Хмельник С. И.

Электромагнитная волна в диэлектрической и магнитной цепи переменного тока

Аннотация

Предлагается решение уравнений Максвелла для диэлектрической и магнитной цепи переменного тока. Рассматривается структура токов и потоков энергии.

Оглавление

Часть 1. Диэлектрическая цепь

1.1. Введение

В [1] рассматривается электромагнитное поле в вакууме. Очевидным образом полученное там решение распространяется на непроводящую – диэлектрическую среду с определенными ε, μ - диэлектрической и магнитной проницаемостью. Следовательно, электромагнитное поле существует и в конденсаторе. Однако существенным отличием конденсатора является то, что его поле имеет ненулевую электрическую напряженность по одной из координат, создаваемую внешним источником. При рассмотрении электромагнитного поля в вакууме отсутствие внешнего источника постулировалось.

Точно также можно говорить о диэлектрической цепи переменного тока. Далее рассматривается система уравнений Максвелла для такой цепи. Показывается, что в такой цепи также возникает электромагнитная волна. Важным отличием этой волны от волны в вакууме является то, что в первой имеется продольная электрическая напряженность, создаваемая внешним источником энергии.

Здесь рассматриваются уравнения Максвелла в системе СГС следующего вида (как и в [1], но с отличными от единицы величинами $\varepsilon,\ \mu$):

$$\mathrm{rot}(E)+\frac{\mu}{c}\frac{\partial H}{\partial t}=0, \qquad (1)$$

$$\mathrm{rot}(H)-\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E}{\partial t}=0, \qquad (2)$$

$$\mathrm{div}(E)=0, \qquad (3)$$

$$\mathrm{div}(H)=0, \qquad (4)$$

где $H,\ E$ - магнитная и электрическая напряженности соответственно.

1.2. Решение системы уравнений

Рассмотрим решение системы уравнений Максвелла (1.1-1.4). В системе цилиндрических координат $r,\ \varphi,\ z$ эти уравнения имеют вид:

$$\frac{E_r}{r}+\frac{\partial E_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0, \qquad (1)$$

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial E_z}{\partial \varphi}-\frac{\partial E_\varphi}{\partial z}=v\frac{dH_r}{dt}, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial r}=v\frac{dH_\varphi}{dt}, \qquad (3)$$

$$\frac{E_\varphi}{r}+\frac{\partial E_\varphi}{\partial r}-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial E_r}{\partial \varphi}=v\frac{dH_z}{dt}, \qquad (4)$$

$$\frac{H_r}{r}+\frac{\partial H_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial H_z}{\partial z}=0, \qquad (5)$$

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial H_z}{\partial \varphi}-\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}=q\frac{dE_r}{dt} \qquad (6)$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = q\frac{dE_\varphi}{dt}, \tag{7}$$

$$\frac{H_\varphi}{r} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = q\frac{dE_z}{dt} \tag{8}$$

где

$$v = -\mu/c, \tag{9}$$

$$q = \varepsilon/c, \tag{10}$$

- электрические напряженности $E_r,\ E_\varphi,\ E_z$,
- магнитные напряженности $H_r,\ H_\varphi,\ H_z$.

Решение должно быть найдено <u>при **не**нулевой напряженности</u> E_z.

Для сокращения записи в дальнейшем будем применять следующие обозначения:

$$co = \cos(\alpha\varphi + \chi z + \omega t), \tag{11}$$

$$si = \sin(\alpha\varphi + \chi z + \omega t), \tag{12}$$

где $\alpha,\ \chi,\ \omega$ – некоторые константы. Представим неизвестные функции в следующем виде:

$$H_r. = h_r(r)co, \tag{13}$$

$$H_\varphi. = h_\varphi(r)si, \tag{14}$$

$$H_z. = h_z(r)si, \tag{15}$$

$$E_r. = e_r(r)si, \tag{16}$$

$$E_\varphi. = e_\varphi(r)co, \tag{17}$$

$$E_z. = e_z(r)co, \tag{18}$$

где $h(r),\ e(r)$ - некоторые функции координаты r.

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что функции (13-18) преобразуют систему уравнений (1-8) с четырьмя аргументами $r,\ \varphi,\ z,\ t$ в систему уравнений с одним аргументом r и неизвестными функциями $h(r),\ e(r)$.

