荣造]

日法 38700；朔余 20534[约余 53059431]；右术 778 强，34 弱；

若取 $38700=387\times 100$ ，则：

基数 P	$100=1\times 49+3\times 17$
分母变形	$38700=387\times 100=387\times (1\times 49+3\times 17)=387\times 49+387\times 17$
调整	$1161=23\times 49+2\times 17$
调整分母	$38700=(387+23\times 17)\times 49+34\times 17=778\times 49+34\times 17$
朔余	$778\times 26+34\times 9=20534$

朔余正确，还有以下拆分方法，

基数 P	Q	PQ	E	D	C	A	B
$100=17\times 3+49\times 1$	387	$38700=100\times 387$	23	3	1	778	34
$1290=17\times 73+49\times 1$	30	$38700=1290\times 30$	44	73	1	778	34
$387=17\times 17+49\times 2$	100	$38700=387\times 100$	34	17	2	778	34
$2580=17\times 146+49\times 2$	15	$38700=2580\times 15$	44	146	2	778	34
$215=17\times 4+49\times 3$	180	$38700=215\times 180$	14	4	3	778	34

(43) 杨忠辅“统天历”

日法 12000；朔余 6368[约余 53066666]；右术于率不合。

若取 $12000=120\times 100$ ，则：

基数 P	$100=1\times 49+3\times 17$
------	-----------------------------

分母变形	$12000=120\times 100=120\times(1\times 49+3\times 17)=120\times 49+360\times 17$
调整	$360=7\times 49+17$
调整分母	$12000=(120+7\times 17)\times 49+17\times 17=239\times 49+17\times 17$
朔余	$(120+7\times 17)\times 26+17\times 9=6367$, 差 1

朔余 6367, 不正确, 还有以下拆分方法,

基数 P	Q	PQ	E	D	C	A	B
$100=17\times 3+49\times 1$	120	$12000=100\times 120$	7	3	1	239	17
$200=17\times 6+49\times 2$	60	$12000=200\times 60$	7	6	2	239	17
$300=17\times 9+49\times 3$	40	$12000=300\times 40$	7	9	3	239	17
$2000=17\times 109+49\times 3$	6	$12000=2000\times 6$	13	109	3	239	17
$400=17\times 12+49\times 4$	30	$12000=400\times 30$	7	12	4	239	17

(44) 鲍瀚之“开禧历”

日法 16900; 朔余 8967[约余 53059171]; 右术 339 强, 17 弱;

若取 $16900=169\times 100$, 则有:

基数 P	$100=1\times 49+3\times 17$
分母变形	$16900=169\times 100=169\times(1\times 49+3\times 17)=169\times 49+507\times 17$
调整	$507=10\times 49+17$
调整分母	$16900=(169+10\times 17)\times 49+17\times 17=339\times 49+17\times 17$
朔余	$(169+10\times 17)\times 26+17\times 9=8967$

若取 $16900=338\times 50$, 则有:

基数 P	$338=1\times 49+17\times 17$
分母变形	$16900=338\times 50=50\times(1\times 49+17\times 17)=50\times 49+850\times 17$
调整	$850=17\times 49+17$
调整分母	$16900=(50+17\times 17)\times 49+17\times 17=339\times 49+17\times 17$
朔余	$(50+17\times 17)\times 26+17\times 9=8967$

若取 $16900=1690\times 10$, 则有:

基数 P	$1690=5\times 49+85\times 17$
分母变形	$16900=1690\times 10=10\times(5\times 49+85\times 17)=50\times 49+850\times 17$
调整	$850=17\times 49+17$
调整分母	$16900=(50+17\times 17)\times 49+17\times 17=339\times 49+17\times 17$
朔余	$(50+17\times 17)\times 26+17\times 9=8967$

朔余正确, 还有以下拆分方法,

基数 P	Q	PQ	E	D	C	A	B
$100=17\times 3+49\times 1$	169	$16900=100\times 169$	10	3	1	339	17
$338=17\times 17+49\times 1$	50	$16900=338\times 50$	17	17	1	339	17
$676=17\times 34+49\times 2$	25	$16900=676\times 25$	17	34	2	339	17
$4225=17\times 237+49\times 4$	4	$16900=4225\times 4$	19	237	4	339	17
$1690=17\times 85+49\times 5$	10	$16900=1690\times 10$	17	85	5	339	17

(45) 李德卿“淳祐历”

日法 3530; 朔余 1873[约余与“崇天历”同;]; 右术 71 强, 3 弱;

若取 $3530=353\times 10$, 则有:

基数 P	$353=2\times 49+15\times 17$
分母变形	$3530=353\times 10=10\times(2\times 49+15\times 17)=20\times 49+150\times 17$

调整	$150=3\times 49+3$
调整分母	$16900=(20+3\times 17)\times 49+3\times 17=71\times 49+3\times 17$
朔余	$(20+3\times 17)\times 26+3\times 9=1873$

朔余正确，还有以下拆分方法，

基数 P	Q	PQ	E	D	C	A	B
$353=17\times 15+49\times 2$	10	$3530=353\times 10$	3	15	2	71	3
$706=17\times 30+49\times 4$	5	$3530=706\times 5$	3	30	4	71	3
$1765=17\times 75+49\times 10$	2	$3530=1765\times 2$	3	75	10	71	3

(46) 谭玉 “会天历”

日法 9740；朔余 5168[约余 53059548；]；右术 196 强，8 弱；

朔余正确，还有以下拆分方法，

基数 P	Q	PQ	E	D	C	A	B
$487=17\times 20+49\times 3$	20	$9740=487\times 20$	8	20	3	196	8
$974=17\times 40+49\times 6$	10	$9740=974\times 10$	8	40	6	196	8
$1948=17\times 80+49\times 12$	5	$9740=1948\times 5$	8	80	12	196	8
$4870=17\times 249+49\times 13$	2	$9740=4870\times 2$	10	249	13	196	8
$2435=17\times 100+49\times 15$	4	$9740=2435\times 4$	8	100	15	196	8

(47) 陈鼎 “成天历”

日法 7420；朔余 3937[约余 53059299]；右术 149 强，7 弱；

朔余正确，还有以下拆分方法，

基数 P	Q	PQ	E	D	C	A	B
$742=17\times 35+49\times 3$	10	$7420=742\times 10$	7	35	3	149	7
$1484=17\times 70+49\times 6$	5	$7420=1484\times 5$	7	70	6	149	7
$530=17\times 11+49\times 7$	14	$7420=530\times 14$	3	11	7	149	7
$1060=17\times 22+49\times 14$	7	$7420=1060\times 7$	3	22	14	149	7
$3710=17\times 175+49\times 15$	2	$7420=3710\times 2$	7	175	15	149	7

(48) 金杨级 “大明历”

日法 5230；朔余 2775[约余 53059273；案：金元二史志俱不载级术朔余数，此据赵知微“重修大明历”补]；右术 105 强，5 弱；

朔余正确，还有以下拆分方法，

基数 P	Q	PQ	E	D	C	A	B
$523=17\times 25+49\times 2$	10	$5230=523\times 10$	5	25	2	105	5
$1046=17\times 50+49\times 4$	5	$5230=1046\times 5$	5	50	4	105	5
$2615=17\times 125+49\times 10$	2	$5230=2615\times 2$	5	125	10	105	5
$2615=17\times 76+49\times 27$	2	$5230=2615\times 2$	3	76	27	105	5

(49) 赵知微 “重修大明历”

日法 5230；朔余 2775；右术与前术同。

(50) 耶律履 “乙未历”

日法 20690；朔余 10978[约余 53059449；]；右术 416 强，18 弱；

朔余正确，还有以下拆分方法，

基数 P	Q	PQ	E	D	C	A	B
$10345=17\times 597+49\times 4$	2	$20690=10345\times 2$	24	597	4	416	18
$4138=17\times 229+49\times 5$	5	$20690=4138\times 5$	23	229	5	416	18

$2069=17*90+49*11$	10	$20690=2069*10$	18	90	11	416	18
$10345=17*548+49*21$	2	$20690=10345*2$	22	548	21	416	18
$4138=17*180+49*22$	5	$20690=4138*5$	18	180	22	416	18

