Carmichael parfait
&
Les fonctions magiques de Bachet-Fermat

Par : Méhdi Pascal
Mehdi-Pascal@hotmail.fr

Abstract

This paper represents some test in theory of numbers.

- A connection between perfect number and number of Carmichael.
- An example of method translation to functions.
- A few introductory remarks for the next letter.

Résumé

Ce papier contient deux petits résultats, le premier est sur une toute petite liaison qui lie les nombres parfaits avec les nombres de Carmichael, ce n'est pas vraiment de grande chose, c'est juste une généralisation à l'une des formules de Jack Chernick.

J. Chernick démontra une formule en 1939 qui peut être utilisé pour construire un sous-ensemble de nombres de Carmichael, telle que le nombre (6m+1)(12m+1)(18m+1) est un nombre de Carmichael, si ses trois facteurs sont tous premiers, et pour éclairer ma généralisation, je vais faire un peu de coloriage,

$$(6.1.m + 1)\ (6.2.m + 1)\ (6.3.m + 1)$$

En rouge le nombre **6** est le premier nombre parfait, en vert les nombres **1**, **2** & **3** sont exactement les diviseurs propres de **6**=**1**+**2**+**3**.

Ainsi on peut passer au second nombre parfait, à savoir c'est **28**=**1**+**2**+**4**+**7**+**14** et on a,

$$(28.1.m + 1)\ (28.2.m + 1)\ (28.4.m + 1)\ (28.7.m + 1)\ (28.14.m + 1)$$

Ce nombre est un nombre de Carmichael, si ses cinq facteurs sont tous premiers.

Pour la démonstration, j'ai introduit les fonctions de Viète.

Pour le second résultat, j'aimerai poser cette question :

Est il possible avec les machines qu'on a aujourd'hui de construire un carré magique d'ordre un milliard ?

Pour qu'une machine puisse construire un tel carré, il faut que sa unité arithmétique soit capable de traiter les entiers d'ordre 10^{18} , à savoir qu'en écriture binaire le nombre 10^{18} contient 60 chiffres, donc il nous faut un microprocesseur puissant, d'autre part, un tel programme nécessite de définir une table de dimension égale 10^{18}, dont chaque élément occupe 60 bits, donc un bloque de mémoire qui s'étend à $6*10^{19}$ bits « environ de 6,5 exaoctet », sauf erreur je pense que nous n'avons pas encore cette machine, et pour qu'on puisse profiter de ce que on a, j'ai pensé de traduire les méthodes au fonctions, car la fonction donne immédiatement le résultat et indépendamment des autres valeurs, alors que ce n'est pas le cas pour la méthode ! Par exemple, comme méthode nous pouvons définir la suite de récurrence suivante : $U_1=1$, et $U_n=U_{n-1} +2n - 1$ donc pour calculer U_{10}, il faut calculer toutes les valeurs précédentes, alors que pour la fonction, on peut la définir comme suivante : $U_n=n^2$, et on calcule immédiatement U_{10}.

Dans cette partie j'ai tout simplement traduis quels que méthodes de construction des carrés magiques, qui revient à Bachet & Fermat aux fonctions à deux variables i & j, comme ça le problème de la machine est résolu.

Je sais que ce second résultat n'est pas vraiment de grande chose, puisqu'il ne s'agit que des carrés magiques, s'ils ne sont qu'un jeux d'enfant, mais j'aimerai que vous le prenez pour principe, peut être un jour les machines peuvent inverser une matrice d'ordre un milliard, ou de calculer le déterminant de même ordre, ou voir même de démontrer ce qu'on ne peut pas démontrer.
De plus c'est impossible, car ma machine peut calculer environ de 80000 valeurs par seconde, sans compter le temps de l'affichage.
Avec cette vitesse, il me faut 4 mois pour calculer toutes les valeurs d'un carré magique d'ordre un million, et environ 4000 siècles pour l'ordre d'un milliard !!!

Fin résumé

..[]..

Première partie
Carmichael parfait

Définitions et notations

Entier simple

Un entier n est dit simple si sa valuation p-adique par rapport à n'importe premier p ne peut prend que l'une des deux valeurs 0 ou 1, « entier sans facteur carré »

Diviseur propre

Les diviseurs propres d'un entier n, sont tous ses diviseurs sauf n lui-même.
Exemple :
Les diviseurs de 6 sont 1, 2, 3, et 6
Les diviseurs propres de 6 sont 1, 2 et 3

Les nombres de Carmichael

Un entier n est un nombre de Carmichael s'il est impair, simple, composé au moins de trois facteurs premiers, et tel que, si p est l'un de ses facteurs premier, alors $(p-1)$ est un facteur de $(n-1)$.

Les nombres parfaits

Un entier n est dit parfait, s'il vaut à la somme de ses diviseurs propres.

Les fonctions de Viéte « pour François Viéte 1540-1603 »

Elles sont à la base des fonctions symétriques, par définition, une fonction à n variables est dite symétrique, s'elle préserve sa valeur pour toute permutation à ses variables.
Comme un exemple, $F(x,y) = xy + x + y$

Définition

Soient $n \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{Z}$,

- si $1 \le j \le n$ alors on a :

$$M_n^j(x_i) = \sum_{1 \le i_1 < i_2 ..[].. < i_j \le n} x_{i_1} x_{i_2} ..[].. x_{i_j}$$

Ou bien

$$M_n^j(x_i) = \underbrace{\overbrace{x_1 x_2 ..[].. x_j}^{j\ fois} + \ ..[].. + \overbrace{x_{n-j+1} x_{n-j+2}\ ..[].. x_n}^{j\ fois}}_{C_n^j\ fois}$$

- Si $j = 0$, $M_n^0(x_i) = 1$

- Si $j < 0$ ou $j >$ n, $M_n^j(x_i) = 0$

$M_n^j(x_i)$ est dite fonction de Viéte d'ordre j et de degré n. L'indice i est en générale choisie entre 1 et n, mais selon les besoins on peut indicer les variables selon un ordre convenable, par exemple, $M_{n-1}^j(x_{i\neq j})$ là l'indice i prend toutes les valeurs entre 1 et n, sauf j.
Une première propriété est liée aux polynômes, tel que :

Si $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ ..[].. \ + a_n = (x - r_1)(x - r_2) \ ..[].. \ (x - r_n)$ alors

$$M_n^j(r_i) = (-1)^j a_j$$

Donc,

$$\prod_{j=1}^{n}\left(x - r_j\right) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j M_n^j\left(r_i\right) x^{n-j}$$

On a aussi,

$$\prod_{j=1}^{n}\left(x + r_j\right) = \sum_{j=0}^{n} M_n^j\left(r_i\right) x^{n-j}$$

En particulier, si $x = 1$, et on remplace r_j par le produit ar_j, on obtient l'identité suivante :

$$\prod_{j=1}^{n}\left(ar_j + 1\right) = \sum_{j=0}^{n} M_n^j\left(ar_i\right) = \sum_{j=0}^{n} M_n^j\left(r_i\right) a^j = 1 + \sum_{j=1}^{n} M_n^j\left(r_i\right) a^j$$

Les fonctions de Viéte sont très riches, elles permettent des superbes formules, dont la plus importante est la suivante :

La relation de récurrence « facultative»

Soient n et t des entiers positives, et $k \in [\![1,n]\!]$ on a :

$$M_n^t(x_i) = M_{n-1}^t(x_{i,i\neq k}) + x_k M_{n-1}^{t-1}\left(x_{i,i\neq k}\right)$$

Preuve

La raison de symétrie dans les fonctions de Viéte nous permet de déduire que ses termes sont distingues, de plus on a :

- L'égalité du nombres des termes dans les deux membre de l'égalité car vu,

$$C_n^t = C_{n-1}^t + C_{n-1}^{t-1}.$$

- L'égalité de l'ordre dans les deux membres, car même que l'ordre de $M_{n-1}^{t-1}\left(x_{i,i\neq k}\right)$ est égale à $t - 1$, alors l'ordre de $x_k M_{n-1}^{t-1}\left(x_{i,i\neq k}\right)$ est égale à t.

Donc il suffit de prouver que les termes dans l'expression $M_{n-1}^t(x_{i,i\neq k})$ sont distincts des termes de l'expression $x_k M_{n-1}^{t-1}\left(x_{i,i\neq k}\right)$, cela est immédiat, car la première expression ne contient pas la variable x_k.

Exemples

Si $x_i = 1$ pour tout i, alors on obtient la formule de Pascal, telle que,

$$M_n^t(1) = C_n^t = C_{n-1}^t + C_{n-1}^{t-1}$$

On peut aussi poser $x_i = i - 1$, cela veut dire que $x_i \in \{0, 1, 2, ..[].. , \text{n} - 1\}$, ce qui nous permet la relation de récurrence pour les nombres de Stirling de premier espèce non signé.

..[]..

Théorème

Soient N un nombre parfait, et d_1, d_2, d_3, ..[].. d_k tous les diviseurs propres de N,
Soit $P_j = Nmd_j + 1$ avec $1 \leq j \leq k$, et $m \in \mathbb{N}^*$
Si P_1, P_2, ..[].. , P_k, Sont tous premiers pour un entier m donné, Alors leur produit est un Nombre de Carmichael.

Preuve

Soit $C = \prod_{j=1}^{K} p_j = \prod_{j=1}^{k}\left(Nmd_j + 1\right)$, ce nombre est donc un polynôme en (Nm) de degré k, et on peut écrire :

$$C = M_k^k(d_i)N^k m^k + M_k^{k-1}(d_i)N^{k-1}m^{k-1} + \ ..[].. \ + M_k^1(d_i)Nm + 1$$

Et donc,

$$\frac{C-1}{p_j - 1} = \frac{M_k^k(d_i)N^{k-1}m^{k-1}}{d_j} + \frac{M_k^{k-1}(d_i)N^{k-2}m^{k-2}}{d_j} + \ ..[].. \ + \frac{M_k^1(d_i)}{d_j}$$

Comme N est un nombre parfait, alors a :

$$M_k^1(d_i) = d_1 + d_2 + d_3 + \ ..[].. \ + d_k = N$$

Donc, $\frac{C-1}{p_j - 1}$ est bien un entier

C.Q.F.D

Exemples

1/ N=6=1+2+3

P_1=6m+1 ; P_2=12m+1 ; P_3=18m+1

Ces nombres sont premiers pour m∈{1, 6, 35,45, 51, 55, 56, 100, 121, 195, 206, ..[].. }
Dont les nombres de Carmichael sont respectivement les suivants : 1729 ; 294409 ; 56052361 ; 118901521 ; 172947529 ; 216821881 ; 228842209 ; 1299963601 ; 2301745249 ; 9624742921 ; 11346205609 ..[]..

2/ N=28=1+2+4+7+14

P_1=28m+1 ; P_2=56m+1 ; P_3=112m+1 ; P_4=196m+1 ; P_5=392m+1

Ces nombres sont premiers pour m∈{2136, 2211, 4071, 5106, 5430, 9000, 10656, 17655, 18315, 20220, 20805, 21381, 22356, 22920, 23025, 29616, 37050, 39261, 45795, 49920, 55686, 60435, 62205, 64380,79356, 81345, 91455, 94800, 95910, 96285, 105336, 108585, 111885, ..[].. }

Pour m= 2136, C = 599966117492747584686619009 avec P_1=59809 ; P_2=119617; P_3=239233 ; P_4=418657 ; P_5=837313

Pour m= 111885, C = 236573351628229522348274676488749441 avec P1=3132781 ; P2=6265561 ; P3=12531121 ; P4=21929461 ; P5=43858921.

Le troisième nombre parfait est N = 496, là j'ai pas pu trouver un exemple, faute de la machine, car je ne pratique que le Quick-Basic de Microsoft, c'est un vieux langage de programmation « les années 80 et 90 », l'un des problèmes de ce langage est l'accès à la mémoire, « très limité », mais je me débrouille, par exemple au lieu de créer une table qui contient un nombre important des nombres premiers, j'utilise le crible d'Eratosthène comme une fonction, et non comme méthode, telle que :

$$\underset{x\geq 2}{\text{Ératosthène}}(x)=\left[\left|\cos\left(\sum_{j=2}^{[\sqrt{x}]}\left[\cos\left\{\frac{x}{j}\right\}\right]\right)\right|\right]$$

Cette fonction est de type logique, car elle vaut à l'unité pour x premier, et à zéro pour x composé.
Pour N = 496, après plus de 12 heures de recherche, ma machine vient de me dire, que si un tel Carmichael parfait existe, alors il est de plus de 80 chiffres en écriture décimale.
Les nombres parfaits pairs sont liés aux nombres de Mersenne $M_p = 2^p - 1$, tel que si M_p est premier alors $2^{p-1} M_p$ est un nombre parfait, et pour que M_p soit premier il faut mais il ne suffit pas que p soit aussi premier, soit $N_p = 2^{p-1} M_p$, et trichons un peu, par exemple faisons comme si 4 est un nombre premier, pire comme si M_4 est aussi premier, alors dans ce cas on a $N_4 = 120$ est bien un nombre parfait, puisqu'il vaut à la somme de ces diviseurs propres, tel que, **120 = 1 + 2 + 4 +8 + 15 + 30 + 60** de même le nombre suivant :

(120.1.*m*+1)(120.2.*m*+1)(120.4*m*+1)(120.8.*m*+1)(120.15.*m*+1)(120.30.*m*+1)(120.60.*m*+1) est un nombre de Carmichael si ses facteurs sont tous premiers.

Bien que 120 n'est pas un nombre parfait, mais au moins les deux nombres suivant sont des nombres de Carmichael :

184762012141999477137728004826423834584157392001
313137114892563861817812689836330534740513338801
Respectivement pour $m = 6055$ & $m = 9072$.