В приложении 1 показано, что такое решение <u>**существует.**</u> Это решение имеет следующий вид:

$$e_\varphi(r) = \mathrm{kh}(\alpha,\ \chi,\ r), \tag{20}$$

$$e_r(r) = \frac{1}{\alpha}\left(e_\varphi(r) + r\cdot e'_\varphi(r)\right), \tag{21}$$

$$e_z(r) = r\cdot e_\varphi(r)q/\alpha, \tag{22}$$

$$h_\varphi(r) = -\frac{\varepsilon\omega}{\chi c} e_r(r), \tag{23}$$

$$h_r(r) = \frac{\varepsilon\omega}{\chi c} e_\varphi(r), \tag{24}$$

$$h_z(r) \equiv 0. \tag{25}$$

где kh() – функция, определенная в приложении 2,

$$q = \left(\chi - \frac{\mu\varepsilon\omega^2}{c^2\chi} \right). \tag{26}$$

Сравним это решение и решение, полученное для вакуума в [1] – см. табл. 1 в разделе 2.2. Видно существенное отличие этих решений.

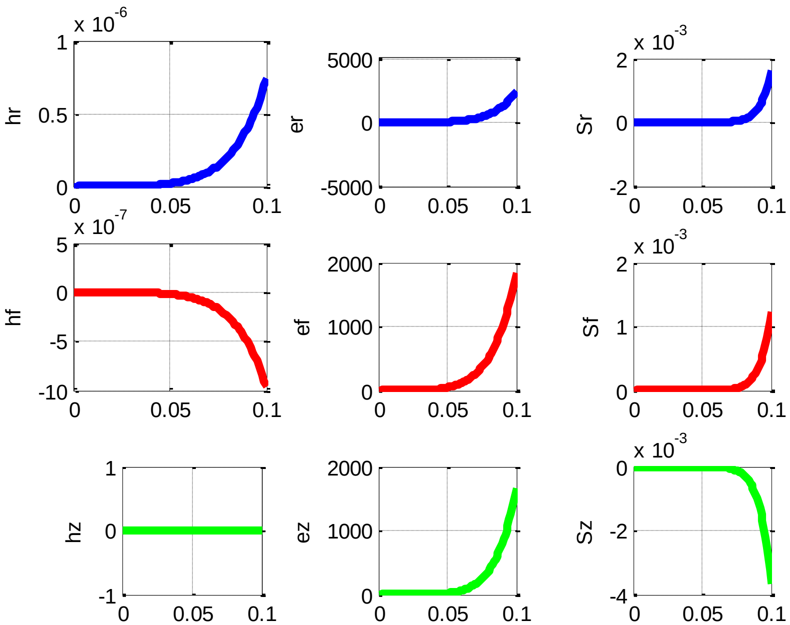

Fig.1. (SSB6(3).m)

1.3. Напряженности и потоки энергии

Также, как и в [1], плотности потоков энергии по координатам определяются по формуле

$$\overline{S} = \begin{bmatrix} \overline{S_r} \\ \overline{S_\varphi} \\ \overline{S_z} \end{bmatrix} = \eta \iint\limits_{r,\varphi} \begin{bmatrix} s_r \cdot si^2 \\ s_\varphi \cdot si \cdot co \\ s_z \cdot si \cdot co \end{bmatrix} dr \cdot d\varphi. \tag{1}$$

где

$$s_r = \left(e_\varphi h_z - e_z h_\varphi\right)$$
$$s_\varphi = \left(e_z h_r - e_r h_z\right), \qquad (2)$$
$$s_z = \left(e_r h_\varphi - e_\varphi h_r\right)$$
$$\eta = c/4\pi. \qquad (3)$$

Рассмотрим функции (2) и $e_r(r),\ e_\varphi(r),\ e_z(r)$, $h_r(r),\ h_\varphi(r),\ h_z(r)$. На рис. 1 показаны, например, графики этих функций при $A=1,\ \alpha=5.5,\ \mu=1,\ \varepsilon=2,\ \chi=50,\ \omega=300$.

1.4. Обсуждение

Дальнейшие выводы аналогичны тем, которые получены в [1]. Итак, в диэлектрической цепи и, в частности, в конденсаторе, включенных в цепь синусоидального тока распространяется электромагнитная волна, а математическое описание этой волны является решением уравнений Максвелла. При этом напряженности, ток смещения и поток энергии распространяются в диэлектрике по спиральной траектории.