(51) [元]郭守敬“授时历”

日法 10000；朔余 5305 秒 93[约余 53059300；案：日法 10000 于率为 202 强，6 弱；朔余当 5306；今朔余止 5 有奇，不合强弱之率，不得为日法，故《授时术议》云：积年，日法不用也。

若取 $10000=100\times 100$ ，则有：

基数 P	$100=1\times 49+3\times 17$
分母变形	$10000=100\times 100=100\times (1\times 49+3\times 17)=100\times 49+300\times 17$
调整	$300=6\times 49+6$
调整分母	$10000=(100+6\times 17)\times 49+6\times 17= \times 49+6\times 17$
朔余	$(100+6\times 17)\times 26+6\times 9=5306$ ，差 1.93

朔余 5306，还有以下拆分方法，

基数 P	Q	PQ	E	D	C	A	B
$100=17*3+49*1$	100	$10000=100*100$	6	3	1	202	6
$200=17*6+49*2$	50	$10000=200*50$	6	6	2	202	6
$625=17*31+49*2$	16	$10000=625*16$	10	31	2	202	6
$2000=17*109+49*3$	5	$10000=2000*5$	11	109	3	202	6
$400=17*12+49*4$	25	$10000=400*25$	6	12	4	202	6

《元史·卷五十三·志第五·历二·授时历议下》末演纪三条：

其云：日法 2190 者，以强弱求之，为 44 强，2 弱；朔余 1162；

朔余 1162，还有以下拆分方法，

基数 P	Q	PQ	E	D	C	A	B
$219=17*10+49*1$	10	$2190=219*10$	2	10	1	44	2
$438=17*20+49*2$	5	$2190=438*5$	2	20	2	44	2
$1095=17*50+49*5$	2	$2190=1095*2$	2	50	5	44	2
$730=17*17+49*9$	3	$2190=730*3$	1	17	9	44	2

其云：日法 8270 者，为 166 强，8 弱；朔余 4388；

朔余 4388，还有以下拆分方法，

基数 P	Q	PQ	E	D	C	A	B
$827=17*40+49*3$	10	$8270=827*10$	8	40	3	166	8
$1654=17*80+49*6$	5	$8270=1654*5$	8	80	6	166	8
$4135=17*200+49*15$	2	$8270=4135*2$	8	200	15	166	8
$1654=17*31+49*23$	5	$8270=1654*5$	3	31	23	166	8
$4135=17*151+49*32$	2	$8270=4135*2$	6	151	32	166	8

其云：日法 6570 者，为 132 强，6 弱；朔余 3486；

朔余 3486，还有以下拆分方法，

基数 P	Q	PQ	E	D	C	A	B
$219=17*10+49*1$	30	$6570=219*30$	6	10	1	132	6
$438=17*20+49*2$	15	$6570=438*15$	6	20	2	132	6
$657=17*30+49*3$	10	$6570=657*10$	6	30	3	132	6
$1095=17*50+49*5$	6	$6570=1095*6$	6	50	5	132	6

$1314=17*60+49*6$	5	$6570=1314*5$	6	60	6	132	6
-------------------	---	---------------	---	----	---	-----	---

此三日法并与何承天密合，言“若用日法，则如此三条也”，所以为此说者强弱率为唐宋相传旧法，一旦废弃恐议者非之，故反复申明以示改宪之意耳]；右术于率不合。

由此可见，秦九韶调日法与李锐调日法本质上毫无二致，亦有诸多的“于率不合”，并且，“于率不合”的历法也是大同小异。

陈久金“加减调日法”分析

陈久金在“调日法研究”〔J.自然科学史研究,1984,3(3) 245-250.〕中提出：“古代历法家一般是不能测得约余的，只能将观测资料，与以往若干历法的推算结果相比较，得出比旧历朔余值或强或弱，再在这些历法的强弱率之间求取新的日法和朔余，即古人所说的‘写子换母’。确定新历的日法时，往往选取两家旧历的日法分别作为强率和弱率，只需经过一步或数步推算，便可求得新历的日法、朔余。”陈久金以周琮“明天历”和皇居卿“观天历”经过一次加减得到姚舜辅“纪元历”为例说明了他的算法，并且认为：“其它历法在推算日法、朔余时，也大都如此，并不需要如李锐所说的那样，利用逐步逼近法，通过数十步的演算才能求得。”

这一算法，我们不妨称之为“加减调日法”。陈久金的“加减调日法”真的是一种完善的方法吗？我们仍然对李锐《日法朔余强弱考》提出的51家历法做验证，结果列表如下：

	名称	朔望月29+	陈久金“加减调日法”
1	刘歆“三统术”	43/81	不合
2	[后汉]“四分术”	499/940	不合
3	刘洪“乾象术”	773/1457	不合
4	韩翊“黄初术”	6409/12079	{31,26/49},{36,6383/12030}
5	杨伟“景初术”	2419/4559	不合
6	刘智“正术”	18703/35250	不合
7	姜岌“三纪甲子术”	3217/6063	{9,399/752},{41,12469/23500}
8	赵[匪文]“玄始术”	47251/89052	不合
9	何承天“元嘉术”	399/752	{3,773/1457},{4,6409/12079}; {3,773/1457},{5,2419/4559}; {3,773/1457},{7,3217/6063}
10	祖冲之“大明术”	2090/3939	{4,6409/12079},{40,16581/31250}; {35,503/948},{39,3677/6930}
11	[梁]“大同术”	815/1536	{1,43/81},{7,3217/6063}; {5,2419/4559},{31,26/49}; {14,607/1144},{22,2653/5000}
12	张龙详“正光术”	39769/74952	不合
13	李业兴“兴和术”	110647/208530	不合
14	刘孝孙术	607/1144	{9,399/752},{11,815/1536}; {9,399/752},{27,4457/8400}; {9,399/752},{29,95507/180000}; {11,815/1536},{24,1613/3040}; {20,659/1242},{30,1769/3334}; {20,659/1242},{42,10267/19350}; {20,659/1242},{48,555/1046}; {23,711/1340},{32,5359/10100}; {23,711/1340},{35,503/948}; {24,1613/3040},{27,4457/8400}; {24,1613/3040},{29,95507/180000}; {26,581/1095},{31,26/49}; {26,581/1095},{50,5489/10345};

			{30,1769/3334},{33,1873/3530}; {30,1769/3334},{45,1873/3530}; {33,1873/3530},{42,10267/19350}; {33,1873/3530},{48,555/1046}; {42,10267/19350},{45,1873/3530}; {45,1873/3530},{48,555/1046}
15	宋景业“天保术”	155272/292635	不合
16	[周]甄鸾“天和术”	153991/290160	不合
17	马显“丙寅元术”	28422/53563	不合
18	[隋]张宾“开皇术”	96529/181920	不合
19	张胄元“大业术”	同14	
20	刘焯“皇极术”	659/1242	{1,43/81},{38,1934/3645}; {5,2419/4559},{50,5489/10345}; {14,607/1144},{23,711/1340}; {11,815/1536},{27,4457/8400}; {11,815/1536},{35,503/948}; {22,2653/5000},{47,3937/7420}; {23,711/1340},{41,12469/23500}; {31,26/49},{46,1292/2435}
21	傅仁均“戊寅术”	6901/13006	不合
22	南宫说“神龙术”	5306/10000 =2653/5000	{8,47251/89052},{35,503/948}
23	李淳风“麟德术”	711/1340	{1,43/81},{10,2090/3939}; {11,815/1536},{14,607/1144}; {22,2653/5000},{24,1613/3040}; {22,2653/5000},{27,4457/8400}; {38,1934/3645},{43,199/375}; {43,199/375},{50,5489/10345}
24	僧一行“大衍术”	1613/3040	{1,43/81},{4,6409/12079}; {23,711/1340},{44,8967/16900}; {27,4457/8400},{37,14899/28080}; {28,7163/13500},{44,8967/16900}; {38,1934/3645},{46,1292/2435}; {44,8967/16900},{47,3937/7420}
25	郭献之“五纪术”	同23	
26	徐承嗣“贞元术”	581/1095	{10,2090/3939},{11,815/1536}; {14,607/1144},{48,555/1046}; {20,659/1242},{35,503/948}; {22,2653/5000},{44,8967/16900}; {23,711/1340},{24,1613/3040}; {23,711/1340},{47,3937/7420}; {24,1613/3040},{32,5359/10100}; {24,1613/3040},{33,1873/3530}; {24,1613/3040},{45,1873/3530};

