Reviewing the 15th Problem of Smale: Navier-Stokes Equations

Valdir Monteiro dos Santos Godoi
valdir.msgodoi@gmail.com

Abstract – A most deep solution to the fifteenth problem of Smale, the Navier-Stokes equations in three spatial dimensions. The answer is negative.

Keywords – Navier-Stokes equations, existence, inexistence, smoothness, gradient field, conservative field, velocity, pressure, uniqueness, non uniqueness, 15th Problem of Smale.

§ 1 – Introdução

Steve Smale escreveu um estimulante artigo em 1998 onde propõe 18 problemas ainda não resolvidos na época[1], em atenção à solicitação de V.I.Arnold. Ambos, Arnold e Smale, por sua vez se inspiraram na famosa lista de 23 problemas de David Hilbert[2] (da lista de Hilbert, 10 estão completamente resolvidos, 8 parcialmente resolvidos e 5 a resolver).

A proposta deste artigo é resolver o 15º problema da lista de Smale, sobre a unicidade das soluções suaves (*smooth*) das equações de Navier-Stokes, de maneira não trivial, em um interessante nível de profundidade.

"*Do the Navier-Stokes equations on a 3-dimensional domain Ω in $\mathbb{R}^3$ have a unique smooth solution for all time?*"

Resposta: Não.

A resposta que aqui é dada já foi vista em [3], usando um argumento simples, a não unicidade da pressão devido ao acréscimo de uma constante não nula. Smale define a pressão no domínio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, sem variação no tempo, ao contrário do que normalmente se faz, por exemplo, em Fefferman[4]. Para a generalização de nossa exposição, entretanto, suponhamos inicialmente a pressão variando no tempo, além da variação espacial.

Se (u, p) é uma solução suave (lisa, regular, *smooth*, de classe C^∞) da equação de Navier-Stokes,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - \nu \nabla^2 u + \nabla p = 0, \tag{1}$$

com

$$\nabla \cdot u = 0, \tag{2}$$

velocidade prescrita em $t = 0$,

$$u(x,0) = u^0(x), \tag{3}$$

e no contorno (ou borda, fronteira) $\partial\Omega$,

$$u|_{x\in\partial\Omega} = u^\partial(x,t), \tag{4}$$

então $(u, p + \theta(t))$ também é uma solução, pois $\nabla p(x,t) = \nabla(p(x,t) + \theta(t))$, supondo que $\theta(t)$ não apresente singularidades, seja contínua e possa ser derivável espacialmente (obviamente, $\nabla\theta(t) = 0$), i.e., seja tão bem comportada quanto o que se espera para $p(x,t)$ neste problema.

Está muito claro que $p(x,t)$ e $p(x,t) + \theta(t)$ não são necessariamente a mesma solução p em (u,p) para o sistema (1) a (4), exceto se $\theta(t) = 0$, portanto a resposta deste problema não pode ser Sim.

Raciocínio análogo pode ser feito com as funções $q(x,t)$ tais que $\nabla q = 0$ (vetor nulo), cuja solução é uma constante em x ou variável apenas com o tempo. Temos, neste caso,

$$\nabla p(x,t) = \nabla(p(x,t) + \theta(t) + q), \tag{5}$$

$q \in \mathbb{R}$. Então, se p faz parte da solução (u,p) de (1) e (2), também são soluções de (1) a (4) infinitos outros pares (u,r) tais que

$$r(x,t) = p(x,t) + \theta(t) + q, \tag{6}$$

com $q \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^3$, $t \in [0,\infty)$, e as funções $p,r\colon \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $\theta\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $p,r,\theta \in C^\infty$ em Ω para todo $t \geq 0$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, i.e., todas estas funções e soluções são regulares (suaves, lisas, *smooth*).

Também há o caso de ser a função φ em

$$\nabla p = \nu\nabla^2 u - \frac{\partial u}{\partial t} - (u\cdot\nabla)u = \varphi \tag{7}$$

não gradiente, o que impossibilitará de ser encontrado um valor para p, desde $t = 0$ ou a partir de algum $t = T_N$ ou mais genericamente em algum conjunto de valores de t tais que φ não seja uma função gradiente nestes instantes de tempo t (ver ref. [5]). Isto pode acontecer já em $t = 0$, com a imposição de uma adequada condição inicial adicional $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}$ ou então, por exemplo, para $\frac{Du}{Dt}|_{t=0} = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u\cdot\nabla)u\right)|_{t=0}$.