Часть 2. Магнитная цепь

2.1. Введение

В части 1 рассматривается электромагнитное поле в диэлектрической цепи переменного тока. Точно также можно рассмотреть электромагнитное поле в магнитной цепи переменного тока. Простейшим примером такой цепи является соленоид переменного тока. Однако, если в диэлектрической цепи имеется продольная электрическая напряженность, создаваемая внешним источником энергии, то в магнитной цепи имеется продольная магнитная напряженность, создаваемая внешним источником энергии и передаваемая в цепь обмоткой соленоида.

Здесь также рассматриваются уравнения Максвелла, показанные в части 1 – см. (1.1.1-1.1.4).

2.2. Решение системы уравнений

В части 1 показано, что системе цилиндрических координат $r,\ \varphi,\ z$ эти уравнения имеют вид (1.2.1-1.2.18). Здесь решение должно быть найдено <u>при **не**нулевой напряженности</u> H_z. При этом функции $h(r),\ e(r)$ принимают другой вид. Аналогично предыдущему можно показать, что и в этом случае решение **<u>существует.</u>** Оно имеет следующий вид:

$$e_z(r) \equiv 0, \tag{20}$$

$$h_\varphi(r) = \mathrm{kh}(\alpha,\ \chi,\ r), \tag{21}$$

$$h_r(r) = -\frac{1}{\alpha}\left(h_\varphi(r) + r \cdot h'_\varphi(r)\right), \tag{22}$$

$$h_z(r) = r \cdot h_\varphi(r) q / \alpha, \tag{23}$$

$$e_\varphi(r) = \frac{\mu\omega}{\chi c} h_r(r), \tag{24}$$

$$e_r(r) = -\frac{\mu\omega}{\chi c} h_\varphi(r). \tag{25}$$

Сравним это решение и решение, полученное в части 1 – см. табл. 1. Видна схожесть этих решений.

Таблица 1.

	Вакуум	Диэлектрическая цепь	Магнитная цепь
e_r	$Ar^{\alpha-1}$	$\mathrm{A} \cdot \mathrm{kh}(\alpha,\ \chi,\ r)$	$-A\frac{\mu\omega}{\chi c} h_\varphi(r)$
e_φ	$Ar^{\alpha-1}$	$\frac{A}{\alpha}\left(e_\varphi(r) + r \cdot e'_\varphi(r)\right)$	$A\frac{\mu\omega}{\chi c} h_r(r)$
e_z	**0**	$A \cdot r \cdot e_\varphi(r)\frac{q}{\alpha}$	**0**
h_r	$-e_\varphi(r)$	$A\frac{\varepsilon\omega}{c\chi} e_\varphi(r)$	$-\frac{A}{\alpha}\left(h_\varphi(r) + r \cdot h'_\varphi(r)\right)$
h_φ	$-h_r(r)$	$-A\frac{\varepsilon\omega}{c\chi} e_r(r)$	$\mathrm{Akh}(\alpha,\ \chi,\ r)$
h_z	**0**	**0**	$Ar \cdot h_\varphi(r) q / \alpha$

2.3. Напряженности и потоки энергии

Также, как и в части1, плотности потоков энергии по координатам определяются по формулам (1.3.1 – 1.3.3). Рассмотрим функции (1.3.2) и $e_r(r),\ e_\varphi(r),\ e_z(r)$**,** $h_r(r),\ h_\varphi(r),\ h_z(r)$**.** На рис. 1 показаны, например, графики этих функций при $A=1,\ \alpha=5.5,\ \mu=1,\ \varepsilon=2,\ \chi=50,\ \omega=300$. Эти параметры выбраны такими же, как в части 1 – для сравнения полученных результатов.