			{24,1613/3040},{46,1292/2435}; {27,4457/8400},{28,7163/13500}; {27,4457/8400},{38,1934/3645}; {27,4457/8400},{39,3677/6930}; {28,7163/13500},{42,10267/19350}; {29,95507/180000},{34,20693/39000}; {30,1769/3334},{48,555/1046}; {31,26/49},{48,555/1046}; {32,5359/10100},{47,3937/7420}; {33,1873/3530},{47,3937/7420}; {38,1934/3645},{42,10267/19350}; {39,3677/6930},{42,10267/19350}; {40,16581/31250},{41,12469/23500}; {45,1873/3530},{47,3937/7420}; {46,1292/2435},{47,3937/7420}
27	徐昂“宣明术”	4457/8400	{32,5359/10100},{41,12469/23500}
28	边冈“崇玄术”	7163/13500	{32,5359/10100},{44,8967/16900}
29	王朴“钦天术”	382028/720000	不合
30	王处讷“应天术”	5307/10002 =1769/3334	{7,3217/6063},{10,2090/3939}
31	吴昭素“乾元术”	1560/2940 =26/49	{1,43/81},{9,399/752}; {1,43/81},{11,815/1536}; {1,43/81},{14,607/1144}; {1,43/81},{20,659/1242}; {1,43/81},{23,711/1340}; {1,43/81},{26,581/1095}; {1,43/81},{35,503/948}; {1,43/81},{48,555/1046}; {9,399/752},{18,96529/181920}; {9,399/752},{43,199/375}; {11,815/1536},{18,96529/181920}; {11,815/1536},{43,199/375}; {14,607/1144},{18,96529/181920}; {14,607/1144},{43,199/375}; {18,96529/181920},{20,659/1242}; {18,96529/181920},{23,711/1340}; {18,96529/181920},{26,581/1095}; {18,96529/181920},{35,503/948}; {18,96529/181920},{48,555/1046}; {20,659/1242},{43,199/375}; {23,711/1340},{43,199/375}; {26,581/1095},{43,199/375}; {35,503/948},{43,199/375}; {43,199/375},{48,555/1046}

32	史序“仪天术”	5359/10100	{41,12469/23500},{44,8967/16900}
33	宋行古“崇天术”	5619/10590 =1873/3530	{26,581/1095},{46,1292/2435}
34	周琮“明天术”	20693/39000	不合
35	卫朴“奉元术”	12575/23700 =503/948	{9,399/752},{14,607/1144}; {9,399/752},{24,1613/3040}; {10,2090/3939},{38,1934/3645}; {20,659/1242},{36,6383/12030}; {26,581/1095},{38,1934/3645}; {27,4457/8400},{34,20693/39000}; {36,6383/12030},{39,3677/6930}
36	皇居卿“观天术”	6383/12030	不合
37	姚舜辅“占天术”	14899/28080	不合
38	姚舜辅“纪元术”	3868/7290 =1934/3645	{26,581/1095},{34,20693/39000}; {34,20693/39000},{36,6383/12030}
39	陈德一“统元术”	3677/6930	{28,7163/13500},{37,14899/28080}
40	刘孝荣“乾道术”	1591776/3000000 =16581/31250	{34,20693/39000},{41,12469/23500}
41	刘孝荣“淳熙术”	299256/564000	不合
42	刘孝荣“会元术”	20534/38700 =10267/19350	{28,7163/13500},{29,95507/180000}
43	杨忠辅“统天术”	6368/12000 =43,199/375	{2,499/940},{46,1292/2435}
44	鲍瀚之“开禧术”	8967/16900	不合
45	李德卿“淳祐术”	1873/3530	{26,581/1095},{46,1292/2435}
46	谭玉“会天术”	5168/9740 =1292/2435	{7,3217/6063},{20,659/1242}; {11,815/1536},{30,1769/3334}; {22,2653/5000},{42,10267/19350}; {23,711/1340},{26,581/1095}; {23,711/1340},{27,4457/8400}; {23,711/1340},{33,1873/3530}; {23,711/1340},{45,1873/3530}; {39,3677/6930},{43,199/375}
47	陈鼎“成天术”	3937/7420	{23,711/1340},{28,7163/13500}
48	金杨级“大明术”	2775/5230 =555/1046	{9,399/752},{23,711/1340}; {14,607/1144},{24,1613/3040}; {14,607/1144},{28,7163/13500}; {14,607/1144},{35,503/948}; {24,1613/3040},{47,3937/7420}; {28,7163/13500},{47,3937/7420}; {39,3677/6930},{45,1873/3530}; {33,1873/3530},{39,3677/6930}; {35,503/948},{47,3937/7420}; {36,6383/12030},{42,10267/19350}

49	赵知微“重修大明术”	同48	
50	耶律履“乙未术”	10978/20690 =5489/10345	{23,711/1340},{42,10267/19350}

其中的“{序号,朔余/日法},{序号,朔余/日法}”是一对算法组合。

计算表明：不合的是：1 刘歆“三统术”，2[后汉]“四分术”，3 刘洪“乾象术”，5 杨伟“景初术”，6 刘智“正术”，8 赵[匪文]“玄始术”，12 张龙祥“正光术”，13 李业兴“兴和术”，15 宋景业“天保术”，16[周]甄鸾“天和术”，17 马显“丙寅元术”，18[隋]张宾“开皇术”，21 傅仁均“戊寅术”，29 王朴“钦天术”，34 周琮“明天术”，36 皇居卿“观天术”，37 姚舜辅“占天术”，41 刘孝荣“淳熙术”，44 鲍瀚之“开禧术”，合计 19 家。

这里还没有强调“只能用以前的日法调出当前的日法”的要求，否则，4 韩翊“黄初术”，7 姜岌“三纪甲子术”，10 祖冲之“大明术”，20 刘焯“皇极术”，22 南宫说“神龙术”，27 徐昂“宣明术”，28 边冈“崇玄术”，32 史序“仪天术”，33 宋行古“崇天术”，45 李德卿“淳祐术”这 10 个也是不合的。

看起来，陈久金的“加减调日法”也不靠谱。他对古人所说的“写子换母”的理解也是不正确的；所谓“古代历法家一般是不能测得约余的”的说法恐怕也是过于武断了。

连分数与调日法

“三统历”如何确定 $29+43/81$ 为朔望月的？

估计刘歆已经实测得朔望月平均值为 $29+5308/10000$ ，应用缀术得到：

更相减损	商	缀术（连分数）	分母	分子	
10000	5308	1	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	1	1
5308	4692	1	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	2	1
4692	616	7	$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 2 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$	15	8
616	380	1	$\begin{bmatrix} 15 & 2 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 15 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$	17	9
380	236	1	$\begin{bmatrix} 17 & 15 \\ 9 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & 17 \\ 17 & 9 \end{bmatrix}$	32	17
236	144	1	$\begin{bmatrix} 32 & 17 \\ 17 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49 & 32 \\ 26 & 17 \end{bmatrix}$	49	26
144	92	1	$\begin{bmatrix} 49 & 32 \\ 26 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 81 & 49 \\ 43 & 26 \end{bmatrix}$	81	43
92	52	1	$\begin{bmatrix} 81 & 49 \\ 43 & 26 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 130 & 81 \\ 69 & 43 \end{bmatrix}$	130	69
52	40	1	$\begin{bmatrix} 130 & 81 \\ 69 & 43 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 211 & 130 \\ 112 & 69 \end{bmatrix}$	211	112
40	12	3	$\begin{bmatrix} 211 & 130 \\ 112 & 69 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 763 & 211 \\ 405 & 112 \end{bmatrix}$	763	405
12	4	3	$\begin{bmatrix} 763 & 211 \\ 405 & 112 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1327 & 763 \\ 2500 & 405 \end{bmatrix}$	2500	1327
4	0				