Então pode não haver solução (u,p) para o sistema de equações (1) a (4) em algum $t \geq 0$, mas quando há solução ela não é única, pelo menos devido à infinidade de outras soluções $(u, p + \theta(t) + q)$ possíveis para o sistema, com $q \neq 0$ e $\theta(t) \neq 0$.

Vejam que não haver solução para p não é a mesma coisa que admitir que a pressão é nula, $p = 0$, ou mais genericamente impor como condição de contorno uma determinada pressão $p(x,t)$. Nessas situações ∇p existirá em geral, mas o problema original é outro, pois p deve ser uma variável dependente incógnita, não uma função pré-fixada.

Lembremos também que tanto neste problema descrito por Smale[1] quanto no correspondente (e mais detalhado) descrito por Fefferman[4] não é dada nenhuma condição inicial para a pressão $p(x,t)$, apenas para a velocidade inicial $u(x,0)$. Smale, ao contrário de Fefferman, inclui uma condição de contorno para $u(x,t)$ sobre $\partial\Omega$, a nossa equação (4).

Ainda mais uma observação é necessária. Conforme dissemos, ao contrário de Fefferman e da pressão real, no cotidiano, em máquinas e na natureza, poder variar com o tempo, Smale define o domínio da pressão como igual a $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, i.e., sem variar no tempo. Seja por equívoco ou não, mesmo admitindo-se $p, r: \Omega \to \mathbb{R}$, com $p, r \in C^\infty$ em Ω para todo $t \geq 0$ e $q \in \mathbb{R}$ uma constante, sem utilizarmos a função $\theta(t)$, temos

$$\nabla p(x) = \nabla(p(x) + q), \tag{8}$$

resultado que também proporcionará infinitas outras soluções (u,r) admissíveis para (1) a (4), sendo (u,p) uma solução regular (suave, lisa, *smooth*) e

$$r(x) = p(x) + q, \tag{9}$$

$q \neq 0$, como já dissemos em [6] com outras palavras, usando $\theta(t)$, e mostramos inicialmente para o caso mais geral da pressão variável com o tempo e a posição, $p(x,t)$.

Naturalmente, estamos admitindo que $r(x)$ em (9) está definida em Ω, tal qual $p(x)$. Isto não oferece nenhuma dificuldade de entendimento no caso especial de ser $\Omega = \mathbb{R}^3$. Outros domínios, entretanto, também são facilmente estendidos para a função $r(x)$. Se $p(x)$ existe em Ω e tem imagem $\mathbb{R}$, então para todo $x \in \Omega$ a função $r(x) = p(x) + q$ também existe, está bem definida e tem imagem $\mathbb{R}$. Comentário similar se faz a respeito de $r(x,t)$ sobre $\Omega \times [0,\infty)$, dada em (6).

Assim, concluindo, a resposta ao problema é Não. Nem sempre, nem única.

Nas próximas seções analisaremos situações mais gerais para que ocorra a não unicidade destas soluções, além da possibilidade de não haver solução alguma.

§ 2 – Uma solução mais completa

Na seção anterior mostramos de maneira quase trivial a não unicidade da solução (u,p) das equações de Navier-Stokes devido à pressão p, com o correspondente acréscimo de um termo constante q ou dependente do tempo $\theta(t)$. Vamos agora achar uma solução não única para a velocidade nas equações de Navier-Stokes, sem precisar resolver nenhuma equação diferencial auxiliar. Só será preciso efetuar uma integração, necessária à obtenção da pressão. Em benefício da generalização, a velocidade inicial poderá ser diferente de zero, assim como a força externa aplicada, e não estaremos preocupados em buscar apenas energias cinéticas infinitas ou velocidades pertencentes ao espaço de Schwartz. Não estamos buscando uma *breakdown solution*, como fizemos em [7], pelo contrário, buscamos infinitas *smooth solutions*.