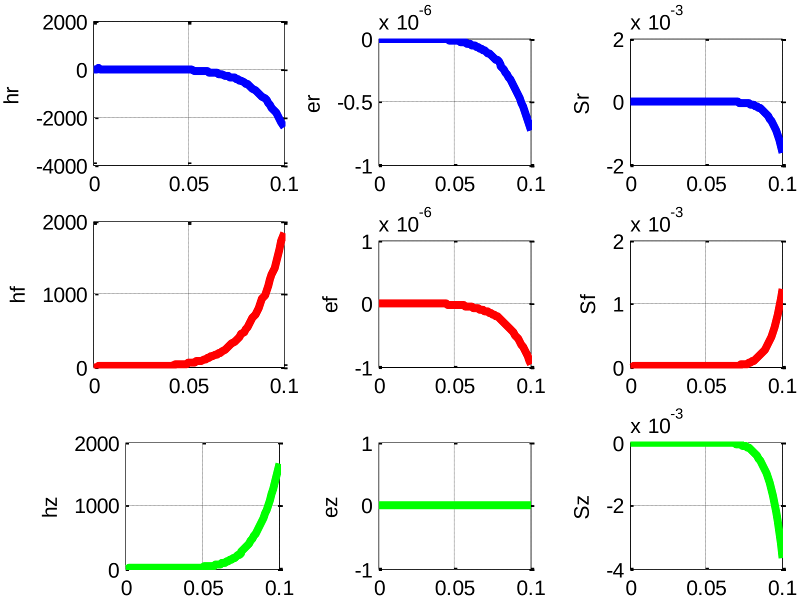

Fig.1. (SSB6.703)

4. Обсуждение

Дальнейшие выводы аналогичны тем, которые получены в части [1]. Итак, в магнитной цепи синусоидального тока распространяется электромагнитная волна, а математическое описание этой волны является решением уравнений Максвелла. При этом напряженности и поток энергии распространяются в такой цепи по спиральной траектории.

Приложения.

Приложение 1.

Рассматривается решение уравнений (2.1-2.8) в виде функций (2.13-2.18). Далее производные по r будем обозначать штрихами. Перепишем уравнения (2.1-2.8) с учетом (2.11, 2.12) в виде

$$\frac{e_r(r)}{r} + e_r'(r) - \frac{e_\varphi(r)}{r}\alpha - \chi \cdot e_z(r) = 0\,, \tag{1}$$

$$-\frac{1}{r}\cdot e_z(r)\alpha + e_\varphi(r)\chi - \frac{\mu\omega}{c}h_r = 0, \tag{2}$$

$$e_r(r)\chi - e_z'(r) + \frac{\mu\omega}{c} h_\varphi = 0, \tag{3}$$

$$\frac{e_\varphi(r)}{r} + e_\varphi'(r) - \frac{e_r(r)}{r}\cdot\alpha + \frac{\mu\omega}{c} h_z = 0, \tag{4}$$

$$\frac{h_r(r)}{r} + h_r'(r) + \frac{h_\varphi(r)}{r}\alpha + \chi\cdot h_z(r) = 0\,, \tag{5}$$

$$\frac{1}{r}\cdot h_z(r)\alpha - h_\varphi(r)\chi - \frac{\varepsilon\omega}{c} e_r = 0, \tag{6}$$

$$-h_r(r)\chi - h_z'(r) + \frac{\varepsilon\omega}{c} e_\varphi = 0, \tag{7}$$

$$\frac{h_\varphi(r)}{r} + h_\varphi'(r) + \frac{h_r(r)}{r}\cdot\alpha + \frac{\varepsilon\omega}{c} e_z(r) = 0\,. \tag{8}$$

Соответствие между номерами формул в разделе 2 и здесь таково:

Раздел 2	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8
Прил. 1	1	5	6	7	8	6	7	8

Далее будут выполнятся преобразования формул (1-8). При этом нумерация формул после преобразования будет сохраняться (так удобнее проследить последовательность преобразований) и только новые формулы будут принимать следующий номер.

Примем, что

$$h_z(r) = 0\,. \tag{9}$$

Из (6, 7) получаем:

$$h_\varphi(r) = -\frac{\varepsilon\omega}{c} e_r(r)\frac{1}{\chi} \tag{6}$$

$$h_r(r) = \frac{\varepsilon\omega}{c} e_\varphi(r)\frac{1}{\chi} \tag{7}$$

Сравним (1, 8):

$$\frac{e_r(r)}{r} + e_r'(r) - \frac{e_\varphi(r)}{r}\alpha - \chi\cdot e_z(r) = 0\,, \tag{1}$$

$$\frac{h_\varphi(r)}{r} + h_\varphi'(r) + \frac{h_r(r)}{r}\cdot\alpha + \frac{\varepsilon\omega}{c} e_z(r) = 0, \tag{8}$$