表示为缀术（连分数）形式为：

$53080/100000: \{0, 1, 1/2, 8/15, 9/17, 17/32, 26/49, \mathbf{43/81}, 69/130, 112/211, 405/763, 1327/2500\}$

为简便记，我们只给出连分数形式的结果：

$53081/100000: \{0, 1, 1/2, 8/15, 9/17, 17/32, 26/49, \mathbf{43/81}, 112/211, 491/925, 603/1136, 2903/5469, 3506/6605, 9915/18679, 53081/100000\}$

53082/100000:{0,1,1/2,8/15,9/17,17/32,26/49,**43/81**,112/211,155/292,887/1671,1929/3634,2816/5305,4745/8939,26541/50000}

53083/100000:{0,1,1/2,8/15,9/17,17/32,26/49,**43/81**,155/292,198/373,1145/2157,1343/2530,5174/9747,53083/100000}

53084/100000:{0,1,1/2,8/15,9/17,17/32,26/49,**43/81**,241/454,284/535,809/1524,2711/5107,3520/6631,13271/25000}

53085/100000:{0,1,1/2,8/15,9/17,17/32,26/49,**43/81**,456/859,3235/6094,3691/6953,10617/20000}

53086/100000:{0,1,1/2,8/15,9/17,17/32,26/49,**43/81**,1531/2884,1574/2965,4679/8814,10932/20593,26543/50000}

53087/100000:{0,1,1/2,8/15,9/17,17/32,**43/81**,1092/2057,1135/2138,7902/14885,9037/17023,53087/100000}

53088/100000: {0,1,1/2,8/15,9/17,17/32,**43/81**,404/761,1659/3125}

53089/100000:{0,1,1/2,8/15,9/17,17/32,**43/81**,232/437,275/518,507/955,10415/19618,21337/40191,53089/100000}

增加一个精确度数量级后，43/81 始终出现，说明 43/81 是 0.5308 的最佳渐近分数值。

这个数值若按照李锐调日法，秦九韶调日法，何承天调日法，均不能得到，只能得到 $42/81 \approx 0.518518518518519$ ，与 $43/81 \approx 0.530864197530864$ 相去甚远。

再看看“四分历”是如何确定 $29+499/940$ 为朔望月的：

估计“四分历”已经实测得朔望月平均值为 $29+530851/1000000$ ，

5308510/10000000:{0,1,1/2,8/15,9/17,17/32,26/49,43/81,456/859,**499/940**,8440/15899,8939/16839,44196/83255,97331/183349,530851/1000000}

5308511/10000000:{0,1,1/2,8/15,9/17,17/32,26/49,43/81,**499/940**,15512/29221,62547/117824,78059/147045,999255/1882364,1077314/2029409,5308511/10000000}

5308512/10000000:{0,1,1/2,8/15,9/17,17/32,26/49,43/81,**499/940**,4035/7601,16639/31344,37313/70289,165891/312500}

5308513/10000000:{0,1,1/2,8/15,9/17,17/32,26/49,43/81,**499/940**,2039/3841,2538/4781,7115/13403,16768/31587,23883/44990,40651/76577,5308513/10000000}

5308514/10000000:{0,1,1/2,8/15,9/17,17/32,26/49,43/81,**499/940**,1540/2901,5119/9643,6659/12544,11778/22187,41993/79105,137757/259502,179750/338607,2654257/5000000}

5308515/10000000:{0,1,1/2,8/15,9/17,17/32,26/49,43/81,**499/940**,1041/1961,1540/2901,2581/4862,73808/139037,76389/143899,302975/570734,379364/714633,1061703/2000000}

5308516/10000000:{0,1,1/2,8/15,9/17,17/32,26/49,43/81,**499/940**,1041/1961,42139/79380,43180/81341,85319/160721,128499/242062,599315/1128969,1327129/2500000}

5308517/10000000:{0,1,1/2,8/15,9/17,17/32,26/49,43/81,**499/940**,542/1021,1041/1961,2624/4943,8913/16790,11537/21733,135820/255853,5308517/10000000}

5308518/10000000:{0,1,1/2,8/15,9/17,17/32,26/49,43/81,**499/940**,542/1021,1583/2982,6874/12949,8457/15931,15331/28880,23788/44811,39119/73691,62907/118502,102026/192193,164933/310695,431892/813583,596825/1124278,1028717/1937861,2654259/5000000}

5308519/10000000:{0,1,1/2,8/15,9/17,17/32,26/49,43/81,**499/940**,542/1021,2125/4003,2667/5024,7459/14051,10126/19075,68215/128501,214771/404578,282986/533079,5308519/10000000}

增加一个精确度数量级后，499/940 始终出现，说明 499/940 是 0.530851 的最佳渐近分

数值。

这个数值若按照李锐调日法，秦九韶调日法，何承天调日法，均不能得到，只能得到 $498/940 \approx 0.529787234042553$ ，与 $499/940 \approx 0.530851063829787$ 相去甚远。

因此，我认为：刘歆确实是掌握了缀术（连分数）技巧，并且在“三统历”制定中大量运用。

在李锐“日法朔馀强弱考”中，我们先关注不合于李锐调日法的，其次是关注历法中提出闰周数值的，我们研究对应的缀术（连分数）信息。

李锐调日法：“日法朔馀强弱考”，秦九韶调日法：以下 16 家都不合（53059027）。

	名称	日法	朔余	最小约余	精度	闰周
01	[汉]刘歆“三统术”	81	43	5308	4 位	7/19
02	[后汉]“四分术”	940	499	530851	6 位	7/19
06	[晋]刘智“正术”	35250	18703	53058156	8 位	7/19
08	赵[匪文]“玄始术”	89052	47251	5306000988	10 位	221/600
12	[魏]张龙详“正光术”	74952	39769	53059291279	11 位	186/505
13	[魏]李业兴“兴和术”	208530	110647	53060470915	11 位	207/562
15	[齐]宋景业“天保术”	292635	155272	53059955234	11 位	249/676
16	[周]甄鸾“天和术”	290160	153961	53060725117	11 位	144/391
17	马显“丙寅元术”	53563	28422	5306274853	10 位	165/448
18	[隋]张宾“开皇术”	181920	96529	53061235708	11 位	158/429
22	南宫说“神龙术”	10000	5306	5306	4 位	54388/147653
29	[周]王朴“钦天术”	720000	382028	530555	6 位	1957926/5315507
31	吴昭素“乾元术”	2940	1560	5306	4 位	533/1447
40	刘孝荣“乾道术”	3000000	1591776	530566666	9 位	4078661/11073972
41	刘孝荣“淳熙术”	564000	299256	530496	6 位	85199/231323
43	杨忠辅“统天术”	12000	6368	53067	5 位	9321/25312

考察回归年：

	名称	日法	岁余	最小约余	精度	闰周
01	[汉]刘歆“三统术”	1539	385	2501624	7 位	7/19
02	[后汉]“四分术”	4	1	25	2 位	7/19
06	[晋]刘智“正术”	150	37	24666	5 位	7/19
08	赵[匪文]“玄始术”	7200	1759	24430555	8 位	221/600
12	[魏]张龙详“正光术”	6060	1477	24372937	8 位	186/505
13	[魏]李业兴“兴和术”	16860	4117	244187425	9 位	207/562
15	[齐]宋景业“天保术”	23660	5787	244590025	9 位	249/676
16	[周]甄鸾“天和术”	23460	5731	24428815	8 位	144/391
17	马显“丙寅元术”	12992	3167	24376539	8 位	165/448
18	[隋]张宾“开皇术”	102960	25063	2434246309	10 位	158/429
22	南宫说“神龙术”	625	153	2448	4 位	54388/147653