Vous demandez certainement comment j'ai fait pour la fonction Eratosthène ?
Alors là, la seconde partie vous donne une idée !

..[]..

Seconde Partie

Les fonctions magiques de Bachet & Fermat

Malgré que les carrés magiques ne soient qu'un jeu d'enfant, on ne sait que peu sur cette magie, surtout on sait plus comment les construire tous pour un ordre possible, par exemple le cas d'ordre 4, on sait qu'il existe 880 carrés magiques, un nombre pas évident pour un tout petit ordre, et pour le réduire on peut jouer un jeu de permutation cyclique, ce qui nous donne 275 cas, aussi pas évident.
Euler donnait une méthode basé sur des notions cartésienne, mais cette méthode ne permet pas touts les carrés magique, on particulier elle ne permet pas un carré magique d'ordre 6.
Les méthodes que je donne ici sont connus par Bachet de Méziriac, et Fermat, ils sont aussi fort probablement connus par Cardon.
Ces méthodes ne permettent pas tous les carrés magiques, mais au moins ils nous permettent un carré magique pour chaque ordre possible.

« à savoir que l'unique ordre impossible est 2, car pour construire un carré magique d'ordre 2, il nous faut 6 alignement magiques, deux lignes, deux colonnes et deux diagonales, alors que le nombre des alignement qu'on peut avoir, sont aussi au nombre 6 sauf échange, dont deux seulement sont magiques (1,4) & (2,3), d'où l'impossibilité. »

Notations,

- $r = a \bmod b$, veut dire que r est le reste de la division Euclidienne de a sur b.
- $[x]$ la parie entière de x
- $\{x\}$ la partie fractionnaire de x
- $|x|$ la valeur absolu de x
- Les variables d'une fonction peuvent être représenter entre les parenthèse comme elles peuvent être représenter par des indices, exemple $F(i,j)=F_{i,j}=F_{ij}$
- Dans ce qui suit, l'indice i indique le ligne i, & l'indice j indique la colonne j.
- Un carré d'ordre n n'est qu'une matrice carrée de même ordre.
- Le produit de deux carrés n'est pas un produit matriciel, c'est juste un produit scalaire, ainsi par exemple, $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 & b_1b_2 \\ c_1c_2 & d_1d_2 \end{pmatrix}$

Dans ce qui suit, je donne ces trois fonctions, puis je donne une vérification numérique, et après on passe aux démonstrations.

1/ la fonction de Bachet, « Cas impair »

Cette fonction sera notée par *Bachet (i, j)*, c'est une matrice carrée d'ordre n « impair », i et j sont donc les variables compris entre 1 et n.

Et on a :

$$B_{i,j} = (i+j) \; mod \; 2$$

$$A_{i,j} = \frac{i+j+nB_{i,j}}{2} mod(n)$$

$$C_{i,j} = \frac{n+1+i-j+nB_{i,j}}{2} mod(n)$$

$$X_{i,j} = A_{i,j} + n\left[cos\left(A_{i,j}/n\right)\right]$$

$$Y_{i,j} = C_{i,j} + n\left[cos\left(C_{i,j}/n\right)\right]$$

&

$$Bachet(i,j) = n\left(X_{i,j}-1\right) + Y_{i,j}$$

2/ la fonction de Fermat, pour les cas doublement pairs, (n=4k)

Cette fonction sera noté par *Fermat(i, j)*

$$k = n/4$$

$$\alpha_i = \left[(i-1)/k\right]$$

$$R_{i,j} = \frac{\left|sin(\alpha_i \frac{\pi}{2}) + cos(\alpha_i \frac{\pi}{2}) + sin(\alpha_j \frac{\pi}{2}) + cos(\alpha_j \frac{\pi}{2})\right|}{2}$$

$$\pi_{i,j} = (i-1)n + j$$

$$B_{i,j} = (i + j + Ri,j) mod\ 2$$

&

$$Fermat(i,j)=B_{i,j}.(n^2+1-2\pi_{i,j})+\pi_{i,j}$$

3/ la fonction de Bachet & Fermat, pour les cas simplement pairs, (n=4m+2)

Cette fonction sera noté par *Bachet&Fermat(i, j)*

$$k = (n + 2)/4$$

$$\pi(i,j) = (i - 1)n + j$$

$$\alpha(i) = [i/k]$$

$$R(i) = sin\left(\alpha(i)\frac{\pi}{2}\right) + cos\left(\alpha(i)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$Q(i,j) = \frac{|R(i)+R(j)|}{2}$$

$$\beta(i,j) = (i + j + Q(i,j)) \bmod 2$$

$$W(i) = |R(i)-1|.(n+1)/2 + i.R(i)$$

$$G(i) = W(i) mod\, 2$$

$$Cr(i,j) = G(i).[|cos(W(i)+W(j) - (n+2)/2)|]$$

$$\beta n(i,j) = \beta(i,j) - Cr(i,j)$$

$$F(i,j) = \beta n(i,j).(n^2 + 1 - 2\pi(i,j)) + \pi(i,j)$$

$$M(i) = [2(\mathrm{n-i})/n]$$

$$Cl(i) = 2.n.i - n + 1$$

$$Cc(\mathrm{j}) = n.(n-1) + 2j$$

$$\beta c(i,j) = M(j).[|cos((j - W(i) - 1)\ mod\ (n/2))|]$$

$$\beta l(i,j) = M(i).[|cos((i - W(j) - 1)\ mod\ (n/2))|]$$

$$Vpl(i) = Cl(\mathrm{i}) - 2\pi(i,j)$$

$$Vpc(j) = Cc(j) - 2\pi(i,j)$$

$$Fl(i,j) = \beta l(i,j)Vpl(i)$$

$$Fc(i,j) = \beta c(i,j)Vpc(\mathrm{j})$$

&

$$Bachet\ \&\ Fermat(i,j) = F(i,j) + Fc(i,j) + Fl(i,j)$$

Vérification numérique avec le Quick-Basic 4.5 de Microsoft.

1/Pour la fonction Bachet.

```
DEFINT A-Z
CLS
PRINT "Carre magique; d'ordre impair n=2k+1"
INPUT "n=", n
PRINT "Densite="; 1 / 2 * (n ^ 3 + n)
```

```
PRINT
FOR i = 1 TO n
   PRINT "ligne"; : PRINT USING "##"; i; : PRINT ":";
   FOR j = 1 TO n
      Bij = (i + j) MOD 2
      Aij = ((i + j + n * Bij) / 2) MOD n
      Cij = ((n + 1 + i - j + n * Bij) / 2) MOD n
      Xij = Aij + n * INT(COS(Aij / n))
      Yij = Cij + n * INT(COS(Cij / n))
      Bachetij = n * (Xij - 1) + Yij
      PRINT USING "####"; Bachetij;
   NEXT j
   PRINT
NEXT i
```

2/Pour la fonction Fermat.

```
DEFINT A-Z
CLS
CONST Pi = 3.141593
PRINT "Carre Magique d'ordre n=4k..."
INPUT "n=", n
PRINT "Densite=", (n ^ 3 + n) / 2
PRINT
k = n / 4
FOR i = 1 TO n
   PRINT "ligne"; : PRINT USING "##"; i; : PRINT ":";
   FOR j = 1 TO n
      ai = INT((i - 1) / k)
      aj = INT((j - 1) / k)
      Rij = (ABS(SIN(ai * Pi / 2) + COS(ai * Pi / 2) + SIN(aj * Pi / 2) + COS(aj * Pi / 2))) /
2
      Pij = (i - 1) * n + j
      Bij = (i + j + Rij) MOD 2
      Fermat4ij = Bij * (n ^ 2 + 1 - 2 * Pij) + Pij
      PRINT USING "####"; Fermat4ij;
   NEXT j
   PRINT
NEXT i
```

3/Pour la fonction Bachet & Fermat.

```
DEFINT A-Z
CLS
CONST Pi = 3.141593
PRINT "Carre Magique d'order n=4m+2..."
INPUT "n=", n
PRINT "Densite=", (n ^ 3 + n) / 2
k = (n + 2) / 4
PRINT
FOR i = 1 TO n
   PRINT "ligne"; : PRINT USING "##"; i; : PRINT ":";
   FOR j = 1 TO n
      Pij = (i - 1) * n + j
      ai = INT(i / k)
```

```
      aj = INT(j / k)
      Ri = SIN(ai * Pi / 2) + COS(ai * Pi / 2)
      Rj = SIN(aj * Pi / 2) + COS(aj * Pi / 2)
      Qij = ABS(Ri + Rj) / 2
      Bij = (i + j + Qij) MOD 2
      Wi = ABS(Ri - 1) * (n + 1) / 2 + i * Ri
      Wj = ABS(Rj - 1) * (n + 1) / 2 + j * Rj
      Gi = Wi MOD 2
      Crij = Gi * INT(ABS(COS(Wi + Wj - (n + 2) / 2)))
      Bnij = Bij - Crij
      Fij = Bnij * (n ^ 2 + 1 - 2 * Pij) + Pij
      Mi = INT(2 * (n - i) / n)
      Mj = INT(2 * (n - j) / n)
      Cli = 2 * n * i - n + 1
      Ccj = n * (n - 1) + 2 * j
      Bcij = Mj * INT(ABS(COS((j - Wi - 1) MOD (n / 2))))
      Blij = Mi * INT(ABS(COS((i - Wj - 1) MOD (n / 2))))
      Vpli = Cli - 2 * Pij
      Vpcj = Ccj - 2 * Pij
      Fcij = Bcij * Vpcj
      Flij = Blij * Vpli
      BachetFermatij = Fij + Fcij + Flij
      PRINT USING "######"; BachetFermatij;
   NEXT j
   PRINT
NEXT i
```

Démonstrations

Tout commence par Giuseppe Peano, on fait une petite visite à Reni Descartes, et on arrive à la magie de Bachet et Fermat.

Peano nous donne un simple départ, une matrice où les entier sont représentés l'un après l'autre, dans l'ordre croissant, de 1 à n^2, tel que :

$$\pi(i,j)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ..[].. & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & ..[].. & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & ..[].. & 3n \\ ..[].. & ..[].. & ..[].. & ..[].. & ..[].. \\ n^2-n+1 & n^2-n+2 & n^2-n+3 & ..[].. & n^2 \end{pmatrix} = n(i-1)+j$$

Descartes nous donne des Méthodes, pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences.

C'est simple, au lieu de représenter une matrice avec les entiers, on la représente avec un couple d'indice (i, j), comme une sorte des coordonnés cartésiennes par rapport à la matrice de Peano, les règles sont simples comme suivant :

- Une variable x est un entier compris entre 1 et n^2, les indices sont compris entre 1 et n.
- Le passage d'une variable x aux indices :

$$i = [(x - 1)/n]+1$$
$$j = (x - 1) \; mod \; (n) + 1$$

- Le passage depuis les indices vers la variable x : $x = \pi(i, j)$

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 7 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix} \textit{ Equivalent à } \begin{pmatrix} (1,1) & (1,1) & (1,2) \\ (2,3) & (3,1) & (3,1) \\ (1,1) & (1,3) & (3,2) \end{pmatrix}$$

Cette méthode nous permet de déterminer les isomères de la matrice de Peano, tels que :

Les rotations:

ij	1	2	3
1	1	2	3
2	4	5	6
3	7	8	9

Identité=Peano

ij	1	2	3
1	7	4	1
2	8	5	2
3	9	6	3

Rotation de π/4

ij	1	2	3
1	9	8	7
2	6	5	4
3	3	2	1

Demi tour

ij	1	2	3
1	3	6	9
2	2	5	8
3	1	4	7

Rotation de 3π/4

Les réflexions:

ij	1	2	3
1	7	8	9
2	4	5	6
3	1	2	3

x_Identité

ij	1	2	3
1	9	6	3
2	8	5	2
3	7	4	1

x_Rotation de π/4

ij	1	2	3
1	3	2	1
2	6	5	4
3	9	8	7

x_Demie tour

ij	1	2	3
1	1	4	7
2	2	5	8
3	3	6	9

x_Rotation de 3π/4

Ainsi on a :

- L'identité : $\pi(i\,,j) = n(i-1) + j$
- Rotation de π/4 : $R_1(i\,,j) = n^2 - nj + i$
- Le demi tour : $C(i\,,j) = n^2 + n(1-i) + 1 - j = n^2 + 1 - \pi(i\,,j)$
- Rotation de 3π/4 : $R_2(i\,,j) = nj - i + 1$
- x_identité : $x\_\pi(i\,,j) = n^2 - ni + j$
- x_rotation de π/4 : $x\_R_1(i\,,j) = n^2 + n(1-j) + 1 - i = n^2 + 1 - \pi(j\,,i)$
- x_demi tour : $x\_C(i\,,j) = ni - j + 1$
- x_rotation de 3π/4 : $x\_R_2(i\,,j) = n(j-1) + i$

Après Descartes il faut passionner pour arriver à Bachet et Fermat, c'est quand même fort, plaisant et délectable.

Pour ça nous retournons au carré de Peano pour savoir comment le transformer au carré magique, ici je vous donne les méthodes sans aucune démonstration, mais vous pouvez les récupérer dans l'appendice à la fin de ce papier.

La densité d'un carré magique est la somme magique, vaut à,

$$\rho = (1 + 2 + 3 + ..[]..+ n^2)/n = (n^3 + n)/2.$$

- Une première observation sur le carré de Peano, est que les médiatrices ont une somme magique,

	1	2	3	4	5	
	6	7	8	9	10	
	11	12	13	14	15	65
	16	17	18	19	20	
	21	22	23	24	25	
65			65			65

Donc pour les méthodes que on va pratiquer, on les préserve.