Из (6, 7) следует, что (1, 8) совпадают. Тогда (8) можно исключить. Далее сравним (4, 5):

$$\frac{e_\varphi(r)}{r} + e_\varphi'(r) - \frac{e_r(r)}{r}\cdot\alpha = 0, \tag{4}$$

$$\frac{h_r(r)}{r} + h_r'(r) + \frac{h_\varphi(r)}{r}\alpha = 0\,. \tag{5}$$

Из (6, 7) следует, что (4, 5) совпадают. Тогда (5) можно исключить. Остаются уравнения:

$$\frac{e_r(r)}{r} + e_r'(r) - \frac{e_\varphi(r)}{r}\alpha - \chi\cdot e_z(r) = 0\,, \tag{1}$$

$$-\frac{1}{r}\cdot e_z(r)\alpha + e_\varphi(r)\chi - \frac{\mu\omega}{c}h_r = 0, \tag{2}$$

$$e_r(r)\chi - e_z'(r) + \frac{\mu\omega}{c}h_\varphi = 0, \tag{3}$$

$$\frac{e_\varphi(r)}{r} + e_\varphi'(r) - \frac{e_r(r)}{r}\cdot\alpha = 0, \tag{4}$$

$$h_\varphi(r) = -\frac{\varepsilon\omega}{c}e_r(r)\frac{1}{\chi}\,, \tag{6}$$

$$h_r(r) = \frac{\varepsilon\omega}{c}e_\varphi(r)\frac{1}{\chi}\,. \tag{7}$$

Подставим (6,7) в (2, 3):

$$-\frac{1}{r}\cdot e_z(r)\alpha + e_\varphi(r)\chi - \frac{\mu\omega}{c}\frac{\varepsilon\omega}{c}e_\varphi(r)\frac{1}{\chi} = 0, \tag{2}$$

$$e_r(r)\chi - e_z'(r) - \frac{\mu\omega}{c}\frac{\varepsilon\omega}{c}e_r(r)\frac{1}{\chi} = 0, \tag{3}$$

или

$$\frac{\alpha}{r}\cdot e_z(r) = e_\varphi(r)\left(\chi - \frac{\mu\omega}{c}\frac{\varepsilon\omega}{c}\frac{1}{\chi}\right) \tag{2}$$

$$e_z'(r) = e_r(r)\left(\chi - \frac{\mu\omega}{c}\frac{\varepsilon\omega}{c}\frac{1}{\chi}\right) \tag{3}$$

Остались следующие уравнения:

$$\frac{e_r(r)}{r} + e_r'(r) - \frac{e_\varphi(r)}{r}\alpha - \chi\cdot e_z(r) = 0\,, \tag{1}$$

$$\frac{\alpha}{r}\cdot e_z(r) = e_\varphi(r)\left(\chi - \frac{\mu\omega}{c}\frac{\varepsilon\omega}{c}\frac{1}{\chi}\right) \tag{2}$$

$$e_z'(r) = e_r(r)\left(\chi - \frac{\mu\omega}{c}\frac{\varepsilon\omega}{c}\frac{1}{\chi}\right) \tag{3}$$

$$\frac{e_\varphi(r)}{r} + e_\varphi'(r) - \frac{e_r(r)}{r}\cdot\alpha = 0, \tag{4}$$

$$h_\varphi(r) = -\frac{\varepsilon\omega}{c} e_r(r) \frac{1}{\chi}, \tag{6}$$

$$h_r(r) = \frac{\varepsilon\omega}{c} e_\varphi(r) \frac{1}{\chi}. \tag{7}$$

Обозначим:

$$q = \left(\chi - \frac{\mu\omega}{c} \frac{\varepsilon\omega}{c} \frac{1}{\chi} \right) \tag{11}$$

Из (1, 2, 11) находим:

$$\frac{e_r(r)}{r} + e_r'(r) - \frac{e_\varphi(r)}{r}\alpha - \chi r \cdot e_\varphi(r) q / \alpha = 0, \tag{12}$$

Из (4) находим:

$$e_r(r) = \frac{1}{\alpha}\left(e_\varphi(r) + r \cdot e_\varphi'(r)\right) \tag{13}$$

$$e_r'(r) = \frac{1}{\alpha}\left(2e_\varphi'(r) + r \cdot e_\varphi''(r)\right) \tag{14}$$

Из (12-14) находим:

$$\frac{1}{\alpha}\left(\frac{e_\varphi(r)}{r} + e_\varphi'(r)\right) + \frac{1}{\alpha}\left(2e_\varphi'(r) + r \cdot e_\varphi''(r)\right) - \frac{e_\varphi(r)}{r}\alpha - \frac{q\chi}{\alpha} r \cdot e_\varphi(r) = 0 \tag{15}$$