{53059291279,{0,1,1/2,8/15,9/17,26/49,555/1046,2801/5279,36968/69673,**39769/74952**,911886/1718617,951655/1793569,2815196/5305755,3766851/7099324,10348898/19504403,34813545/65612533,149603078/281954535,184416623/347567068,1809352685/3410058147,3803121993/7167683362,24628084643/46416158319,53059291279/10000000000}}

回归年

{{1477/6060,24372937},{0.24372937293729372937},{0,1/4,9/37,10/41,29/119,39/160,68/279,447/1834,515/2113,**1477/6060**,12331/50593,13808/56653,164219/673776,178027/730429,876327/3595492,5435989/22303381,6312316/25898873,24372937/100000000}}

(13) [东魏]李业兴 “兴和术”

日法 208530；朔余 110647[约余 53060470915]；右术于率不合。

“求强弱公式” 计算结果：朔余 110648，4246 强，28 弱；

{53060470915,{0,1,1/2,8/15,9/17,26/49,1413/2663,1439/2712,17242/32495,18681/35207,91966/173323,**110647/208530**,534554/1007443,2248863/4238302,2783417/5245745,7815697/14729792,159097357/299841585,166913054/314571377,1160575681/2187269847,10612094183/200000000}}

回归年

{{4117/16860,244187425},{0.24418742586002372479},{0,1/4,10/41,11/45,21/86,2048/8387,2069/8473,**4117/16860**,14420/59053,18537/75913,32957/134966,84451/345845,201859/826656,286310/1172501,3064959/12551666,3351269/13724167,9767497/40000000}}

(15) [北齐]宋景业 “天保术”

日法 292635；朔余 155272[约余 53059955234]；右术于率不合。

“求强弱公式” 计算结果：朔余 155275，5960 强，35 弱；

{53059955234,{0,1,1/2,8/15,9/17,26/49,841/1585,1708/3219,12797/24118,**155272/292635**,478613/902023,1112498/2096681,1591111/2998704,2703609/5095385,9701938/18284859,22107485/41665103,53916908/101615065,237775117/448125363,767242259/1445991154,1005017376/1894116517,1772259635/3340107671,2777277011/5234224188,4549536646/8574331859,7326813657/13808556047,26529977617/5000000000}}

回归年

{{5787/23660,244590025},{0.24459002535925612849},{0,1/4,11/45,34/139,113/462,373/1525,859/3512,1232/5037,4555/18623,**5787/23660**,27703/113263,144302/589975,316307/1293213,460609/1883188,776916/3176401,9783601/40000000}}

(16) [周]甄鸾 “天和术”

日法 290160；朔余 153961[约余 53060725117]；右术于率不合。

“求强弱公式” 计算结果：朔余 153962，5914 强，22 弱；

{53060725117,{0,1,1/2,8/15,9/17,26/49,2167/4084,36865/69477,39032/73561,**153961/290160**,962798/1814521,2079557/3919202,15519697/29248935,126237133/237910682,141756830/267159617,267993963/505070299,3089690423/5822932906,24985517347/47088533547,53060725117/10000000000}}

回归年

{{5731/23460,24428815},{0.24428815004262574595},{0,1/4,10/41,11/45,32/131,139/569,5592/22891,**5731/23460**,240563/984751,246294/1008211,486857/1992962,733151/3001173,4885763/20000000}}

(17) 马显 “丙寅元术”

日法 53563；朔余 28422[约余 5306274853]；右术于率不合。

“求强弱公式”计算结果：日法 53563；朔余 28421；1090 强，9 弱；

{5306274853,{0,1,1/2,8/15,9/17,17/32,26/49,693/1306,719/1355,2131/4016,26291/49547,**28422/53563**,83135/156673,111557/210236,1087148/2048797,2285853/4307830,3373001/6356627,5658854/10664457,26008417/49014455,31667271/59678912,57675688/108693367,89342959/168372279,325704565/613810204,415047524/782182483,5306274853/1000000000}}

回归年

{{3167/12992,24376539},{0.24376539408866995074},{0,1/4,9/37,10/41,39/160,88/361,303/1243,391/1604,694/2847,**3167/12992**,3861/15839,18611/76348,41083/168535,59694/244883,339553/1392950,399247/1637833,1537294/6306449,1936541/7944282,11219999/46027859,24376539/100000000}}

(18) [隋]张宾“开皇术”

日法 181920；朔余 96529[约余 53061235708]；右术于率不合。

“求强弱公式”计算结果：朔余 96528，3696 强，48 弱；

{53061235708,{0,1,1/2,8/15,9/17,17/32,26/49,**96529/181920**,82821908/156087409,82918437/156269329,746169404/1406242041,1575257245/2968753411,3896683894/7343748863,13265308927/2500000000}}

回归年

{{25063/102960,2434246309},{0.24342463092463092463},{0,1/4,9/37,28/115,37/152,435/1787,907/3726,1342/5513,23721/97447,**25063/102960**,73847/303367,98910/406327,766217/3147656,865127/3553983,1631344/6701639,4127815/16957261,5759159/23658900,21405292/87933961,27164451/111592861,48569743/199526822,1192838283/4900236589,2434246309/1000000000}}

(22) 南宫说“神龙术”

日法 100；朔余 53 秒 6[约余 5306]；右术于率不合。

“求强弱公式”计算结果：朔余 530；10 强，30 弱；

{5306,{0,1,1/2,8/15,9/17,26/49,867/1634,893/1683,**2653/5000=5306/10000}}**}

回归年

{{153/625,2448},{0.244800000000000000},{0,1/4,11/45,12/49,47/192,**153/625}}**}

(29) [后周]王朴“钦天术”

日法 7200；朔余 3820 秒 28[约余 530555]；右术于率不合。

“求强弱公式”计算得：朔余 3820；140 强，20 弱；

{530555,{0,1,1/2,8/15,9/17,26/49,165/311,**191/360=3820/7200**,2648/4991,106111/200000}}

乘上 100 后实现转化：日法 720000；朔余 382028[约余 53059444444]；

“求强弱公式”计算得：朔余 382040；14680 强，40 弱；

{53059444444,{0,1,1/2,8/15,9/17,26/49,607/1144,11559/21785,12166/22929,23725/44714,35891/67643,**95507/180000=382028/72000**,608933/1147643,704440/1327643,1313373/2475286,4644559/8753501,33825286/63749793,545849135/1028750189,579674421/1092499982,6342593345/11953750009,13264861111/25000000000}}

回归年

{{489/2000,2445},{0.244500000000},{0,1/4,11/45,89/364,100/409,**489/2000}}**}

(31) 吴昭素“乾元术”

日法 2940；朔余 1560[约余 5306]；右术 60 强，弱空；

“求强弱公式”计算得：朔余 1560；60 强，0 弱；

{5306,{0,1,1/2,8/15,9/17,**26/49=1560/2940**,867/1634,893/1683,2653/5000}}

07	姜岌三纪术	6063	3217	5305954	7位	7/19
09	何承天元嘉术	752	399	530585	6位	7/19
补1	九执术	703	373	530583	6位	7/19
10	祖冲之大明术	3939	2090	5305915	7位	144/391
11	[梁]大同术	1536	815	5305989	7位	228/619
14	刘孝孙术	1144	607	5305944	7位	151/410
19	张胄元大业术	同14				
20	刘焯皇极术	1242	659	5305958	7位	249/676
21	傅仁均戊寅术	13006	6901	53060126	8位	249/676

考察回归年：

	名称	部法	岁余	约余	精度	闰周
03	刘洪乾象术	589	145	246179	6位	7/19
04	韩翊黄初术	4883	1205	2467745	7位	7/19
05	杨伟景初术	1843	455	24688	5位	7/19
07	姜岌三纪术	2451	605	246838	6位	7/19
09	何承天元嘉术	304	75	24671	5位	7/19
补1	九执术	13357	3295	24668713	8位	7/19
10	祖冲之大明术	39491	9589	2428148185	10位	144/391
11	[梁]大同术	39616	9681	244370961	9位	228/619
14	刘孝孙术	42640	10363	243034709	9位	151/410
19	张胄元大业术	同14				
20	刘焯皇极术	466440	114065	2445437784	10位	249/676
21	傅仁均戊寅术	9464	2315	24461115	8位	249/676