- Pour les cas des ordres impairs, on remarque que les diagonales brisées ont toutes une somme magique, exemple de n=5, on a : (4 , 10) & (11, 17, 23) ou (1) & (10, 14, 18, 22) ..[]..
  Donc on les prolonge et on les transforme en lignes et colonnes.
- Pour les cas des ordres pairs, la permutation de la moitie des éléments d'une ligne ou d'une colonne par leurs symétriques par rapport aux médiatrices nous permet des sommes magiques, exemple pour les lignes :

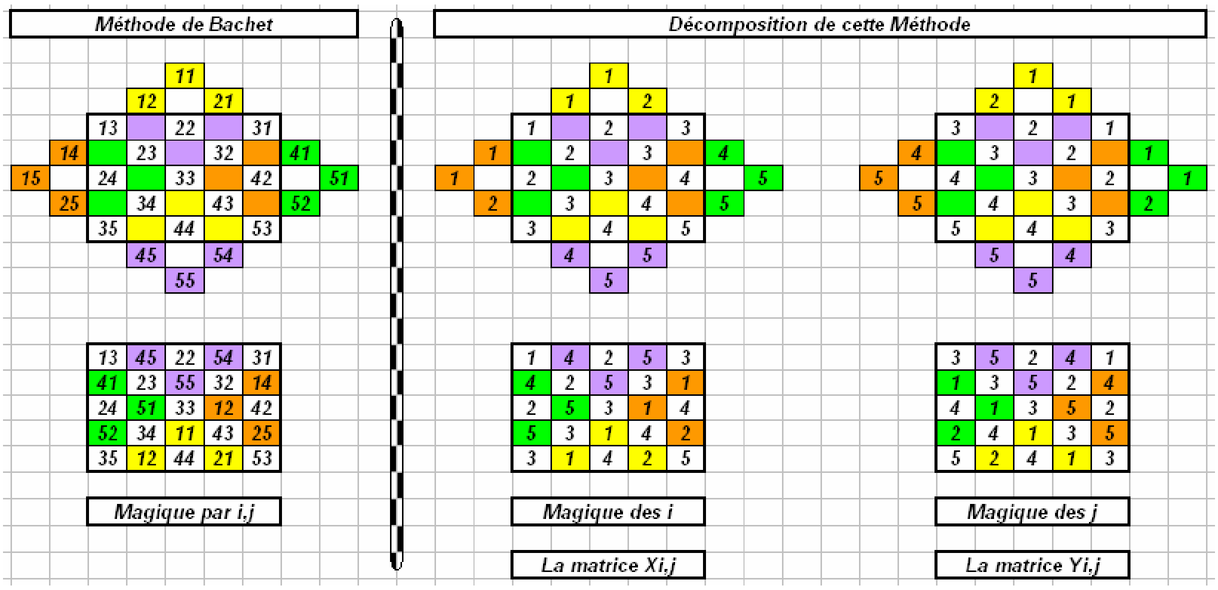
1	2	3	4	10
5	6	7	8	26
9	10	11	12	42
13	14	15	16	58

13	2	15	4	34
9	10	7	8	34
5	6	11	12	34
1	14	3	16	34

Voilà c'est la fin des méthodes, donc on passe au fonctionnement, c-à-d transformer ces méthodes aux fonctions.

1/ la fonction Bachet (i, j)

La méthode de Bachet ne fait que de fusionner les diagonales brisées, on les transforme on lignes et colonnes, et préserve les deux médiatrices ligne et colonne pour qu'elles devient de nouveau les deux diagonales de la matrice magique.
Ce qu'est vraiment magique dans le carré de Bachet, ce n'est pas le carré lui même, mais c'est sa méthode, simple et rationnelle.
Pour le fonctionnement on ne prend pas les variables en forme entière, on les prend en forme cartésienne *(i, j)* ou simplement *ij*.



La matrice logique

On donnant aux valeurs fixes un zéro, et les nouvelles valeurs un 1, on peut exprimer la matrice logique par : $\beta_{i,j}=(i+j) \bmod 2$

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	1
3	0	1	0	1	0
4	1	0	1	0	1
5	0	1	0	1	0

Logique

Le fonctionnement de la matrice Xij

On décompose cette matrice en deux matrices *0Xij* & *1Xij*, selon les valeurs de la matrice logique, et on a :

	1	2	3	4	5
1	1		2		3
2		2		3	
3	2		3		4
4		3		4	
5	3		4		5

0Xij

La fonction *Aij= ((i+j)/2) mod (n)* nous permet tous les valeurs de cette matrice, sauf pour *i=j=n*, donc on aura besoin d'un terme corrective.

Pour le terme corrective, on sais que modulo 2π, cos(0) = 1, et que pour toute autre valeur de x, $\cos(x) < 1$ donc on prend la partie entière de la valeur absolu, telle que, $[|\cos(x)|] = 0$ sauf pour $x = \pi$, mais π est irrationnel, donc sans souci on peut écrire :

$$0X(i,j) = A(i,j) + n\left[\left|\cos(A(i,j)/n)\right|\right]$$

Le but de la valeur absolu est d'éviter les valeurs négatives, car lorsque cos (x) < 0 sa partie entière prend la valeur de –1 et non 0, mais dans notre cas, on a $A(i, j)/n < \pi/2$, et donc on peut écrire,

$$0X(i,j) = A(i,j) + n\left[\cos(A(i,j)/n)\right]$$

Pour le fonctionnement de 1Xij

	j+n				
	6	7	8	9	10
1		4		5	
2	4		5		1
3		5		1	
4	5		1		2
5		1		2	

1Xij

On pose *Aij= ((i + j + n)/2) mod (n)*, et donc :

$$1X(i,j) = A(i,j) + n\left[\cos(A(i,j)/n)\right]$$

Pour la fusion de $0X(i,j)$ & $1X(i,j)$, on peux introduire la matrice logique dans le terme $A(i,j)$, tel que :

$$A(i,j) = \left(\left(i + j + n\beta(i,j)\right)/2\right)\mathrm{mod}(n)$$

Ainsi,

$$X(i,j) = A(i,j) + n\left[\cos(A(i,j)/n)\right]$$

Le fonctionnement de la matrice Yij

De même on décompose cette matrice en deux matrices $0Yij$ & $1Yij$, selon les valeurs de la matrice logique, et on a :

0Yij

	n+1-j				
	5	4	3	2	1
1	3		2		1
2		3		2	
3	4		3		2
4		4		3	
5	5		4		3

1Yij

	2n+1-j				
	10	9	8	7	6
1		5		4	
2	1		5		4
3		1		5	
4	2		1		5
5		2		1	

Cij= ((n+1+i-j)/2) mod (n) *0Yij=Cij+n[cos(Cij/n)]*	*Cij= ((2n+1+i–j)/2) mod (n)* *1Yij=Cij+n[cos(Cij/n)]*

Donc

$$Cij = \left(\left(n+1+i-j+n\beta ij\right)/2\right)mod(n)$$

$$Yij = Cij + n\left[\cos\left(Cij/n\right)\right]$$

Ainsi,

$$Bachet(i,j) = \pi(Xij, Yij) = \left(Xij - 1\right)n + Yij$$

C.Q.F.D

2/ La fonction Fermat, cas « n=4k »

Le demi-tour joue un rôle majeur, car il permet la permutation à la fois de deux éléments symétriques verticales et de deux éléments symétriques horizontales.

a			b
c			d

Demi tour

d			c
b			a

Par exemple :

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Demi tour

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

Dans cet exemple on part du carré de Peano, un simple demi-tour des éléments en rouge nous donne un carré magique.

L'un des plus célèbre exemple de ce demi tour, est le solide de Fermat, à savoir que ce demi tour est réversible, c-à-d, lorsque on l'applique pour une seconde fois, on arrive au carré de Peano.
On applique ce demi tour au solide de Fermat, ponctuellement, puis vectoriellement, et on remarque que le éléments de cube de Fermat commencent à s'arranger à peu prêt, tel que,

4	62	63	1
41	23	22	44
21	43	42	24
64	2	3	61

53	11	10	56
32	34	35	29
36	30	31	33
9	55	54	12

60	6	7	57
17	47	46	20
45	19	18	48
8	58	59	5

13	51	50	16
40	26	27	37
28	38	39	25
49	15	14	52

61	62	63	64
41	42	43	44
21	22	23	24
1	2	3	4

12	11	10	9
32	31	30	29
36	35	34	33
56	55	54	53

5	6	7	8
17	18	19	20
45	46	47	48
57	58	59	60

52	51	50	49
40	39	38	37
28	27	26	25
16	15	14	13

16	15	14	13
41	42	43	44
21	22	23	24
52	51	50	49

12	11	10	9
45	46	47	48
17	18	19	20
56	55	54	53

5	6	7	8
36	35	34	33
32	31	30	29
57	58	59	60

1	2	3	4
40	39	38	37
28	27	26	25
61	62	63	64

Ce dernier solide n'est pas vraiment un solide de Peano, certainement Fermat a joué d'autres permutations, je n'ai pas son génie pour les déchiffrer, mais j'espère qu'un magicien arrivera, cela peut nous aider à les construire facilement pour tous autres ordres.

Pour le cas général, il nous faut une matrice logique, en 0 & 1, les zéros sont les éléments fixes, les uns sont les éléments qui subirant à la rotation de demi-tour.
On divise la matrice logique en 4 bloques *A, B, A' & B'* tels que *A=A'* et *B=B'*, alors que *A* et *B* sont isométriques par réflexion.
Pour les deux bloques *A & A'*, on pose les uns dans les cases de même parité, et les zéros dans les cases de parité différente, et l'inverse pour les bloques *B & B'*

	1	2	3		..▯..		2k	2k+1		..▯..		4k-2	4k-1	4k
1	1	0	1		..▯..		0	0		..▯..		1	0	1
2	0	1	0		..▯..		1	1		..▯..		0	1	0
3	1	0	1		..▯..		0	0		..▯..		1	0	1
					..▯..					..▯..				
..▯..	..▯..	..▯..	..▯..	..▯..	..▯..	..▯..	..▯..	..▯..	..▯..	..▯..	..▯..	..▯..	..▯..	..▯..
					..▯..					..▯..				
2k	0	1	0		..▯..		1	1		..▯..		0	1	0
2k+1	0	1	0		..▯..		1	1		..▯..		0	1	0
					..▯..					..▯..				
..▯..	..▯..	..▯..	..▯..	..▯..	..▯..	..▯..	..▯..	..▯..	..▯..	..▯..	..▯..	..▯..	..▯..	..▯..
					..▯..					..▯..				
4k-2	1	0	1		..▯..		0	0		..▯..		1	0	1
4k-1	0	1	0		..▯..		1	1		..▯..		0	1	0
4k	1	0	1		..▯..		0	0		..▯..		1	0	1

Donc il nous faut une fonction qui caractérise ces 4 bloques, la symétrie la plus proche est la symétrie du cercle trigonométrique, pour ça je peux introduire cette petite fonction :

$$\alpha(i)=\left[\frac{i-1}{k}\right]$$

Avec $n = 4k$.

Cette fonction ne fait que d'assembler les indices i ou j en 4 bloques, tels que,

i	*de 1 à k*	*de k+1 à 2k*	*de 2k+1 à 3k*	*de 3k+1 à 4k*
α (i)	*0*	*1*	*2*	*3*
sin (α (i) π/2)	*0*	*1*	*0*	*-1*
cos (α (i) π/2)	*1*	*0*	*-1*	*0*

On pose

$$R(i)=\sin\left(\alpha(i)\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\alpha(i)\frac{\pi}{2}\right)$$

&

$S=R(i)+R(j)$

Ainsi on a :

$$\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}R(i)=1\\R(j)=1\\S=2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}R(i)=1\\R(j)=-1\\S=0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}R(i)=-1\\R(j)=1\\S=0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}R(i)=-1\\R(j)=-1\\S=-2\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

On divise sur 2, comme une sorte du moyen, et on introduire la valeur absolu pour que le résultat soit toujours positive, je peux finalement introduire la fonction qui caractérise ces 4 bloques, telle que :

$$R(i,j)=\frac{1}{2}\left|\sin\left(\alpha(i)\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\alpha(i)\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\alpha(j)\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\alpha(j)\frac{\pi}{2}\right)\right|$$

Cette fonction vaut à l'unité pour tout élément de *A & A'*, et à zéro pour tout élément de *B & B'*, ainsi le fonctionnement de la matrice logique, tel que :

$$\beta(i,j)=(i+j+R(i,j))\ \mathbf{mod}\ (2)$$

On introduisant le demi-tour tel que $C(i, j) = n^2 + 1 - \pi(i, j)$, alors on aura :

$$Fermat(i,j)=\begin{cases}\pi(i,j),\ si\ \beta(i,j)=0\\ C(i,j),\ si\ \beta(i,j)=1\end{cases}$$

Donc,

$$Fermat\ (i,j)=\beta(i,j).C(i,j)+(1-\beta(i,j)).\pi(i,j)$$

Ainsi,

$$\boldsymbol{Fermat\ (i,j)=\beta\ (i,j)\ (n^2+1-2\ \pi\ (i,j))+\pi(i,j)}$$

C.Q.F.D

3/ La fonction Bachet & Fermat, cas « n=4m+2 »

Le demi tour ne marche qu'en pair « 2, 4, 6, ..[].. $2k$ » alors que la symétrie de ce cas, veut qu'on fait des échanges en impair, pour cette raison cette fonction contient plusieurs termes correctifs, donc c'est la plus longue.
Avant de passer au cas général, j'expliquerai cette méthode pour le cas de $n = 6$.
À la première étape, on trace une matrice logique comme on a fait pour le cas de $n = 4k$,

1	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1

Puis on fait des corrections, les uns en rouge devient des zéros,

1	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	1

36	2	3	4	5	31
7	29	9	10	26	12
13	14	22	21	17	18
19	20	16	15	23	24
25	11	27	28	8	30
6	32	33	34	35	1

Le carré n'est pas encore magique, car on a juste échangé deux éléments de chaque ligne et chaque colonne, s'il nous faut échangé trois, alors on complétera ces échanges, on notant par "C" les éléments à échangés dans une colonne, et par "L" les éléments à échangés dans une ligne, ainsi on obtient un carré magique.