Решение и анализ этого уравнения дано в приложении 2. Полученное там решение не имеет аналитического выражения. Назовем это решение функцией

$$e_\varphi(r) = \mathrm{kh}(\alpha,\ \chi,\ r), \tag{16}$$

а ее производную – функцией

$$e_\varphi'(r) = \mathrm{kh1}(\alpha,\ \chi,\ r). \tag{17}$$

При известных функциях (16, 17) могут быть найдены остальные функции. Итак, для определения всех функций имеем уравнения:

$$h_z(r) \equiv 0, \tag{9}$$

$$e_\varphi(r) = \mathrm{kh}(\alpha,\ \chi,\ r), \tag{16}$$

$$e_\varphi'(r) = \mathrm{kh1}(\alpha,\ \chi,\ r), \tag{17}$$

$$e_r(r) = \frac{1}{\alpha}\left(e_\varphi(r) + r \cdot e_\varphi'(r)\right), \tag{13}$$

$$e_r'(r) = \frac{1}{\alpha}\left(2e_\varphi'(r) + r \cdot e_\varphi''(r)\right), \tag{14}$$

$$e_z(r) = r \cdot e_\varphi(r) \frac{q}{\alpha}, \tag{2}$$

$$e_z'(r) = e_r(r)q\,, \tag{3}$$

$$h_\varphi(r) = -\frac{\varepsilon\omega}{c} e_r(r)\frac{1}{\chi}\,, \tag{6}$$

$$h_r(r) = \frac{\varepsilon\omega}{c} e_\varphi(r)\frac{1}{\chi}\,. \tag{7}$$

Точность полученного решения анализируется в приложении 3.

Приложение 2.

Рассмотрим уравнение (15) из приложения 1:

$$\frac{1}{\alpha}\left(\frac{e_\varphi(r)}{r} + e_\varphi'(r)\right) + \frac{1}{\alpha}\left(2e_\varphi'(r) + r\cdot e_\varphi''(r)\right) - \frac{e_\varphi(r)}{r}\alpha - \frac{q\chi}{\alpha} r\cdot e_\varphi(r) = 0\,. \tag{1}$$

Упрощая его, получаем:

$$\left(\frac{e_\varphi(r)}{r} + e_\varphi'(r)\right) + \left(2e_\varphi'(r) + r\cdot e_\varphi''(r)\right) - \frac{e_\varphi(r)}{r}\alpha^2 - q\chi r\cdot e_\varphi(r) = 0$$

$$e_\varphi(r)\left(\frac{-\alpha^2+1}{r} - q\chi r\right) + 3e_\varphi'(r) + r\cdot e_\varphi''(r) = 0\,,$$

$$e_\varphi''(r) = e_\varphi(r)\left(\frac{\alpha^2-1}{r^2} + q\chi\right) - \frac{3}{r}e_\varphi'(r)\,. \tag{2}$$

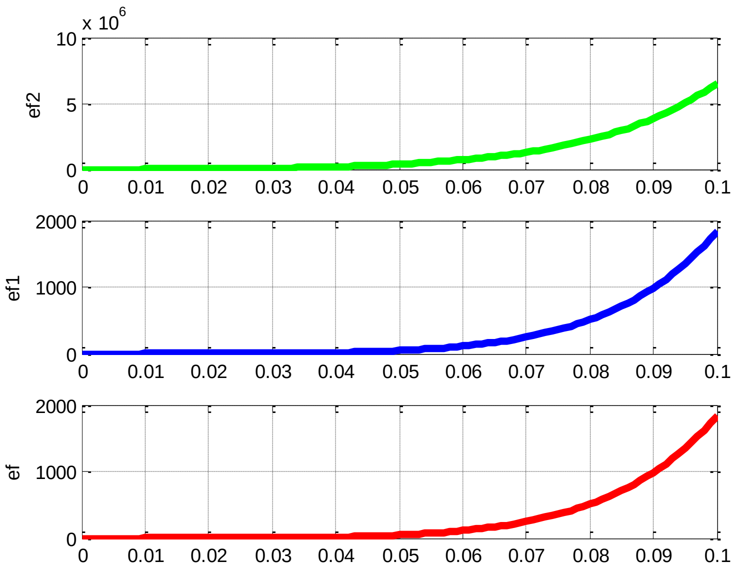

Fig.2. (SSMB6.13)

Уравнение (2) не имеет аналитического решения. Но численно можно найти функции

$$e_\varphi(r) = \mathrm{kh}(\alpha,\ \chi,\ r) \tag{3}$$

$$e'_\varphi(r) = \mathrm{kh1}(\alpha,\ \chi,\ r) \tag{4}$$

$$e''_\varphi(r) = \mathrm{kh2}(\alpha,\ \chi,\ r) \tag{5}$$

Для примера на рис. 2 показаны эти функции при $(\alpha = 5.5,\ \chi = 50)$ на радиусе $R = 0.1$.