(03) 刘洪“乾象历”

日法 1457；朔余 773[约余 530542]；右术 28 强，5 弱；

{530542, {0,1,1/2,8/15,9/17,26/49,139/262,165/311,304/573,**773/1457**,1077/2030,1850/3487,10327/19465,12177/22952,22504/42417,34681/65369,265271/500000}}

回归年

{{145/589,246179},{0.24617996604414261460},{0,1/4,16/65,**145/589**,306/1243,451/1832,3012/12235,3463/14067,34179/138838,106000/430581,246179/1000000}}

(04) [魏]韩翊“黄初历”

日法 12079；朔余 6409[约余 53059028]；右术 242 强，13 弱

{53059028, {0,1,1/2,8/15,9/17,26/49,477/899,503/948,980/1847,1483/2795,2463/4642,**6409/12079**,66553/125432,538833/1015535,2221885/4187572,2760718/5203107,13264757/25000000}}

回归年

{{1205/4883,2467745},{0.24677452385828384190},{0,1/4,19/77,134/543,153/620,**1205/4883**,1358/5503,2563/10386,3921/15889,6484/26275,16889/68439,40262/163153,137675/557898,177937/721051,493549/2000000}}

(05) 杨伟“景初历”

日法 4559；朔余 2419[约余 5305988]；右术 92 强，3 弱；

{5305988, {0,1,1/2,8/15,9/17,26/49,789/1487,815/1536,1604/3023,**2419/4559**,6442/12141,15303/28841,52351/98664,120005/226169,172356/324833,1326497/2500000}}

回归年

{{455/1843,24688},{0.24688008681497558329},{0,1/4,19/77,20/81,79/320,99/401,178/721,
455/1843,1543/6250}}

(07) [后秦]姜岌“三纪甲子元历”

日法 6063; 朔余 3217[约余 5305954]; 右术 122 强, 5 弱;

{5305954,{0,1,1/2,8/15,9/17,26/49,633/1193,1292/2435,1925/3628,**3217/6063**,5142/9691,23
785/44827,124067/233826,1264455/2383087,2652977/5000000}}

回归年

{{605/2451,246838},{0.24683802529579763362},{0,1/4,19/77,20/81,39/158,**605/2451**,3669
/14864,4274/17315,7943/32179,123419/500000}}

(09) [宋]何承天“元嘉历”

日法 752; 朔余 399[约余 530585]; 右术 15 强, 1 弱;

{530585,{0,1,1/2,8/15,9/17,26/49,373/703,**399/752**,6358/11983,6757/12735,19872/37453,10
6117/200000}}

回归年

{{75/304,24671},{0.24671052631578947368},{0,1/4,18/73,19/77,56/227,**75/304**,1481/6003,
1556/6307,7705/31231,24671/100000}}

(补 1) 九执术

朔望月 373/703=494209/33041, 回归年 3295/13357

{530583,{0,1,1/2,8/15,9/17,26/49,347/654,**373/703**,3331/6278,7035/13259,172171/324494,1
79206/337753,530583/1000000}}

回归年

{{3295/13357,24668713},{0.24668713034364003893},{0,1/4,18/73,19/77,37/150,56/227,93
/377,149/604,242/981,**3295/13357**,52962/214693,215143/872129,913534/3703209,1128677/4575
338,3170888/12853885,4299565/17429223,24668713/100000000}}

(10) 祖冲之“大明历”

日法 3939; 朔余 2090[约余 5305915]; 右术 79 强, 4 弱;

{5305915,{0,1,1/2,8/15,9/17,26/49,503/948,529/997,1561/2942,**2090/3939**,5741/10820,1357
2/25579,19313/36399,52198/98377,71511/134776,123709/233153,1061183/2000000}}

回归年

{{9589/39491,2428148185},{0.24281481856625560254},{0,1/4,8/33,17/70,76/313,169/696,
245/1009,1394/5741,1639/6750,**9589/39491**,87940/362169,97529/401660,185469/763829,65889
44/27135675,13363357/55035179,19952301/82170854,232838668/958914573,485629637/20000
00000}}

(11) [梁]“大同历”

日法 1536; 朔余 815[约余 5305989]; 右术 31 强, 1 弱;

{5305989,{0,1,1/2,8/15,9/17,26/49,789/1487,**815/1536**,5679/10703,17852/33645,41383/779
93,59235/111638,278323/524545,894204/1685273,1172527/2209818,2066731/3895091,5305989/
10000000}}

回归年

{{9681/39616,244370961},{0.24437096122778675283},{0,1/4,10/41,11/45,65/266,76/311,3
69/1510,1552/6351,8129/33265,**9681/39616**,17810/72881,27491/112497,622612/2547815,65010
3/2660312,1272715/5208127,4468248/18284693,5740963/23492820,10209211/41777513,26159
385/107047846,36368596/148825359,244370961/1000000000}}

(14) 刘孝孙术

日法 1144; 朔余 607[约余 5305944;]; 右术 23 强, 1 弱;

{5305944,{0,1,1/2,8/15,9/17,26/49,581/1095,**607/1144**,82526/155535,83133/156679,165659/312214,248792/468893,663243/1250000}}

回归年

{{10363/42640,243034709},{0.24303470919324577861},{0,1/4,8/33,9/37,26/107,35/144,61/251,96/395,157/646,567/2333,9796/40307,**10363/42640**,20159/82947,30522/125587,294857/1213230,3273949/13471117,3568806/14684347,10411561/42839811,243034709/1000000000}}

(19) 张胄元 “大业历”

日法 1144; 朔余 607; 右术与刘孝孙术同。

(20) 刘焯 “皇极历”

日法 1242; 朔余 659[约余 5305958]; 右术 25 强, 1 弱;

{5305958,{0,1,1/2,8/15,9/17,26/49,633/1193,**659/1242**,32265/60809,226514/426905,485293/914619,2652979/5000000}}

回归年

{{22813/93288,2445437784},{0.24454377840665466084},{0,1/4,11/45,45/184,56/229,437/1787,493/2016,930/3803,21883/89485,**22813/93288**,386891/1582093,1183486/4839567,5120835/20940361,98479351/402706426,103600186/423646787,305679723/1250000000}}

(21) [唐]傅仁均 “戊寅历”

日法 13006; 朔余 6901[约余 53060126]; 右术 263 强, 7 弱;

{53060126,{0,1,1/2,8/15,9/17,26/49,971/1830,997/1879,1968/3709,**6901/13006**,36473/68739,43374/81745,383465/722699,426839/804444,810304/1527143,2857751/5385873,26530063/5000000}}

回归年

{{2315/9464,24461115},{0.24461115807269653423},{0,1/4,11/45,23/94,34/139,227/928,261/1067,**2315/9464**,2576/10531,10043/41057,12619/51588,35281/144233,118462/484287,4892223/200000000}}

显然, 合于率的情形没有例外, 不再一一罗列。

至于其它约余精确度的讨论, 我们另文叙述。

如何调日法？

在中国古代，如何调日法？如何编制农历历法？

相信古人已经知道下面的公式：

$$\text{闰周} = (365 + \text{斗分}/\text{纪法}) \div (29 + \text{朔余}/\text{日法}) - 12$$

因此，古代制定历法可能的的方法是：

- (1) 实测日法、朔余，闰周，依此推出纪法、斗分；
- (2) 实测纪法、斗分，闰周，依此推出日法、朔余；
- (3) 实测纪法、斗分，日法、朔余，依此推出闰周；