1	0,C	0,L	0,L	0	1
0,L	1	0,C	0	1	0,L
0,C	0,L	1	1	0,L	0
0,C	0	1	1	0	0
0	1	0,C	0	1	0
1	0,C	0	0	0	1

36	32	4	3	5	31
12	29	27	10	26	7
19	17	22	21	14	18
13	20	16	15	23	24
25	11	9	28	8	30
6	2	33	34	35	1

La méthode de Bachet fait presque la même chose, sauf qu'au lieu de supprimer certains uns, elle fait des corrections avec les C et les L, ainsi les carrés logique et magique de Bachet.

0	1	1	1,C	1	0
1	0	1	1	0	1,C
1	1	0	0	1,C	1
1,L	1	0	0	1,C	1,L
1	0	1,L	1,L	0	1,C
0	1,L	1	1,C	1,L	0

1	35	34	3	32	6
30	8	28	27	11	7
24	23	15	16	14	19
13	17	21	22	20	18
12	26	9	10	29	25
31	2	4	33	5	36

A un moment j'ai pensé sérieusement de reprend ce cas avec exactement les méthodes de Bachet, pour que cette dernière fonction devient plaisante et délectable, mais c'est trop de travail pour un jeu d'enfant, alors je préserve la mienne.

La matrice logique

On fait comme pour le cas de $n = 4k$, on la divise en 4 bloques A, A', B et B' avec $A=A'$, $B=B'$et A est isométrique par réflexion à B.
On place les uns et les zéros en alternative dans le bloque A, à savoir les uns dans les cases de même parité d'indice, les zéros pour les indices de parité différent, puis on fait des correction sur certains uns, tels que,

	1	2	3			..[]..			2m-1	2m	2m+1
1	1	0	1			..[]..			1	0	1
2	0	1	0			..[]..			0	1	0
3	1	0	1			..[]..			1	0	1
				1		..[]..		1			
					1	..[]..	1				
..[]..	..[]..	..[]..	..[]..	..[]..	..[]..	1	..[]..	..[]..	..[]..	..[]..	..[]..
					1	..[]..	1				
				1		..[]..		1			
2m-1	1	0	1			..[]..			1		
2m	0	1	0			..[]..				1	
2m+1	1	0	1			..[]..					1

Les uns de correction sont choisies de la diagonale en jaune pour les indices impairs, ainsi le bloque A de la matrice logique devient :

	1	2	3			..[]..			2m-1	2m	2m+1
1	1	0	1			..[]..			1	0	0
2	0	1	0			..[]..			0	1	0
3	1	0	1			..[]..			0	0	1
				1		..[]..		1			
					1	..[]..	0				
..[]..	..[]..	..[]..	..[]..	..[]..	..[]..	1	..[]..	..[]..	..[]..	..[]..	..[]..
					0	..[]..	1				
				1		..[]..		1			
2m-1	1	0	0			..[]..			1		
2m	0	1	0			..[]..				1	
2m+1	0	0	1			..[]..					1

On pose $k = (n + 2)/4$, avec $n = 2(2m+1)$, alors k ne fait que indicer ces cas, et on a :

- Le premier ordre a pour n=2, donc k=1
- Le second ordre a pour n=6, donc k=2
- Le troisième ordre a pour n=10, donc k=3
- & ..[]..

On prend comme une première fonction $\alpha(i)=[i/k]$, pour $n\geq 6$, cette fonction $\alpha(i)$ donne des valeurs comprises entre 0 et 1, pour la première moitié des indices, et des valeurs entre 2 et 3 pour la seconde moitié des indices, en effet, $n= 4m+2$, et $k=(n+2)/4=m+1$, pour la première moitié des indices on a, $1\leq i \leq 2m+1$ et donc, $1/(m+1)\leq i/k \leq (2m+1)/(m+1)<2$, donc en partie entière $0\leq \alpha(i) \leq 1$, de même pour la seconde moitié des indices on a, $2 = (2m+2)/(m+1)\leq i/k \leq (4m+2)/(m+1)<4$, donc $2\leq \alpha(i) \leq 3$.

Le cas de n=2, est un cas particulier qui ne fait pas objet de cette fonction.

Et puis on fait comme pour les cas de $n = 4m$, $R(i) = sin(\alpha(i)\,\pi/2) + cos(\alpha(i)\,\pi/2)$, ainsi la fonction $Q(i,j) = |R(i) + R(j)|/2$ permet de distinguer entre les 4 bloque de la matrice logique, car elle donne la valeur 1 pour tout élément de A et A', et la valeur 0 pour tout élément de B et B'.
On obtient la matrice logique sans correction, telle que $\beta(i, j) = (i + j + Qij) \bmod (2)$, et pour faire la correction on aura besoin d'une fonction corrective $Cr(i, j)$ telle que,

$$Cr(i,j) = \left(\begin{array}{ccccccc|ccccccc}
 & & & & & & 1 & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 0 & & & 0 & & & & & \\
 & & & & 1 & & & & & 1 & & & & \\
 & & & 0 & & & & & & & 0 & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & & 1 & & \\
 & 0 & & & & & & & & & & & 0 & \\
1 & & & & & & & & & & & & & 1 \\
\hline
1 & & & & & & & & & & & & & 1 \\
 & 0 & & & & & & & & & & & 0 & \\
 & & 1 & & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & 0 & & & & & & & 0 & & & \\
 & & & & 1 & & & & & 1 & & & & \\
 & & & & & 0 & & & 0 & & & & & \\
 & & & & & & 1 & 1 & & & & & &
\end{array}\right)$$

Notre premier besoin est la fonction $\omega(\mathrm{i})$, telle que :

$$\omega(\mathrm{i}) = \left(\begin{array}{ccccc}
1 & 1 & 1 & ..[].. & 1 \\
2 & 2 & 2 & ..[].. & 2 \\
 & & & ..[].. & \\
2m+1 & 2m+1 & 2m+1 & ..[].. & 2m+1 \\
\hdashline
2m+1 & 2m+1 & 2m+1 & ..[].. & 2m+1 \\
 & & & ..[].. & \\
2 & 2 & 2 & ..[].. & 2 \\
1 & 1 & 1 & ..[].. & 1
\end{array}\right)$$

La matrice $iR(i)$ est une matrice dont les éléments de chaque ligne d'indice i vaut à i, avec signe positive pour la première moitié et de signe négative pour la seconde moitié, donc pour obtenir la matrice $\omega(i)$, il nous faut une matrice qui vaut à zéro pour tout élément de la premier moitié, et à $m+1$ pour tout élément de la seconde moitié, telle que, $|R(i) - 1|(n+1)/2$, ainsi on a :

$$\omega(\mathrm{i}) = |R(i) - 1|(n+1)/2 + iR(i)$$

La somme $\omega(i) + \omega(j)$, nous permet une matrice dont la géométrie est presque la même de $Cr(i, j)$, telle que :

$$\left(\begin{array}{ccccccc|ccccccc}
2 & 3 & 4 & & ..[].. & & 2m+2 & 2m+2 & & ..[].. & & 4 & 3 & 2 \\
3 & 4 & & ..[].. & & 2m+2 & 2m+3 & 2m+3 & 2m+2 & & ..[].. & & 4 & 3 \\
4 & & ..[].. & & 2m+2 & 2m+3 & & & 2m+3 & 2m+2 & & ..[].. & & 4 \\
 & ..[].. & & & & & ..[].. & ..[].. & & & & & ..[].. & \\
..[].. & & 2m+2 & & & ..[].. & & & ..[].. & & & 2m+2 & & ..[].. \\
 & 2m+2 & 2m+3 & & ..[].. & & 4m+1 & 4m+1 & & ..[].. & & 2m+3 & 2m+2 & \\
2m+2 & 2m+3 & & ..[].. & & 4m+1 & 4m+2 & 4m+2 & 4m+1 & & ..[].. & & 2m+3 & 2m+2 \\
\hline
2m+2 & 2m+3 & & ..[].. & & 4m+1 & 4m+2 & 4m+2 & 4m+1 & & ..[].. & & 2m+3 & 2m+2 \\
 & 2m+2 & 2m+3 & & ..[].. & & 4m+1 & 4m+1 & & ..[].. & & 2m+3 & 2m+2 & \\
..[].. & & 2m+2 & & & ..[].. & & & ..[].. & & & 2m+2 & & ..[].. \\
 & ..[].. & & & & & ..[].. & ..[].. & & & & & ..[].. & \\
4 & & ..[].. & & 2m+2 & 2m+3 & & & 2m+3 & 2m+2 & & ..[].. & & 4 \\
3 & 4 & & ..[].. & & 2m+2 & 2m+3 & 2m+3 & 2m+2 & & ..[].. & & 4 & 3 \\
2 & 3 & 4 & & ..[].. & & 2m+2 & 2m+2 & & ..[].. & & 4 & 3 & 2
\end{array}\right)$$

Et pour remplacer chaque $2m$+2 par un zéro, on a que d'ôter de chaque élément $2m$+2, comme ça on peut introduire cette magique fonction de cosinus qui à chaque zéro donne un 1, et chaque autre valeur donne un zéro en partie entière, telle que, $[|\cos(\omega(i)+\omega(j)-2m-2)|]$, finalement on multiple par l'un des deux coefficient $(\omega(i) \bmod (2))$ ou $(\omega(j) \bmod (2))$ tel que,

$$Cr(i,j) = (\omega(i)\bmod(2))\left[\left|\cos(\omega(i)+\omega(j)-(n+2)/2)\right|\right]$$

Et donc la matrice logique de cette première partie est,

$$\beta n(i,j) = \beta(i,j) - Cr(i,j)$$

Avec

$$\beta(i,j) = (i+j+Qij) \bmod (2),$$

Soit $C(i,j) = n^2 + 1 - \pi(i,j)$ le demi tour de $\pi(i,j)$, et $F(i,j) = \begin{cases} \pi(i,j), & si\ \beta n(i,j)=0 \\ C(i,j), & si\ \beta n(i,j)=1 \end{cases}$

Donc,

$$F(i,j) = \beta(i,j).C(i,j) + (1-\beta(i,j)).\pi(i,j)$$

La matrice F(i, j) n'est pas encore magique, car jusqu a ici on a fait des échanges pour $2m$ éléments de chaque ligne et chaque colonne, s'il nous faut faire les échanges pour la moitié des éléments qui vaut à $2m$+1, donc on aura aussi besoin des fonction correctives, $Fc(i,j)$ et $Fl(i,j)$ basés sur les deux matrices logiques, une pour compléter les échanges sur ligne $\beta l(i,j)$, et l'autre pour les colonnes $\beta c(i,j)$ tels que :

$$\beta l(i,j) = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
0 & & & & 1 & 1 & & & & 0 \\
1 & 0 & & & & & & & 0 & 1 \\
 & 1 & 0 & & & & & 0 & 1 & \\
 & & 1 & 0 & & & 0 & 1 & & \\
 & & & 1 & 0 & 0 & 1 & & & \\
\hline
 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & &
\end{array}\right) \ \&\ \beta c(i,j) = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
0 & 1 & & & & & & & & \\
 & 0 & 1 & & & & & & & \\
 & & 0 & 1 & & & & & & \\
 & & & 0 & 1 & & & & & \\
1 & & & & 0 & & & & & \\
\hline
1 & & & & 0 & & & & & \\
 & & & 0 & 1 & & & & & \\
 & & 0 & 1 & & & & & & \\
 & 0 & 1 & & & & & & & \\
0 & 1 & & & & & & & &
\end{array}\right)$$

Dans ce cas on ne applique pas le demi tour, on fait la permutation de chaque case marqué par un 1 avec son symétrique, et pour réaliser cette permutation en terme de fonction, alors on a que ajouté une valeur bien déterminer à une case marqué par 1, et d'ôter la même valeur à sa case symétrique, voila un exemple pour le cas de $n = 6$.

$$Fl(i,j)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & +1 & -1 & 0 & 0 \\ +5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & +3 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \& \; Fc(i,j)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & +30 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +18 & 0 & 0 & 0 \\ +6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -30 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Et pour fixer nos idées on les appelles valeur de permutation ligne ou colonne.

On commence par les matrices logiques, on a besoin de séparer les deux moitiés de la matrice de Peano, pour ça on a la fonction $M(i) = [2(n - i)/n]$, cette fonction vaut à l'unité pour les premiers lignes, et à zéro pour les derniers, de même pour les colonnes lorsque on remplace i par j.
Grâce à la symétrie de la matrice ω(i), on arrive aux matrices logiques, telles que :

$$\beta l(i,j) = M(i)\left[\left|\cos\left(\left(i-\omega(j)-1\right)\mathrm{mod}(n/2)\right)\right|\right]$$

&

$$\beta c(i,j) = M(\mathrm{j})\left[\left|\cos\left(\left(j-\omega(\mathrm{i})-1\right)\mathrm{mod}(n/2)\right)\right|\right]$$

Et pour achever cette fonction, il nous faut déterminer le terme général de ces valeurs de permutation, alors dans un carré de Peano nous remarquons que chaque ligne est caractérisé par un nombre, tel que on a, $\forall j,\ \pi(i, j) + \pi(i, n + 1 - j)$ ne dépend que de l'indice i, de même pour les colonnes, $\forall i,\ \pi(i, j) + \pi(n + 1 - i, j)$ ne dépend que de l'indice j, ce sont les complément ligne et colonne.