Приложение 3.

Подставляя найденные в приложении 1 функции в уравнения (1-8) можно найти среднеквадратичную невязку этих уравнений. На рис. 3 показан график этой невязки при $(\alpha = 5.5,\ \chi = 50)$ на радиусе $R = 0.1$.

Можно найти среднеквадратичную невязку этих уравнений, как функцию какого-либо параметра. На рис. 4 показан график невязки в зависимости от α при $\chi = 50$ на радиусе $R = 0.1$. Здесь в верхнем окне показано значение невязки, а в нижнем окне – значение логарифма невязки.

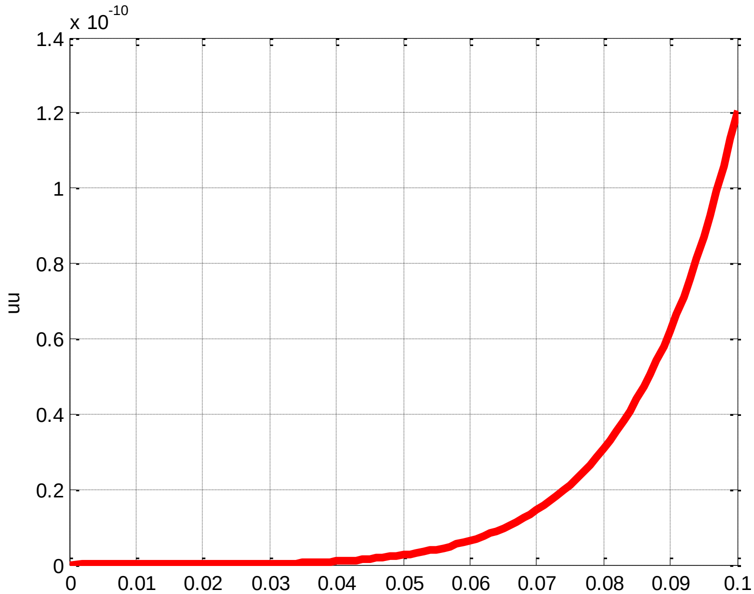

Fig.3. (SSMB6.14)

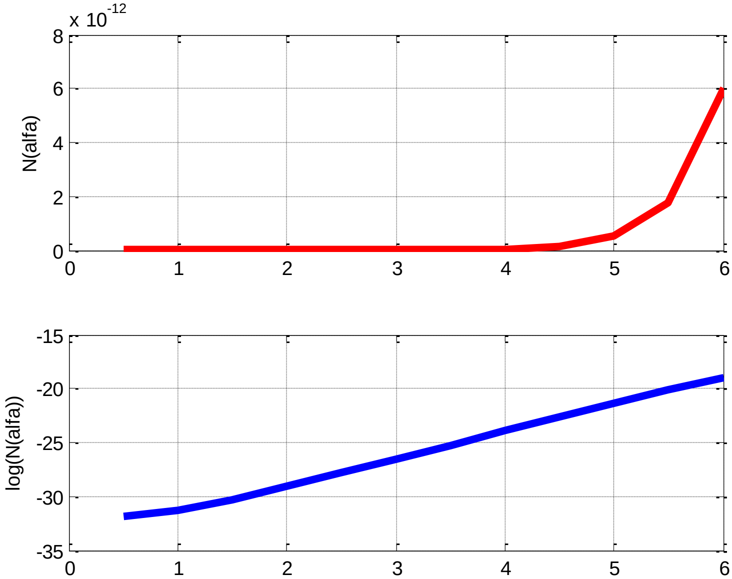

Fig.4. (SSMB6.333)

Литература

1. Хмельник С.И. Второе решение уравнений Максвелла, Vixra Funding, http://vixra.org/funding, 2016-01-26, http://vixra.org/abs/1601.0292; Доклады независимых авторов, ISSN 2225-6717, http://dna.izdatelstwo.com/, № 35, 2016 - см. здесь.