具体的选择，那是因人而异了。据我考证，按照是否“使用”闰周，可粗略地分为两大类（历法的编号、名称来自李锐“日法朔余强弱考”）：

(一) 使用闰周的，又可分为两类：

(1) 神秘派：这要从古六历说起：黄帝、颛顼、夏、殷、周、鲁，这是春秋战国时期，以及秦朝时期制定的六种历法，其特点是以 $365 + 1/4$ 日（分母中有 4，故又称为四分历）为一回归年， $29 + 499/940$ (≈ 29.530851) 日为一朔望月，取 19 年置 7 闰月 ($7/19 \approx 0.3684210526$) 为一闰周。

$$368, \{0, 1/2, 1/3, 3/8, 4/11, 7/19, 46/125\}$$

神秘派最主要的特征是选择“会数四十七”和“十九年七闰”作为基本参数；其数据往往显得牵强附会，故作神秘。

	名称	朔望月 29+	最小约余	回归年 365+	最小约余	闰周
1	刘歆三统术	43/81	5308	385/1539	2501624	7/19
2	[后汉]四分术	499/940	530851	1/4	25	7/19
3	刘洪乾象术	773/1457	530542	145/589	246179	7/19
4	韩翊黄初术	6409/12079	53059028	1205/4883	2467745	7/19
5	杨伟景初术	2419/4559	5305988	455/1843	24688	7/19
6	刘智正术	18703/35250	53058156	37/150	24666	7/19
7	姜岌三纪术	3217/6063	5305954	605/2451	246838	7/19
9	何承天元嘉术	399/752	530585	75/304	24671	7/19
补 1	九执术	373/703	530583	3295/13357	24668713	7/19

若将“三统术”的 $43/81$ 看作为 $2021/3807$ ，“四分术”的 $1/4$ 看作为 $95/380$ ，“正术”的 $37/150$ 看作为 $703/2850$ ，“九执术”的 $373/703$ 看作为 $494209/33041$ ，则回归年分母都是朔望月日法 $\times 19 \div 47$ ；有了这个认识，即可将朔望月和回归年的分母统一起来：

	名称	日法	纪法	统一日法	朔余	岁余	最小闰周余
1	刘歆三统术	$3807 = 47 \times 81$	$1539 = 81 \times 19$	1539	817	385	368
2	[后汉]四分术	$940 = 47 \times 20$	$380 = 20 \times 19$	940	499	235	368
3	刘洪乾象术	$1457 = 47 \times 31$	$589 = 31 \times 19$	27683	14687	6815	368
4	韩翊黄初术	$12079 = 47 \times 257$	$4883 = 257 \times 19$	229501	121771	56635	368
5	杨伟景初术	$4559 = 47 \times 97$	$1843 = 97 \times 19$	86621	45961	21385	368
6	刘智正术	$35250 = 47 \times 750$	$14250 = 750 \times 19$	35250	18703	8695	368
7	姜岌三纪术	$6063 = 47 \times 129$	$2451 = 129 \times 19$	115197	61123	28435	368
9	何承天元嘉术	$752 = 47 \times 16$	$304 = 16 \times 19$	14288	7581	3525	368
补 1	九执术	$33041 = 47 \times 703$	$13357 = 703 \times 19$	13357	7087	3295	368

这种考虑，应该是以后将朔望月和回归年的分母统一起来的基础。

这些历法中，由于闰周是固定的，因此，实测数据选择回归年或者朔望月之一即可。至

于具体的选择，可按照最小约余考虑：

实测回归年的有：02[后汉]“四分历”，03 刘洪“乾象历”，05 杨伟“景初历”，06[晋]刘智“正历”，07[后秦]姜岌“三纪甲子元历”，09[宋]何承天“元嘉历”；

实测朔望月的有：01[汉]刘歆“三统历”，03 刘洪“乾象历”，09[宋]何承天“元嘉历”，补1“九执历”；

04[魏]韩詡“黄初历”就难以判断，估计是实测朔望月。

关于闰月的设置，闰月一般是放在十二月，直到汉武帝太初元年（公元前104年）的《太初历》规定：以没有中气的月份为闰月；

（2）实测派：其数据大都是根据实测数值得到的平均值；

	名称	朔望月29+	最小约余	回归年 365+	最小约余
8	赵[匪文]玄始术	47251/89052	5306000988	1759/7200	24430555
10	祖冲之大明术	2090/3939	5305915	9589/39491	2428148185
11	[梁]大同术	815/1536	5305989	9681/39616	244370961
12	张龙详正光术	39769/74952	53059291279	1477/6060	24372937
13	李业兴和术	110647/208530	53060470915	4117/16860	244187425
14	刘孝孙术	607/1144	5305944	10363/42640	243034709
15	宋景业天保术	155272/292635	53059955234	5787/23660	244590025
16	[周]甄鸾天和术	153991/290160	53060725117	5731/23460	24428815
补2	董峻甲寅术	146595/276284	53059532944	5461/22338	244471304
补3	孟宾术	503/948	5305907	11945/48901	2442690333
17	马显丙寅元术	28422/53563	5306274853	3167/12992	24376539
18	[隋]张宾开皇术	96529/181920	53061235708	25063/102960	2434246309
19	张胄元大业术	同16天和术			
20	刘焯皇极术	659/1242	5305958	114065/466440	2445437784
21	傅仁均戊寅术	6901/13006	53060126	2315/9464	24461115

其中刘焯“皇极术”： $11406.5/46644 = 114065/466440 = 22813/93288$ 。

亦可将朔望月和回归年的分母统一起来：

	名称	统一日法	朔余	岁余	闰周	最小闰周余
8	赵[匪文]玄始术	53431200	28350600	13053539	221/600	368333
10	祖冲之大明术	1540149	817190	373971	144/391	368286
11	[梁]大同术	950784	504485	232344	228/619	368336
12	张龙详正光术	37850760	20083345	9225342	186/505	368316
13	李业兴和术	117193860	62183614	28617267	207/562	368327
14	刘孝孙术	469040	248870	113993	151/410	36829
15	宋景业天保术	197821260	104963872	48385107	249/676	368343
16	[周]甄鸾天和术	113452560	60210481	27715116	144/391	368286 同 10
补2	董峻甲寅术	181518588	96312915	44376086	242/657	36834
补3	孟宾术	586812	311357	143340	228/619	368336 同 11
17	马显丙寅元术	23996224	12733056	5849449	165/448	368303
18	[隋]张宾开皇术	78043680	41410941	18997754	158/429	368298
19	张胄元大业术	同 16 天和术				
20	刘焯皇极术	839592	445484	205317	249/676	368343 同 15
21	傅仁均戊寅术	8792056	4665076	2150635	249/676	368343 同 15

只是统一后的日法确实太大了，恐怕不利于计算。但这导致人们认识到：日法应该统一。以上历法仍然讨论闰周，但是，不再拘泥于“十九年七闰”的古训，而是做了所谓的“破章”。这就导致以后的历法不再关心闰周的讨论了。

一个疑问是：这里的闰周是实测出来的，还是计算出来的？

从朔望月的最小约余，回归年的最小约余，以及最小闰周余的数值来分析，应该是测定闰周的值比较合理，因为它只需要六位精确度即可（刘孝孙术和董峻甲寅术只有五位精确度），缀术（连分数）结果如下：

368333,{0,1/2,1/3,3/8,4/11,7/19,214/581,**221/600**,1761/4781,3743/10162,5504/14943,14751/40048,20255/54991,116026/315003,368333/1000000}

368286,{0,1/2,1/3,3/8,4/11,7/19,137/372,**144/391**,2009/5455,2153/5846,6315/17147,8468/22993,184143/500000}

368336,{0,1/2,1/3,3/8,4/11,7/19,221/600,**228/619**,23021/62500}

368316,{0,1/2,1/3,3/8,4/11,7/19,179/486,**186/505**,737/2001,923/2506,3506/9519,92079/250000}

368327,{0,1/2,1/3,3/8,4/11,7/19,200/543,**207/562**,1442/3915,1649/4477,16283/44208,17932/48685,70079/190263,368327/1000000}

36829,{0,1/2,1/3,3/8,4/11,7/19,144/391,**151/410**,295/801,1036/2813,1331/3614,5029/13655,6360/17269,36829/100000}【为什么不取 295/801？这与刘孝孙的闰周取为 36829 有关。】

368343,{0,1/2,1/3,3/8,4/11,7/19,242/657,**249/676**,2732/7417,11177/30344,36263/98449,47440/128793,368343/1000000}

36834,{0,1/2,1/3,3/8,4/11,7/19,235/638,**242/657**,477/1295,1196/3247,18417/50000}