Le complément ligne est la somme πij et son x_demi tour, tel que,

$$Cl(i) = \pi(i, j) + \pi(i, n + 1 - j) = 2ni - n + 1$$

Le complément colonne est la somme πij et son x_identité, tel que,

$$Cc(j) = \pi(i, j) + \pi(n + 1 - i, j) = n(n - 1) + 2j$$

Ces compléments nous aident à déterminer les valeurs de permutations, telles que,

$$Vpl(i) = Cl(\mathrm{i}) - 2\pi(i,j)$$

$$Vpc(j) = Cc(j) - 2\pi(i,j)$$

Et pour appliquer ces permutations aux valeurs marqué par les uns dans la matrice logique, on multiple ces valeurs de permutations par les matrices logiques, ainsi on a :

$$Fl(i,j) = \beta l(i,j)Vpl(i)$$

&

$$Fc(i,j) = \beta c(i,j)Vpc(\mathrm{j})$$

Finalement on a,

$$Bachet\ \&\ Fermat(i,j) = F(i,j) + Fc(i,j) + Fl(i,j)$$

C.Q.F.D

Fin de seconde Partie

La première fois que j'ai réalisé ces trois fonctions magiques c'était en 2010, et comme je me rappelle bien, je n'avais pas dépassé une semaine pour les réaliser, après j'ai perdu tout le bouillon sauf les trois programmes en quick basic de vérifications, qui heureusement sont bien enregistré dans mon pc, après je reprend mon stylo avec une évidence que je ne vais pas dépassé 2 à 3 jours pour récrire les démos, mais ce qu'est c'est passé c'est que j'ai dépassé un mois pour quelque chose qu'autrefois je l'ai fais pendant moins d'une semaine !
Alors je ressens une certaine responsabilité vers ces petites formules, il est donc le temps pour les publier avant qu'ils soient toutes perdus, surtout il y en a d'autres où je ne suis pas sur que je peux les ré justifier ou non ! Mais ce n'est pas ce que je veux, car ces petites formules servent ma philosophie, je travaille sur un discours philosophique, *Discours de l'intelligence*, c'est pour le but de chercher la vérité de l'intelligence, et les secrets de notre existence.
Lorsque la première fois de mon travail sur ces trois fonctions magiques, ce n'était pas pour s'amuser, mais c'était pour but de donner une justification à une hypothèse d'ordre métaphysique, telle que, « *toute fonction est équivalente à une méthode* », mais quand même c'était très amusant. Pour l'équivalence on peut définir la fonction par toute expression dont les valeurs peuvent être calculer l'une indépendamment des autres, mais c'est très difficile de définir une méthode, car d'évidence une fonction est aussi une méthode, mais l'inverse n'est pas du tout évident, de plus je ne pense pas qu'ils existent des outils mathématiques pour prouver cette équivalence, ce qui fait de cette hypothèse une hypothèse d'ordre métaphysique, et non physique, donc on ne peut pas la démontrer, mais elle peut être contredite par un simple contre exemple.

« J'aurai espéré un contre exemple, car pour plus de 5 ans je ne sais pas comment achever ce discours ! »

Ce discours m'oblige d'être un géomètre que je ne suis pas, et donc dans la plupart des cas dans mes essaies sur la théorie des nombres, tout ce que je cherche est tout simplement les symétries, le problème des symétries c'est quelles sont nombreuses mais peu sont démontrées, l'une des grandes symétrie démontrée, est la symétrie de Dirichlet, car ce qu'est plus beau dans son théorème ce n'est pas l'infinité des nombres premiers dans une progression arithmétique, mais plutôt c'est la répartition de ces nombres, ainsi lorsque on compare le nombre des premiers dans les deux progressions 4x+1 et 4x+3, on trouve qu'ils sont presque égaux pour les milliards comme pour les dizaines, par contre lorsque on prend le théorème de Hadamard & De la Vallée Poussin, comme un grand théorème, il a un point faible, car il lui manque de la symétrie, ce qui fait de l'utilisation de ce théorème un grand risque, mais cette symétrie qu'on ne trouve pas dans ce modèle, on la trouve dans le modèle conjecturer par Legendre, tel que

$$\pi(x) = \frac{x}{A\ln(x) - B}$$

Legendre avait proposé ce modèle avec A=1 et B=1,08366, plus tard, Tchebychev donne une correction à A et B tel que A=B=1, moi je préfère dire que ces deux nombres sont au voisinage de l'unité, sans êtres forcements des constantes, car ça m'éclaire la symétrie de la fonction du compte des nombres premiers, en tous cas cette symétrie sera l'objet de ma prochaine lettre.
Alors comme exemple des symétries non encore démontré, est la symétrie de Goldbach, c'est vraiment une grande symétrie, car elle n'a pas de limites, et pour l'éclairer je vais choisir cet énoncé, tel que :

Pour tout entier n≥2, il existe un entier naturel m, tels que, n+m et n - m sont tous les deux premiers.

Et si on peut faire un prolongement dans $\mathbb{Z}$, on disons qu'un entier relative est premier, si ça valeur absolu est premier au sens usuel, alors Goldbach devient :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \exists m \in \mathbb{Z} / (n+m, n-m) \in \mathbb{P}^2$$

Ce qui fait de l'ensemble $\mathbb{Z}$ un ensemble $\mathbb{P}$-équidistant.

Mais cette symétrie ne se limite pas ici, car lorsque on prend tout $\mathbb{N}$ ou tout $\mathbb{Z}$, on ne prend qu'un cas particulier, normalement le plus simple, telle que la progression normale « $U_n=n$ », dans la plupart des cas, lorsque dans une progression arithmétique $An+B$, A & B sont premiers entre eux, à fortiori la symétrie de Goldbach est bien vérifie, sauf pour des cas très rare où elle s'échappe pour quelles que valeurs, par exemple, dans la progression $8n+1$, la symétrie est vérifié pour un grand nombre des entiers « suffisamment grand », sauf pour n égale à 1,3,4,6 & 15, mais lorsque on fait varié la variable n dans tout $\mathbb{Z}$, alors là je trouve une difficulté de trouver numériquement un contre exemple.
Mais l'image suivante nous donne le plus bel exemple :

Ce nuage décrie la symétrie de Goldbach dans la progression quadratique de Landau « n^2+1», ces points représentent la valeur minimale de m pour tout entier n compris entre 1 & 5000, et donc à fortiori, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists m \in \mathbb{N} / \left((n+m)^2+1, (n-m)^2+1\right) \in \mathbb{P}^2$$

Voilà dans une grand partie de mes essais, j'essai juste de conjecturer ce cas particulier de cette symétrie, car même conjecturer n'est pas facile, et pour le faire il me faut au moins prouver l'infinité des nombres premiers sous forme de n^2+1.

Les méthodes

Mes méthodes sont vraiment étranges, mais c'est évident, parce que je ne suis pas un professionnel, mais en générale sont basées sur des notions qui ne sont plus étranges, pour l'exemple, je vais profiter pour donner un résumé de ma prochaine lettre, dont j'ai choisie comme titre, le titre suivant :

La différentielle, la référentielle et la théorie des nombres.

Il y a plus de 4 ans, ou 5, « je ne me rappelle pas exactement des nombres des années », que dans un forum des mathématiques, j'avais posé la question suivante :

Comment résoudre l'équation différentielle suivante ?

y.ln(x.y)=2x

Tout le monde me critique, car pour que cette équation soit différentielle il faut au moins un point sur *y* « dérivé de *y* », de ma part j'étais égoïste, car je n'avais pas tout le temps pour discuter les détails, j'avais juste besoin d'une fonction *y* qui s'exprime en terme de *x*, et qui vérifie *yln(xy)*=2*x*, de retourner à la maison, et de comparer les valeurs de cette fonction avec mes tables.
Alors j'ai proposé de dériver les deux membres de l'équation, comme ça on aura un point sur l'un des y, et de x aussi, et là je deviens le stupide de forum !
Et je quitte le forum tout simplement, et ce sentiment de stupidité m'oblige d'abandonner cet essai pour un mois ou plus, jusqu'à un jours je retourne à mes table et je vois des nombres magiques,même plus magique que le solide de Fermat, et je dis que cette équation est bien une équation différentielle, même lorsque toute la communauté des mathématiques doit réviser ces notions juste pour donner à cette équation le nom d'une équation différentielle, car tout simplement elle est conséquence d'un calcul différentiel !
Moi je ne suis rien, juste quelqu'un qui cherche de comprend ce qui se passe dans l'ensemble $\mathbb{N}$, et donc je me connecte à l'Internet, je commence toujours avec Wikipidia, et puis je télécharge quelques pdf, et là je me trouve devant plusieurs modèles pour la fonction de compte des nombres premiers, tels que

- Le modèle de Hadamard et De la Vallée Poussin, $H\,\&\,Vp\pi(x)=\dfrac{x}{\ln(x)}$
- Le modèle de Legendre, $Legendre\pi(x)=\dfrac{x}{\ln(x)-1,08366}$
- Le modèle de Gauss & Riemann, $G\,\&\,R\pi(x)=Li(x)$

Je sais deux choses

- Tous ces modèles sont dans les lointaine de toutes mes compétences, car il ne s'agit plus d'un simple calcul.
- Aucun de ces modèles ne peut être attribut de l'absolu, car il s'agit d'un calcul approximative, ou asymptotique, c-à-d le plus proche de la vérité.

Alors je dis, si je ne peux pas comprend comment ces génies ont arrivés à ces résultats, alors je peux au moins les aider à faire des corrections, « et j'adore les corrections » et tout ce que j'avait besoin est juste un tout petit modèle, le modèle absolu ***abπ(x)***, qui donne les valeurs exactes comme dans les table des nombres premier, car si je fait la moyen entre l'un des trois célèbres modèles, et le modèle absolu, cela peut donner un autre dont le résultat soit encore plus proche de la vérité, pour ça je peux introduire une fonction comme une sorte d'indicatrice à l'un de ces trois modèles, telle que,

$$Modèle\pi(x)=\frac{x}{ModèleF(x)} \text{ Et donc } ModèleF(x)=\frac{x}{Modèle\pi(x)}$$

Et pour le modèle absolu on admet,

$$abF(x) = ModèleF\left(ab\pi(x)\right)$$

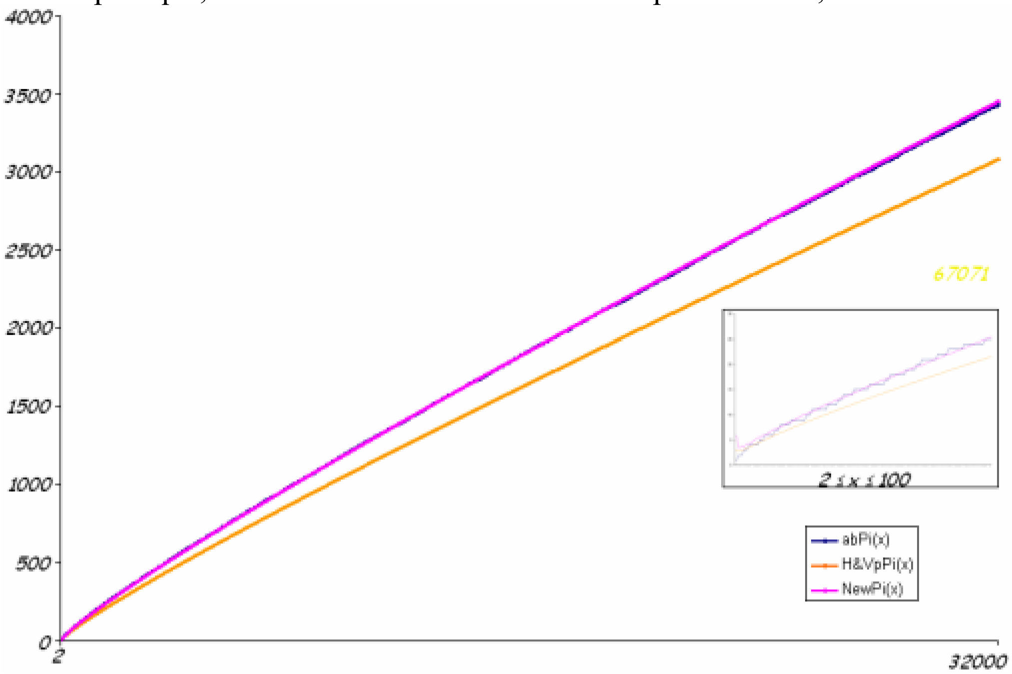
Et donc le nouveau modèle de $\pi(x)$ ce calcule par la moyen, tel que,

$$NewF(x) = \frac{ModèleF(x) + abF(x)}{2}$$

Je prends comme modèle, le modèle de Hadamard et de la Vallée Poussin, parce que c'est l'unique démontrer, et donc $New\pi(x) = x/NewF(x)$, ce qui ma conduit à l'identité suivante :

$$y\ln(xy) = 2x$$

C'est pour ça que j'ai appelé cette équation, « équation différentielle ».
Néanmoins en pratique, les résultats de mon idée sont très passionnants,



