Pi Formulas , Part 21

Edgar Valdebenito

abstract

In this note we show some formulas related with the constant Pi

Número Pi , Funciones de Bessel

Edgar Valdebenito

03-01-2015 9:56:47

Resumen. En esta nota se muestran dos fórmulas que involucran a la constante Pi:

$$\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = 3.14159265...$$

y a las funciones de Bessel , $J_n(1)$ y $I_n(1)$.

Introducción

Recordamos algunas relaciones que involucran a las funciones de Bessel:

1. Ecuación diferencial de Bessel

$$x^2 y'' + x\, y' + \left(x^2 - n^2\right) y = 0 \quad , n \geq 0 \tag{1}$$

2. Funciones de Bessel de primera especie y orden n

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (x/2)^{n-2k}}{k!(n+k)!} \tag{2}$$

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad , n = 0,1,2,3,... \tag{3}$$

3. Fórmula de recurrencia para $J_n(x)$

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x) \tag{4}$$

4. Función generadora de las funciones $J_n(x)$

$$e^{x\left(t-t^{-1}\right)/2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, t^n \tag{5}$$

5. Ecuación diferencial de Bessel modificada

$$x^2 y'' + x\,y' - \left(x^2 + n^2\right) y = 0 \quad , n \geq 0 \tag{6}$$

6. Funciones modificadas de Bessel de primera especie y orden n

$$I_n\left(x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(x/2\right)^{n+2k}}{k!\left(n+k\right)!} \tag{7}$$

$$I_{-n}\left(x\right) = I_n\left(x\right) \quad , n = 0,1,2,3,\ldots \tag{8}$$

7. Fórmula de recurrencia para $I_n\left(x\right)$

$$I_{n+1}\left(x\right) = -\frac{2n}{x} I_n\left(x\right) + I_{n-1}\left(x\right) \tag{9}$$

8. Función generadora de las funciones $I_n\left(x\right)$

$$e^{x\left(t+t^{-1}\right)/2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n\left(x\right) t^n \tag{10}$$

9. Relación entre $J_n\left(x\right)$ y $I_n\left(x\right)$

$$I_n\left(x\right) = i^{-n} J_n\left(ix\right) \quad , i = \sqrt{-1} \tag{11}$$

En esta nota recordamos dos fórmulas que involucran a las funciones de Bessel $J_n\left(1\right)$ y $I_n\left(1\right)$, con la constante $\pi = 3.141592...$, las fórmulas se obtienen por sencillas manipulaciones de las ecuaciones (5) y (10).

Fórmulas

$$\begin{aligned} J_1\left(1\right)\frac{\pi}{4} + \int_0^{1/2} e^{-x\left(1-x\right)^2/\left(1-2x+2x^2\right)}\left(\cos\left(\frac{x-x^2+x^3}{1-2x+2x^2}\right) - \sin\left(\frac{x-x^2+x^3}{1-2x+2x^2}\right)\right)dx = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{Im}\left(\left(1+i\right)^{n+1}\right)}{\left(n+1\right)2^{n+1}} J_n\left(1\right) - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(-1\right)^n \operatorname{Im}\left(\left(1-i\right)^{n-1}\right)}{n-1} J_n\left(1\right) \end{aligned} \tag{12}$$

$$-I_1(1)\frac{\pi}{4}+\int_0^{1/2} e^{\left(1-2x+2x^2-x^3\right)/\left(1-2x+2x^2\right)}\left(\cos\left(\frac{x^2-x^3}{1-2x+2x^2}\right)+\sin\left(\frac{x^2-x^3}{1-2x+2x^2}\right)\right)dx= \\ =\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{Im}\left((1+i)^{n+1}\right)}{(n+1)2^{n+1}}I_n(1)-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\operatorname{Im}\left((1-i)^{n-1}\right)}{n-1}I_n(1) \tag{13}$$

Observación

El lado derecho de la fórmula (12) , se puede escribir como sigue:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{Im}\left((1+i)^{n+1}\right)}{(n+1)2^{n+1}}J_n(1)-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\operatorname{Im}\left((1-i)^{n-1}\right)}{n-1}J_n(1)= \\ =\frac{1}{2}J_0(1)+\frac{1}{4}J_1(1)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{A_n}{2^{n+1}\left(n^2-1\right)}J_n(1) \tag{14}$$

donde

$$A_n=(n-1)\operatorname{Im}\left((1+i)^{n+1}\right)-(-1)^n 2^{n+1}(n+1)\operatorname{Im}\left((1-i)^{n-1}\right) \tag{15}$$

Los números A_n , satisfacen la recurrencia:

$$A_{n+8}=-4A_{n+7}-8A_{n+6}+8A_{n+5}-4A_{n+4}-32A_{n+3}-128A_{n+2}+256A_{n+1}-256A_n \tag{16}$$

Algunos valores para A_n son:

$$\{A_n: n=0,1,2,..\}=\{-2,0,26,-128,308,-32,-3624,16384,-36752,...\} \tag{17}$$

El lado derecho de la fórmula (13) , se puede escribir como sigue:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{Im}\left((1+i)^{n+1}\right)}{(n+1)2^{n+1}}I_n(1)-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\operatorname{Im}\left((1-i)^{n-1}\right)}{n-1}I_n(1)= \\ =\frac{1}{2}I_0(1)+\frac{1}{4}I_1(1)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{B_n}{2^{n+1}\left(n^2-1\right)}I_n(1) \tag{18}$$

donde

$$B_n=(n-1)\operatorname{Im}\left((1+i)^{n+1}\right)-2^{n+1}(n+1)\operatorname{Im}\left((1-i)^{n-1}\right) \tag{19}$$

Los números B_n , satisfacen la recurrencia:

$$B_{n+8} = 12B_{n+7} - 72B_{n+6} + 264B_{n+5} - 644B_{n+4} + 1056B_{n+3} - 1152B_{n+2} + 768B_{n+1} - 256B_n \tag{20}$$

Algunos valores para B_n son:

$$\{B_n : n = 0,1,2,...\} = \{-2, 0, 26, 128, 308, -32, -3624, -16384, -36752, ...\} \tag{21}$$

Referencias

[1] Abramowitz, M., and Stegun, I.A.: Handbook of Mathematical Functions. Nueva York: Dover , 1965.

[2] Boros, G., Moll, V.: Irresistible Integrals.Cambridge University Press,2004.

[3] Gradshteyn, I.S., and Ryzhik, I.M.: Table of Integrals,Series and Products. 5th ed.,ed. Alan Jeffrey. Academic Press, 1994.

[4] Spiegel,M.R.: Mathematical Handbook, McGraw-Hill Book Company , New York , 1968.

[5] Valdebenito, E.:, Pi Handbook , manuscript , unpublished , 1989 , (20000 formulas).