368303,{0,1/2,1/3,3/8,4/11,7/19,158/429,**165/448**,1313/3565,1478/4013,5747/15604,30213/82033,368303/1000000}

368298,{0,1/2,1/3,3/8,4/11,7/19,151/410,**158/429**,2205/5987,2363/6416,9294/25235,11657/31651,184149/500000}

(二)“不用”闰周的，它们的朔望月和回归年的分母都是统一的；

	名称	朔望月29+	最小约余	回归年 365+	最小约余
22	南宫说神龙术	5306/10000	5306	153/625	2448
23	李淳风麟德术	711/1340	530597	328/1340	24477
24	僧一行大衍术	1613/3040	5305921	743/3040	24440789
25	郭献之五纪术	同23麟德术			
26	徐承嗣贞元术	581/1095	5305936	258/1095	235616
27	徐昂宣明术	4457/8400	53059523	2055/8400	244642
28	边冈崇玄术	7163/13500	53059259	3301/13500	244518518
29	王朴钦天术	382028/720000	530555	17604/72000	2445
30	王处讷应天术	5307/10002	53059388	2445/10002	2444511
31	吴昭素乾元术	1560/2940	5306	720/2940	2448
补4	王睿致道术	5619/10590	5305949	2591/10590	244664778
补5	王睿术	962/1700	565882	416/1700	244705
32	史序仪天术	5359/10100	530594059	2470/10100	244554
补6	张奎乾兴术	4249/8008	5305944	1958/8008	2445
33	宋行古崇天术	5619/10590	5305949	2590/10590	24457
34	周琮明天术	20693/39000	5305897435	9500/39000	2435

35	卫朴奉元术	12575/23700	5305907	5773/23700	243586497
36	皇居卿观天术	6383/12030	53059019	2930/12030	2435577
37	姚舜辅占天术	14899/28080	530591168	6840/28080	2435
38	姚舜辅纪元术	3868/7290	5305898	1776/7290	243621
39	陈德一统元术	3677/6930	53059163	1688/6930	2435786
40	刘孝荣乾道术	1591776/3000000	530566666	7306/30000	243533333
41	刘孝荣淳熙术	299256/564000	530496	1374/5640	243617
42	刘孝荣会元术	20534/38700	530594315	9432/38700	2437209
43	杨忠辅统天术	6368/12000	53067	2910/12000	2425
44	鲍瀚之开禧术	8967/16900	530591715	4108/16900	243076
45	李德卿淳祐术	1873/3530	5305949	857/3530	2427762
46	谭玉会天术	5168/9740	5305954	2366/9740	2429158
47	陈鼎成天术	3937/7420	53059299	1801/7420	24272237
48	[金]杨级大明术	2775/5230	5305927	1274/5230	2435946
49	赵知微重修大明术	同48大明术			
50	耶律履乙未术	10978/20690	53059449	5040/20690	2435959
51	[元]郭守敬授时术	530593/10000	530593	2425/10000	2425
52	[元]郭守敬授时术	1162/2190		放弃	
53	[元]郭守敬授时术	4388/8270		放弃	
54	[元]郭守敬授时术	3486/6570		放弃	

【编者注：

[日]藪内清《中国の天文历法》345页的数据“153991/290160”应该是153961/290160。

《中国古代历法》125页20“大同术”的纪日应该是14469521；23“天和术”的朔余应该是153961；（崔振华，李东生，新华出版社，1993年）。在125页补充25董峻郑元伟“甲寅术”。

《中国古代数理与天文学探析》（曲安京，纪志刚，王荣彬，西北大学出版社，1994年）154—156页有更多的中国古代历法参数可资参考。】

	名称	闰周	最小闰周余
22	南宮说神龙术	54388/147653	36835011818
23	李淳风麟德术	14576/39571	36835056
24	僧一行大衍术	33067/89773	3683401468
25	郭献之五纪术	同23麟德术	
26	徐承嗣贞元术	11901/32336	368041811
27	徐昂宣明术	91371/248057	36834679126
28	边冈崇玄术	146845/398663	368343688779
29	王朴钦天术	1957926/5315507	36834228606979
30	王处讷应天术	7253/19691	368340866
31	吴昭素乾元术	533/1447	368348
补4	王睿致道术	154557/309701	499052311745
补5	王睿术	4145/8286	50024137
32	史序仪天术	109862/298259	36834429137
补6	张奎乾兴术	87106/236481	3683424884
33	宋行古崇天术	115192/312729	36834447716

34	周琮明天术	424184/1151693	368313430749
35	卫朴奉元术	257773/699875	36831291302
36	皇居卿观天术	130304/355253	366792117167
37	姚舜辅占天术	9852/26749	368312834
38	姚舜辅纪元术	39645/107639	3683144585
39	陈德一统元术	75374/204647	36831226453
40	刘孝荣乾道术	4078661/11073972	3683105754647
41	刘孝荣淳熙术	85199/231323	36831184101
42	刘孝荣会元术	30066/81631	3683159583
43	杨忠辅统天术	9321/25312	36824431
44	鲍瀚之开禧术	183804/499067	368295238915
45	李德卿淳祐术	38391/104243	36828372168
46	谭玉会天术	1605/4358	3682882
47	陈鼎成天术	26899/73039	3682826982
48	[金]杨级大明术	56884/154445	3683123442
49	赵知微重修大明术	同 48 大明术	
50	耶律履乙未术	112517/305494	3683116526
51	[元]郭守敬授时术	1208376/3281177	3682751646741
52	[元]郭守敬授时术	放弃	
53	[元]郭守敬授时术	放弃	
54	[元]郭守敬授时术	放弃	

这些闰周的数值是如何得到的？我认为：这样高精度的闰周数值，不可能是闰周的实测数值。它们已经脱离了“十九年七闰”旧框框，亦与何承天术无关，而是得益于朔望月和回归年实测数值精确度的提高，根据朔望月和回归年的实测数值，应用“缀术（连分数）”方法得到朔望月和回归年的分数表达式，再根据下面公式计算即可：

$$\text{闰周} = \text{回归年} \div \text{朔望月} - 12。$$

所谓“不用”闰周，并非是不能计算，而是由于闰周只是一个导出数值，不再需要特别强调了。

$$1 \text{ 日} = 24 \times 60 \times 60 = 86400 \text{ 秒}；$$

$$\text{回归年}：5 \times 60 \times 60 + 48 \times 60 + 40 = 20920 \text{ 秒}；20920 \div 86400 = 0.2421296296296 \dots\dots$$

$$\text{朔望月}：12 \times 60 \times 60 + 44 \times 60 + 3 = 45843 \text{ 秒}；45843 \div 86400 = 0.5305902777777 \dots\dots$$

$$29 \times 24 \times 60 \times 60 + 20920 = 2526520 \text{ 秒}$$

$$365 \times 24 \times 60 \times 60 + 45843 = 31581843 \text{ 秒}$$

$$2526520 \div 31581843 = 0.079999131146336203368498792169919$$

回归年，朔望月精确值的连分数：

$$\{a=0.2421296296296, b=\text{ContinuedFraction}[a]\}; \text{Convergents}[b]$$

$$\{0, 1/4, 7/29, 8/33, 23/95, 100/413, 423/1747, 523/2160\}$$

$$\{a=0.5305902777777, b=\text{ContinuedFraction}[a]\}; \text{Convergents}[b]$$

$$\{0, 1, 1/2, 8/15, 9/17, 26/49, 477/899, 503/948, 980/1847, 1483/2795, 2463/4642, 6409/12079, 8872/16721, 15281/28800\}$$

$$\text{闰周精确值}：31581843/2526520 - 12 = 0.5001357598594$$

不过，闰周的精确度与朔望月、回归年的精确度毫无关系，比如说，王睿的两个历法就是个例外：

	名称	朔望月29+	回归年 365+	朔望月	回归年	闰周近似值
补 4	王睿致道术	2591/10590	5619/10590	29.5305949008	365.4990523117	0.499052312
补 5	王睿术	416/1700	962/1700	29.5658823529	365.5002413709	0.500241371