Bien sûr, je pense toujours que aucun modèle ne peut être attribut de l'absolu, mais comme je me rappelé bien, que lorsque on appliques ce procédé une seconde fois, puis une troisième fois & ..[].., l'erreur commence à se disparus, comme lorsque on place une grande glace au sommet d'un volcan.
J'ai abandonné ce modèle, car l'équation $y\ln(xy) = 2x$, est vraiment dans les lointaines de toutes mes compétence, mais j'ai pas abandonné le principe.
Et pour le principe, je retourne à une vielle idée, alors comme un lycien j'ai aimé tracer les courbes, mais j'ai aimé aussi les suites, car elles sont comme des charades, alors je me dis, pourquoi on ne fait pas pour les suites comme ce que on fait pour les courbes ? Comme ça les charades deviennent faciles à résoudre !
Je savais que la dérivée de l'exponentielle est l'exponentielle elle même, je savais aussi que la solution générale de $f'(x) = f(x)$ est $f(x) = C^{te}e^x$, avec C^{te} une constante réelle, mais surtout je savais que la dérivé d'une fonction en un point x_0, n'est qu'une limite, telle que,

$$f'_{x=x_0}(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\lim_{x\to x_0}\left(f(x) - f(x_0)\right)}{\lim_{x\to x_0}\left(x - x_0\right)} = \frac{df(x)}{dx}$$

Donc, la dérivée n'est que le rapport de deux distances infiniment petites, ça est vrai pour les courbes, car elles sont définies sur domaines à fortiori contenus, mais lorsque $f(x)$ est définie comme une suite, alors la distance infiniment petite qu'on peut donner à la variable x est l'unité, et donc $\frac{\Delta U_n}{\Delta n} = \Delta U_n$

Il on résulte que, si e^x est l'une des solutions de l'équation $y' = y$ au régime continuer, alors 2^x est l'une des solutions de la même équation « et de même manière que e^x », mais dans le régime discontinuer, car vue la solution générale de l'équation $\Delta U_n = U_n$, est $C^{te}2^n$.
En effet :

$\Delta U_n = U_n$ nous conduit à la relation de récurrence suivante $U_{n+1} = 2U_n$, et on pose $U_0 = C^{te} \in \mathbb{R}$ alors, on a :

$$U_0 = C^{te}$$
$$U_1 = 2U_0$$
$$U_2 = 2U_1 = 4U_0$$
$$U_3 = 2U_2 = 8U_0$$
$$..[]..$$
$$U_n = 2^n\ U_0$$

C.Q.F.D
Comme je me rappelle bien, j'ai posé ce problème à mon prof des mathématiques, dont l'espoir qu'il me donne quelques indications, et tous ce qu'il a fait, est un éclat de rire, puis il a fixé ces yeux vers moi, pour plus d'une minute, jusqu'à a ce qu'il ma fait peur, et puis il me dit pour quoi tu ne fait pas comme les autres ? Et je t'assure la réussite.
Mais moi je ne fais pas comme les autres, et donc à la maison j'ai essai de définir une multiplication, d'une sorte qu'on aura,

$$\Delta UV = U\Delta V + V\Delta U$$

Apres quelques essais inutiles, j'ai fais donc ce que mon prof m'avait demander.
Aujourd'hui je reprend ce problème, et je me trouve devant deux régimes, le premier est continuer et caractérisé par le nombre e, le second est discontinuer mais caractérisé par le nombre 2, et lorsque je demande ce qui lie les deux nombres e & 2, je ne trouve qu'une seule réponse, c'est la géométrie des nombres premiers.
D'où la naissance de la notion du référentielle, car pour localiser un entier dans l'ensemble des entiers, est fort similaire à localiser un point matériel dans tout l'espace.
Cette nouvelle notion elle ma conduit au modèle de Legendre, bien sûr j'ai pas pu la démontrer correctement, car je n'ai pas son génie, mais au moins je sais que Legendre ne joue plus aux dés, et que je peux même expliquer pour quoi il a choisie 1, 08366, et non simplement 1 ? Un grand travail inédit par Legendre.
Apres j'ai téléchargé son livre, « Essai sur la théorie des nombre » dans l'espoir de trouver quelques indications, je lis quelques pages seulement, et je me trouve devant cette question :

Pourquoi Legendre n'a pas pu démontrer le théorème des progressions arithmétiques ?!

Legendre avait postulé deux résultats forts en théorie des nombres, le premier sur l'infinité des nombres premiers dans une progression arithmétique, et le second sur la répartition de ces nombres, Dirichlet est génie d'avoir libérer ces deux oiseaux avec une seule clé.
Les méthodes de Legendre sont suffisantes pour conjecturer l'infinité des nombres premiers dans une progression arithmétique, mais ils ne les démontrent pas, à couse de l'erreur et non de son produit, car Legendre utilise un produit similaire au produit Eulérien, sauf que le produit d'Euler est définie sur tous les nombres premiers, et avec une erreur nulle, alors que le produit de Legendre est définie sur tous les nombres premiers qui divisent la progression

$Ax+B$, qui sont aussi tous les premiers sauf les facteurs premiers de A, mais avec une erreur qui n'est pas du tout évidente, tel que, soit $\mathbb{L}=\{p\in\mathbb{P} \setminus p$ ne divise pas $A\}$, alors

$$\underset{A\wedge B=1}{Legendre\pi(x,"Ax+B")} = x\prod_{\substack{p\in\mathbb{L}\\ p\le\sqrt{Ax+B}}}\left(\frac{p-1}{p}\right)+ab\pi(y,"Ay+B")-\varepsilon$$

Où y est solution de l'équation $Ay+B=\sqrt{Ax+B}$

&

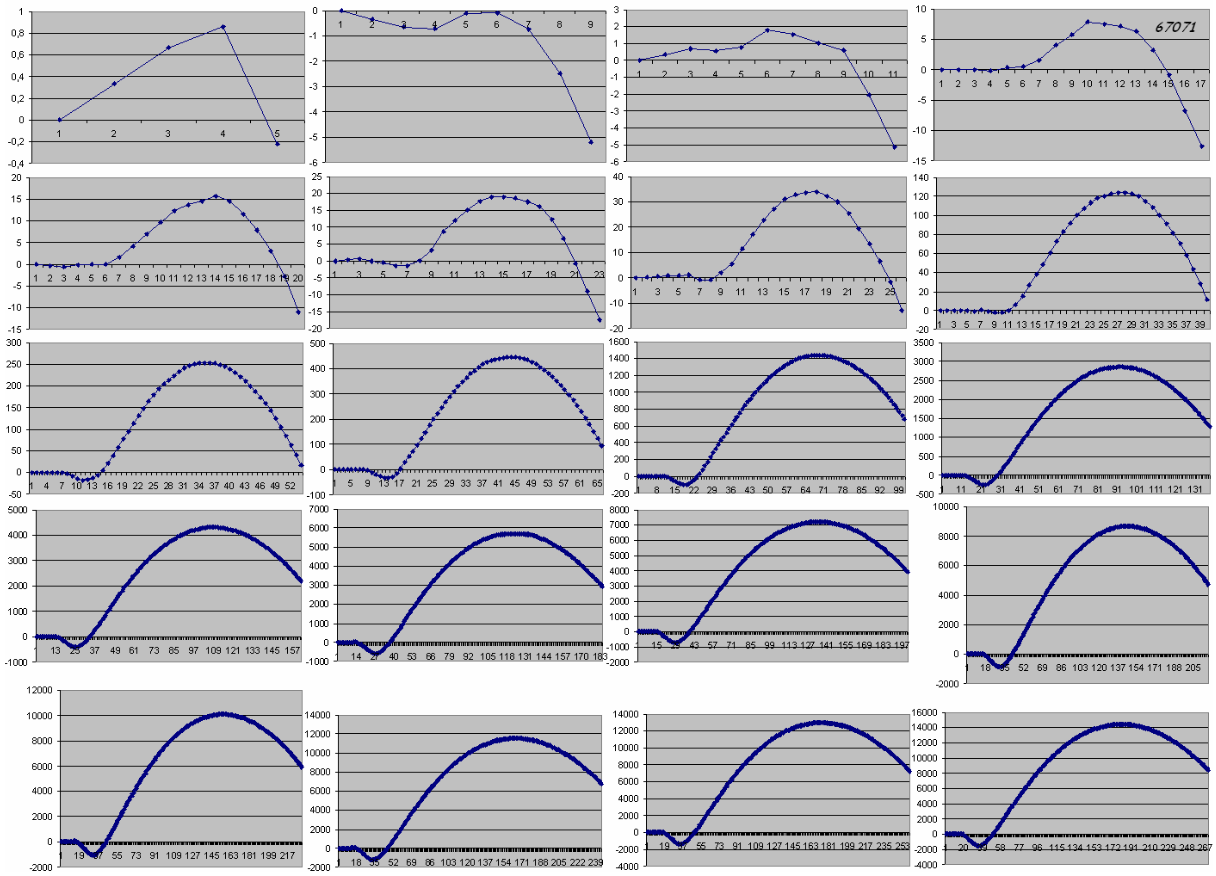
$$\varepsilon=\begin{cases}1, \; si\ l'un\ des\ termes\ de\ Ax+B\ est\ égale\ à\ 1\\ \qquad\qquad 0, \text{sinon}\end{cases}$$

Par exemple la progression normale, $A=1$ & $B=0$

$$Legendre\pi(x)=x\prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\le\sqrt{x}}}\left(\frac{p-1}{p}\right)+ab\pi\left(\sqrt{x}\right)-1$$

***Une vérification numérique pour x≤3000 montre que l'erreur en valeur absolue ne dépasse pas* 12.**

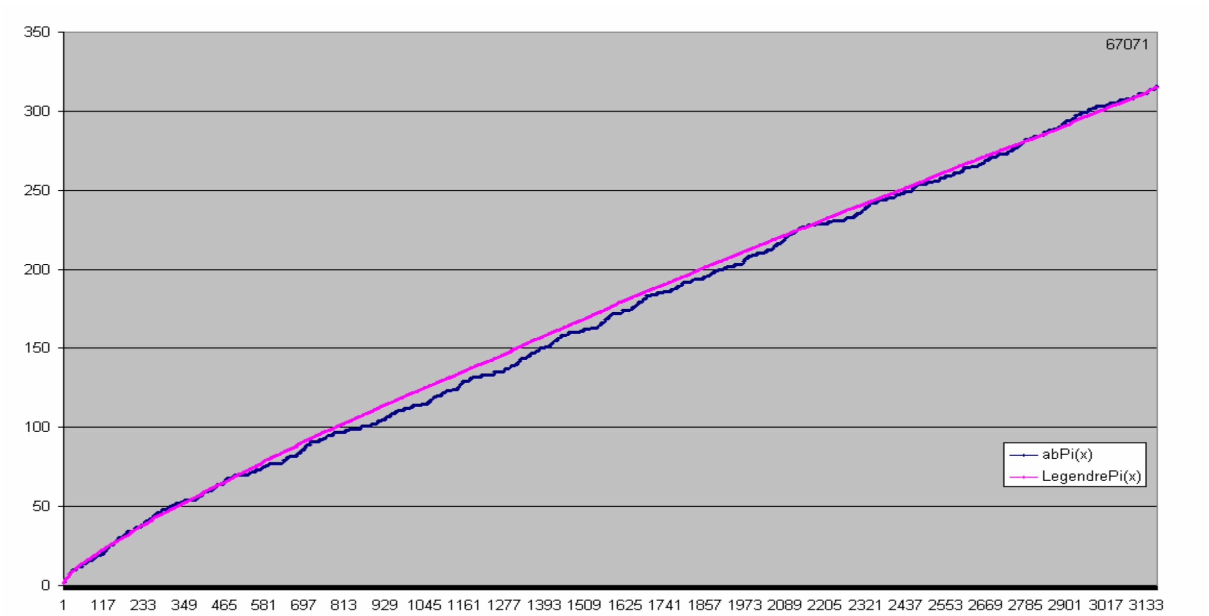
Bien sûr, l'erreur absolue, comme une différence entre les valeurs réelles et les valeurs obtenues par le model de Legendre est indétrônable, mais il y a un autre moyen pour étudier cette erreur, on faisons des corrections étape par étape dans le produit de Legendre, l'erreur peut nous aider à sauver le model de Legendre au moins pour la progression normal.
Voilà des exemples de cette erreur,



Il est important d'étudier la progression normale par les méthodes de Legendre, même lorsque on sait depuis plus de deux milles ans comment prouver l'infinité des nombres premier, et même lorsque on sait aussi que ni les méthodes de Legendre, ni les méthodes de Dirichlet ne démontrent l'infinité des nombres premiers, cette infinité se démontre par des méthodes simples et classiques comme chez Euclide ou Euler, il y on a certainement d'autres, de ma part, et sauf erreur, je pense que si les nombres premiers étant finie, on aura la même choses pour les entiers, puisque un entier n'est que combinaison finie des nombres premier.
Donc le but d'étudier la progression normale par ces méthodes est de comprend la nature de l'erreur, de plus ces méthodes de Legendre, ne sont pas limités que pour les progressions arithmétiques, ainsi par exemple lorsque on prend la progression de Landau, « $L(x)=x^2+1$ », on peut écrire,

$$Legendre\pi(x,"x^2+1")=\frac{x}{2}\prod_{\substack{p,premier\\ p\equiv 1 Modulo(4)\\ p\leq\sqrt{x^2+1}\simeq x}}\left(1-\frac{2}{p}\right)+ab\pi(y,"y^2+1")$$

Où y est solution de l'équation $y^2+1=\sqrt{x^2+1}$



***Là aussi par coïncidence, une vérification numérique pour $x\leq 3000$ montre que l'erreur en valeur absolue ne dépasse pas* 12.**

..[]..
A couse des méthodes de Legendre, je suis certaine qu'il y a bien une infinité des nombres premiers sous forme de n^2+1, mais il me faut une preuve, alors j'ai pensé aux méthode de Dirichlet, je sais au fond de moi qu'elle est possible, mais ce n'est pas du tout évident !
Pour une progression arithmétique $An+B$, Dirichlet a prouvé que la densité des nombres premier vaut à

$$D(An+B)=\frac{\delta(A,B)}{\varphi(A)}$$

Où $\delta(A, B)$ est le caractère trivial de Dirichlet, et $\varphi(A)$ est l'indicatrice d'Euler.

Lorsque on souhaite faire la même chose pour la progression de Landau, on se trouve devant cette grande question, la densité, et sur tout par rapport à quoi ?!!!
Comme tout le monde sait, que si un nombre premier divise n^2+1, alors ce nombre premier ne peut être que 2 ou sous forme de $4x+1$, et inversement, pour tout nombre premier qui s'écrie sous forme précédente, il existe un entier n, tel que n^2+1 soit son multiple, donc comme un départ, on peut définir une sorte de domaine de définition arithmétique pour la progression de Landau, tel que :

$$\mathbb{L} = \{2\} \cup \{p \in \mathbb{P} / p \equiv 1 Modulo(4)\}$$

Reste à trouver les autres progressions quadratiques qui sont définie sur le même domaine que la progression de Landau, là aussi ce n'est pas facile, mais il apparaît que ce sont toutes les progressions quadratiques dont le discriminant vaut à $\Delta = -4$.

Soit An^2+Bn+C une progression quadratique dont $\Delta = -4$, donc $B^2 = 4(AC-1)$, et donc $AC-1$ est un carré parfait, on pose $\delta^2 = AC-1$ alors $C = (\delta^2+1)/A$.

Pour que A divise δ^2+1, il faut que ses facteurs premiers soient définies aussi dans $\mathbb{L}$.

De plus nous démontrons que si $A = 2^n d$, avec d un facteur impaire, alors $n = 1$, pour ça il suffit de démontrer que 4 ne peut jamais diviser δ^2+1, donc je peux utiliser un critère de divisibilité, tel que il suffit de vérifier que 4 ne peut pas diviser δ^2+1 pour 4 valeurs successifs de δ, exemple 2, 5, 10 &17, pour qu'on est sûr que 4 ne divise pas δ^2+1 pour tout $\delta \in \mathbb{N}$.

C'est parce que, soit $P(x)$ une telle progression, est p un entier, si p divise $P(x)$, alors p divise $P(x+kp)$ pour tout entier relative k, « Facile à démontrer », donc d'évidence si p ne divise pas l'un des p termes successives de la progression $P(x)$, il ne divisera jamais aucun terme de la progression.
Une étude numérique montre que, si A est pair, alors la densité des nombres premiers vaut deux fois la densité pour les cas où A est impair.
Ceci est justifié par le modèle de Legendre, car si A est pair alors An^2+Bn+C est définie sur

$$\mathbb{L} = \{p \in \mathbb{P} / p \equiv 1 Modulo(4)\}$$

Sinon

$$\mathbb{L} = \{2\} \cup \{p \in \mathbb{P} / p \equiv 1 Modulo(4)\}$$

Donc le produit de Legendre pour A pair vaut à deux fois le produit du même pour A impair.
Car si A est pair, alors B est toujours pair « $B^2 = 4(AC-1)$ », et donc C est impair, sinon la progression An^2+Bn+C admet 2 comme diviseur commun, et donc son discriminant ne peut jamais être égale à -4.

Ceci est due à l'effet de la réflexion, en général soit $P(x) = Ax^2+Bx+C$, comme on a vue, si un entier p divise $P(x)$, alors p divise $P(x+kp)$ avec k un entier relative, mais la progression arithmétique $x+kp$ n'est pas unique, ça revient à la géométrie de $P(x)$, à savoir $P(x)$ n'est qu'une parabole, donc elle admet un axe de symétrie, qui ce traduit par l'identité suivante, $P(x)=P(-x-B/A)$, Soit par exemple $P(x)=3x^2+3x+1$, on a 7 divise $P(1)$, donc 7 divise $P(8)$, $P(15)$, $P(22)$, ..[].. et puisque par symétrie on a, $P(1)=P(-2)$, alors 7 divise aussi $P(-2)$, $P(5)$, $P(12)$, $P(19)$, ..[].. C'est comme si cette première progression arithmétique 1, 8, 15, 22, 29, ..[].. est réfléchie par cette symétrie, pour donner la naissance de cette seconde progression –2, 5, 12, 19, 26, ..[]..

Pour les progressions quadratiques, cet effet ne peut pas donner plus de deux progression arithmétiques, car vue $P(-x-B/A)=P(-(-x-B/A)-B/A)=P(x)$, mais lorsque le degré de la progression dépasse 2, alors là aussi la réflexion ne peut pas dépasser 2, car lorsque elle dépasse 2, elle devient infinie, « *c'est comme lorsque on se place entre deux miroirs* » ce qui fait de la progression, une progression qui a un diviseur commun, et donc sans aucun intérêt. Mais dans certains cas on se tombe sur des éléments qui s'échappent de cet effet, en réalité rien ne s'échappe, sauf qu'il y a des superpositions, tel que, soit p un nombre premier qui divise $P(x)$, et notons par δ la distance qu'on a entre x et $-x-B/A$, donc $\delta=|2x+B/A|$, si $p=\delta$ alors on a une superposition, exemple de $p=2$ dans la progression de Landau, 2 divise $L(1)$, et donc 2 divise $L(1+2k)$, par symétrie parabolique, 2 divise $L(-1)$, donc il divise $L(-1+2k)$, les deux progressions arithmétique $2k+1$ & $2k-1$ sont sensées égaux, d'où la superposition. Lorsque on n'a pas de superposition, la réflexion est dite totale.

Donc si $\Delta=-4$, et A est pair, alors la réflexion est totale, car la progression Ax^2+Bx+C n'est pas définie pour $p=2$, donc le modèle de Legendre s'écrie comme suivant :

$$Legendre\pi(x,"\underset{\substack{\Delta=-4\\ A\ est\ pair}}{Ax^2+Bx+C}")=x\prod_{\substack{p,premier\\ p\equiv 1 Modulo(4)\\ p\leq\sqrt{Ax^2+Bx+C}}}\left(1-\frac{2}{p}\right)+ab\pi(y,"Ay^2+By+C")$$

Voilà il y a plusieurs détails qui ne sont plus faciles à justifier, dont la moindre et l'étude de $\mathbb{L}$, et pour l'étude de $\mathbb{L}$ il faut prend le cas générale, si par exemple $P(x)$ est une progression de degré n qu'on suppose définie sur $\mathbb{N}$ « c-à-d $\forall x\in\mathbb{N}$, $P(x)\in\mathbb{N}$ » et irréductible, alors la densité de $\mathbb{L}$ par rapport à $\mathbb{P}$ vaut $1/n$, et donc la géométrie le plus proche est la géométrie des racines nième de l'unité, par exemple, pour une progression quadratique dont le discriminant $\Delta<0$, on trouve que $\mathbb{L}=O\bigcup\left\{p\in\mathbb{P}\,/\,p\equiv r^+\ Modulo(-\Delta)\right\}$ où O est un ensemble vide, ou un sous ensemble des diviseurs premiers de $-\Delta$, par exemple modulo 4, les résidus qui sont premier au module, sont 1 & 3, si on trace une table de multiplication, et on la trouve analogue à la table de multiplication des racines carré de l'unité, telle que,

*	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

*	1	3
1	1	3
3	3	1

Et donc les résidus positives modulo 4 se résume à l'unité, mais le cas générale est vraiment un problème, par exemple, soit $\Phi_{20}=\{1,3,7,9,11,13,17,19\}$ l'ensemble des inversible modulo (20), donc l'ensemble des résidus positives ne peut être que l'une des trois ensembles suivantes : {1, 3, 7, 9}, {1, 9, 11, 19} ou {1, 9, 13, 17}, car vus les tables de multiplication suivantes, où il faut bien choisir une !

*	1	3	7	9	11	13	17	19
1	1	3	7	9	11	13	17	19
3	3	9	1	7	13	19	11	17
7	7	1	9	3	17	11	19	13
9	9	7	3	1	19	17	13	11
11	11	13	17	19	1	3	7	9
13	13	19	11	17	3	9	1	7
17	17	11	19	13	7	1	9	3
19	19	17	13	11	9	7	3	1

*	1	9	11	19	3	7	13	17
1	1	9	11	19	3	7	13	17
9	9	1	19	11	7	3	17	13
11	11	19	1	9	13	17	3	7
19	19	11	9	1	17	13	7	3
3	3	7	13	17	9	1	19	11
7	7	3	17	13	1	9	11	19
13	13	17	3	7	19	11	9	1
17	17	13	7	3	11	19	1	9

*	1	9	13	17	3	7	11	19
1	1	9	13	17	3	7	11	19
9	9	1	17	13	7	3	19	11
13	13	17	9	1	19	11	3	7
17	17	13	1	9	11	19	7	3
3	3	7	19	11	9	1	13	17
7	7	3	11	19	1	9	17	13
11	11	19	3	7	13	17	1	9
19	19	11	7	3	17	13	9	1

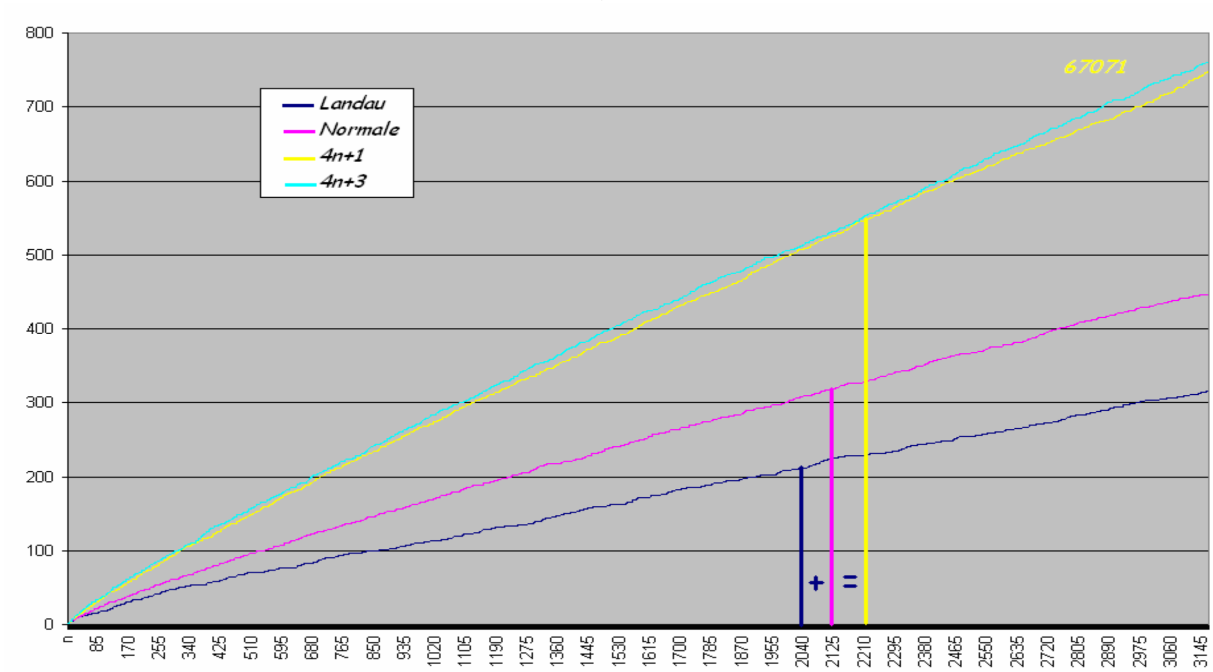
Je n'ai pas pu trouver un critère qui me permet ces résidus positifs, c'est parce que ils dépendent d'une certaine fonction très rebelle, comme une certaine Nina, car à chaque fois que je ressens que je l'ai maîtrisé, elle me surprit ! Je vais certainement réserver toute une lettre pour cette fonction, car elle mérite l'intention des géomètres.
La recherche d'une méthode analogue de celle de Dirichlet est sévère, ce qui m'oblige de chercher ailleurs, à un moment je me dit que ça ne peut pas être une coïncidence, et bien sùr je parle de cette erreur dans le modèle de Legendre qui ne dépasse pas 12 ni pour la progression normale ni pour la progression de Landau, et donc ce fabuleux problème de Landau peut être résolu par les méthodes de la différentielle, et je me découvre donc une identité forte & remarquable, c'est l'identité mpl, tel que :

Soient m, p, l & n des entiers tels que :

- m est la quantité des nombres premiers sous forme de x^2+1 et inférieurs ou égale à n^2+1.
- p est la quantité des nombres premiers inférieurs ou égale à n.
- l est la quantité des nombres premiers sous forme de $4x+1$ et inférieurs ou égale à $4n+1$.

Alors on a asymptotiquement l'égalité suivante :

$$m+p=l$$



C'est ridicule, car avec des petite idées que j'avais pour cette différentielle, j'ai pensé d'avoir la démontrer, mais au fur et à mesure je me découvre mes erreurs, je pense toujours qu'elle est vraie, et je pense aussi qu'elle mérite l'intention des géomètres, car c'est une symétrie parfaite, et s'elle est parfaite, c'est à couse de l'erreur, l'erreur est trop petite, elle est même plus petite que le petit o de Landau, pour ça il suffit de remplacer la progression $4n+1$ par $4n+3$, pour remarquer un nombre important des points où l'identité est absolument absolue.

Méhdi Pascal

Maroc
Pour le 17 Avril 2016

J'aimerai dire que Méhdi Pascal est le nom que j'aime, mais ce n'est pas vraiment celui que j'ai sur ma carte d'identité, mais je serai très ravi lorsque vous m'appelez Méhdi.

Voilà, je ne cherche pas d'être reconnu, tout ce que je cherche, est de trouver la paix avec mes propres sentiments, « car j'ai des souffrances », et donc, s'il y a vraiment des choses intelligents, qui peut être utile à toute l'humanité, cela apportera certainement the happy à mes sentiments, sinon, c'est juste un essai.

Je remercie cordialement mon frère Jamal, et ma grande soeur Fatima, pour leur générosité.
Je remercie aussi toute personne qui lie ces quelques mots.

Je dédie ce travail à
Najat, Nina, Sonia, Fatima, Jamal & Ali
Artiste, Rebelle, Poétesse, tendresse, petit père &, Assali
And thank you to be in my life

..[]..

Appendice

Quelques propriétés de la matrice de Peano permis la création des carrés magiques

La matrice de Peano :

$$\pi(i,j)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ..[].. & j & ..[].. & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & ..[].. & n+j & ..[].. & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & ..[].. & 2n+j & ..[].. & 3n \\ ..[].. & ..[].. & ..[].. & ..[].. & ..[].. & ..[].. & ..[].. \\ (i-1)n+1 & (i-1)n+2 & (i-1)n+3 & ..[].. & (i-1)n+j & ..[].. & in \\ ..[].. & ..[].. & ..[].. & ..[].. & ..[].. & ..[].. & ..[].. \\ (n-1)n+1 & (n-1)n+2 & (n-1)n+3 & ..[].. & (n-1)n+j & ..[].. & n^2 \end{pmatrix}$$

La densité

La densité est la somme magique, d'évidence elle vaut à la somme de tous les éléments de $\pi(i, j)$ sur n, telle que,

$$\rho = (n^3 + n)/2$$

Sommes sur ligne

Notons par L(i) la somme des éléments d'une linge d'indice i, alors on a :

$$L(1) = 1 + 2 + 3 + \,..[]..\, + n = (n^2 + n)/2$$

Et donc :

$$L(2) = n^2 + L(1)$$
$$L(3) = 2n^2 + L(1)$$
$$L(i) = (i - 1)\, n^2 + L(1)$$

On déduit :

$$L(i_1) - L(i_2) = (i_1 - i_2)n^2$$
$$L(i_1) + L(i_2) = (i_1 + i_2 - 2)n^2 + 2L(1)$$

On particulier pour deux lignes Li_1 et Li_2 symétriques par rapport à la médiatrice horizontale, on a : $i_1 + i_2 = n + 1$, et donc,

$$\mathbf{L(i_1) + L(i_2) = n^3 + n = 2\rho}$$

On déduit que la somme de la médiatrice horizontale est magique pour les carrés impairs.
L'image de $\pi(i, j)$ par rapport à la médiatrice horizontale est $\pi(n + 1 - i , j)$, soit δ la différence, alors $\boldsymbol{\delta = \pi(n + 1 - i , j) - \pi(i , j) = n^2 - n(2i - 1)}$
D'autre part on a, $\boldsymbol{\rho - L(i) = L(n + 1 - i) - \rho = n\delta/2}$
Donc la permutation de la moitie des éléments de deux linges symétriques permet les sommes magiques, exemple « n = 6 » :

Avant,

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21
31 + 32 + 33 + 34 + 35 + 36 = 201

Apres,

1 + 32 + 3 + 34 + 35 + 6 = 111
31 + 2 + 33 + 4 + 5 + 36 = 111

Pour que la moitie soit entière, il faut que n soit pair, donc cette méthode est vraie seulement pour les cas de n pair.

Sommes sur colonne

Notons par C(i) la somme des éléments d'une colonne d'indice i, alors on a :

$$C(1) = \sum_{j=1}^{n} (j-1)n + 1 = n + n\sum_{j=1}^{n-1} j$$

$$C(1) = n(n^2 - n + 2)/2$$

Et donc :

$$C(2) = n + C(1)$$
$$C(3) = 2n + C(1)$$
$$C(j) = (j - 1)n + C(1)$$

On déduit :

$$C(j_1) - C(j_2) = (j_1 - j_2)n$$
$$C(j_1) + C(j_2) = (j_1 + j_2 - 2)n + 2C(1)$$

On particulier pour deux colonnes $C(j_1)$ et $C(j_2)$ symétriques par rapport à la médiatrice verticale, on a : $j_1 + j_2 = n + 1$, et donc,

$$\mathbf{C(j_1) + C(j_2) = n^3 + n = 2\rho}$$

On déduit que la somme de la médiatrice verticale est magique pour les carrés impairs.
L'image de $\pi(i,j)$ par rapport à la médiatrice verticale est $\pi(i , n + 1 - j)$, soit δ la différence, alors $\boldsymbol{\delta = \pi(i , n + 1 - j) - \pi(i , j) = n - 2j + 1}$
D'autre part on a, $\boldsymbol{\rho - C(j) = C(n + 1 - j) - \rho = n\delta/2}$

Donc la permutation de la moitie des éléments de deux colonnes symétriques, permet les sommes magiques, exemple « n = 6 » :

Avant,

1 + 7 + 13 + 19 + 25 + 31 = 96

6 + 12 + 18 + 24 + 30 + 36 = 126

Apres,

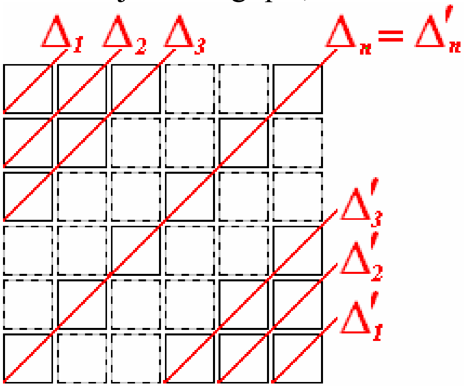
1 + 12 + 13 + 24 + 30 + 31 = 111

6 + 7 + 18 + 19 + 25 + 36 = 111

Pour que la moitie soit entière, il faut que n soit pair, donc cette méthode est vraie seulement pour les cas de n pair.

Sommes sur diagonale brisée

Le somme sur diagonale brisée est toujours magique, en effet :



On a,

$\Delta_1 = 0n+1$

$\Delta_2 = 1n+1 \quad + \quad 0n+2$

$\Delta_3 = 2n+1 \quad + \quad 1n+2 \quad + \quad 0n+3$

$\Delta_4 = 3n+1 \quad + \quad 2n+2 \quad + \quad 1n+3 \quad + \quad 0n+4$

..[]..

$\Delta j = (j-1)n+1 \quad + \quad (j-2)n+2 \quad + (j-3)n+3 \quad + (j-4)n+4 \quad + \quad ..[].. \quad +(j-j)n+j$

$$\Delta_j = \sum_{k=1}^{k=j} (j-k)n+k$$

$$\Delta_j = \left((n+1)j^2 + (1-n)j\right)/2 \text{, pour tout } j \leq n$$

D'autre part on a,

$\Delta'_1 = (n-1)n+n-0$

$\Delta'_2 = (n-1)n+n-1 \quad + \quad (n-2)n+n-0$

$\Delta'_3 = (n-1)n+n-2 \quad + \quad (n-2)n+n-1 \quad + \quad (n-3)n+n-0$

$\Delta'_4 = (n-1)n+n-3 \quad + \quad (n-2)n+n-2 \quad + \quad (n-3)n+n-1 \quad + \quad (n-4)n+n-0$

..[]..

$\Delta'_j = (n-1)n+n-(j-1) \ + \ (n-2)n+n-(j-2) \ + \ (n-3)n+n-(j-3) + \quad ..[].. \quad +(n-j)n+n-(j-j)$

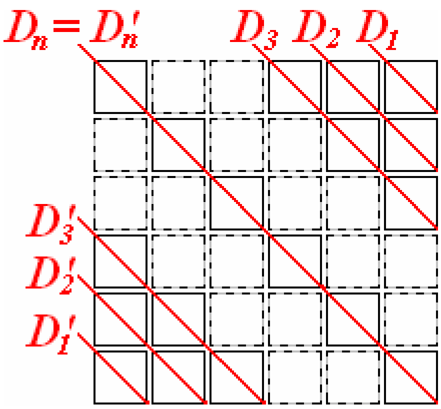
$$\Delta'_j = \sum_{k=1}^{k=j} \left((n-k)n+n-(j-k)\right)$$

$$\Delta'_j = \left(\left(2n^2+n+1\right)j - \left(n+1\right)j^2\right)/2 \text{, pour tout } j \leq n$$

La somme sur une diagonale brisée est : $\boldsymbol{\Delta_j + \Delta'_{n-j} = \rho}$

Donc pour construire un carré magique on prolonge les Δ_j avec les Δ'_{n-j}

De même on raisonne pour les autres diagonales,



On a :

$D_1 = 0n+(n-0)$

$D_2 = 0n+(n-1) \quad + \quad 1n+(n-0)$

$D_3 = 0n+(n-2) \quad + \quad 1n+(n-1) \quad + \quad 2n+(n-0)$

$D_4 = 0n+(n-3) \quad + \quad 1n+(n-2) \quad + \quad 2n+(n-1) \quad + \quad 3n+(n-0)$

..[]..

$D_j = 0n+(n-(j-1)) + 1n+(n-(j-2)) + 2n+(n-(j-3)) + \quad ..[].. \quad + (j-1)n+(n-(j-j))$

$$D_j = \sum_{k=0}^{k=j-1} kn + \sum_{k=1}^{k=j} (n-j+k)$$

$$D_j = \left((n-1)j^2 + (n+1)j\right)/2 \text{, pour tout } j \leq n$$

D'autre part,

$D'_1 = (n-1)n+1$

$D'_2 = (n-2)n+1 \quad + \quad (n-1)n+2$

$D'_3 = (n-3)n+1 \quad + \quad (n-2)n+2 \quad + \quad (n+1)n+3$

$D'_4 = (n-4)n+1 \quad + \quad (n-3)n+2 \quad + \quad (n-2)n+3 \quad + \quad (n-1)n+4$

..[]..

$D'_j = (n-j)n+1 \quad + \quad (n-(j-1))n+2 \quad + \quad (n-(j-2))n+3 \quad + \quad ..[].. \quad + \quad (n-1)n+j$

$$D'_j = \sum_{k=1}^{k=j} (n-j-1+k)n + k = \sum_{k=1}^{k=j} n(n-k) + k$$

$$D'_j = \left((1-n)j^2 + (2n^2-n+1)j\right)/2 \text{, pour tout } j \leq n$$

La somme sur une diagonale brisée est : $\mathbf{D'_j + D'_{n-j}} = \rho$

Donc pour construire un carré magique on prolonge les D_j avec les D'_{n-j}.

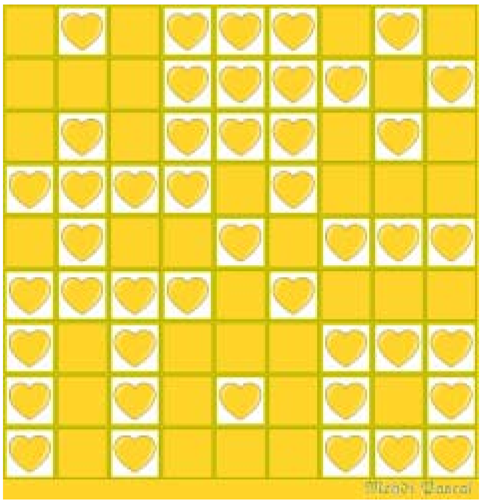
La méthode des diagonales brisées marche bien pour les cas impairs, mais sauf erreur elle est impossible pour les cas pairs, la combinatoire qui preuve cette impossibilité n'est pas du tout simple, au moins pour moi.

C.Q.F.D

..[]..

Quelques carrés magiques « facultatif »

1/ Carré double magique 8 love:



2/ Les plus petits carrés magiques en nombres premiers :

La magie de la progression $210x+199$ est dans ses dix premiers termes, depuis $x = 0$ jusqu'à 9, car ils sont tous premiers, ce qui nous permet les plus petits carrés magiques en nombre premier, tels que :

409	1879	829
1459	1039	619
1249	199	1669

619	2089	1039
1669	1249	829
1459	409	1879

Je suppose que tout le monde connaît la magie de cette progression $x^2 + x + 41$, « due à Euler » de même pour $x^2 + x + 17$.
Les deux carrés suivant sont n'importe quoi, sauf qu'ils sont en nombres premiers en progression quadratique.

313	47	53	223
71	173	151	113
131	97	83	197
61	251	281	43

257	19	23	173
37	127	107	73
89	59	47	149
29	199	227	17

Mais leur différence est bien magique.

Note :

Ce qui caractérise la progression d'Euler $x^2 + x + 41$ est une chaîne des nombres premiers successive de longueur qui vaut à 40, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 39$, la question qui se pose est :

Est ce qu'il y a d'autres chaînes en progression quadratique qui dépasse 40 ?

Je pense que c'est oui, il y en a pour longueur finie aussi grand que en veut, mais ce n'est pas facile à prouver, ni à trouver des exemples, mais au moins pour trouver un exemple il ne faut pas jouer au hasard, par exemple la progression $2x^2 + 2x + 53089$ est susceptible de contenir une chaîne de longueur égale à 72, mais pas plus, car le plus petit élément de son domaine de définition arithmétique $\mathbb{L}$ est 73, le critère de divisibilité sera suffisant pour déterminer ce plus petit élément.