Vamos resolver o sistema (1), (2), (3) para o caso especial em que

$$u(x_1,x_2,x_3,t) = X(x_1+x_2+x_3)T(t)\,(1,1,-2) = X(\xi)T(t)J, \tag{10}$$
$$\xi(x) = x_1+x_2+x_3,\ J = (1,1,-2),$$

valendo $\nabla \cdot (\xi J) = 0$. Isso nos dá $\nabla \cdot u = \nabla \cdot u^0 = 0$ e a eliminação dos termos não lineares $(u \cdot \nabla)u \equiv \left(\sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j},\right)_{1\le i\le 3} = 0$ das Equações de Navier-Stokes, com ou sem força externa. Assim a solução de (1) será reduzida à solução de uma equação diferencial parcial linear, a Equação do Calor não homogênea tridimensional,

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \nu \nabla^2 u_i - \frac{\partial u_i}{\partial t} + f_i = \phi_i, 1 \le i \le 3, \tag{11}$$

devendo valer

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}, i \ne j. \tag{12}$$

Como $\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial p}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x_i} = \frac{\partial p}{\partial \xi}$, $\forall i$, assim como os operadores diferenciais $\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial \xi}$ e $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 = \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^2$, $\forall i$, i.e., temos uma pressão que pode ser expressa como função de ξ, assim como as componentes da velocidade u, e os x_i apresentam-se de forma simétrica e linear em relação a $\xi = x_1 + x_2 + x_3$, com a transformação do elemento infinitesimal de integração $d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial \xi}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial \xi}{\partial x_3}dx_3 = dx_1 + dx_2 + dx_3$, a igualdade (12) é verdadeira, é válido $\frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j}$, e teremos a seguinte solução para a pressão:

$$p(x,t) - p_0(t) = \int_{\xi_0}^{\xi(x)} \left(\nu \mathrm{T} \nabla^2 X - X\frac{dT}{dt} + f\right) d\xi + \theta(t), \tag{13}$$

com

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial p}{\partial x_2} = \frac{\partial p}{\partial x_3}, \tag{14}$$

supondo que a força $f(x,t)$ seja da forma $Y(\xi)Z(t)(1,1,-2)$, tal qual $u(x,t) = X(\xi)T(t)(1,1,-2)$. Consideremos $p_0(t)$ como a pressão no instante t e na superfície $\xi = \xi_0$. Isto resolve o sistema que pretendíamos, desde que a integração em (13) seja possível, e assim não precisamos resolver nenhuma equação diferencial ordinária intermediária para encontrarmos $X(\xi)$, pois podemos prefixar qual a expressão para $X(\xi)$ que desejamos utilizar, dentre infinitas possibilidades, e tal que tenhamos $u(x,0) = u^0(x)$.

Outras combinações das componentes do vetor J podem ser usadas, assim como outras combinações dos coeficientes dos x_1, x_2, x_3 em ξ, desde que eliminem-se os termos não lineares e verifique-se (2) e (12). Assim sendo, formas mais complicadas para ξ também são possíveis, além das lineares, o que traz uma robusta maneira de se obter as soluções para u. Por exemplo, definindo-se

$$u_i = \alpha_i(x,t)u_1,\ 1 \le i \le n,\ \alpha_1 = 1, \tag{15}$$

a condição a ser obedecida por X e ξ a fim de se eliminar os termos não lineares é

$$\alpha_i \frac{dX(\xi)}{d\xi} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial \xi}{\partial x_j} + X(\xi) \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} = 0, \tag{16}$$

para todo i (natural) em $1 \le i \le n$. Para cada determinado i elimina-se o termo não linear da respectiva linha (ou coordenada) i se (16) for satisfeita.

Uma maneira de fazer (16) ser verdadeira é quando

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial \xi}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} = 0. \tag{17}$$

Quando os α_i são constantes ou dependentes apenas do tempo a condição a ser obedecida para ξ é

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial \xi}{\partial x_j} = 0, \tag{18}$$

o que está de acordo com a expressão de ξ escolhida em (10).

Incluindo-se ainda a condição de incompressibilidade para u, deve ser válida também a relação

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(\alpha_j u_1)}{\partial x_j} &= u_1 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \\ &= T(t)[X(\xi) \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_j} + \frac{dX(\xi)}{d\xi} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial \xi}{\partial x_j}] = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Como (102) deve ser válida para todo t, então precisamos que seja

$$X(\xi) \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_j} + \frac{dX(\xi)}{d\xi} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial \xi}{\partial x_j} = 0. \tag{20}$$

Quando os α_j são constantes ou dependentes apenas do tempo a condição a ser obedecida para ξ é igual à condição (18) anterior,

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial \xi}{\partial x_j} = 0. \tag{21}$$

Observemos que a função $T(t)$ em (10) não deve ter singularidades no caso de se desejar que a velocidade u seja regular, limitada em módulo (norma), não obstante, $T(t)$ singular, infinita para um ou mais valores do tempo t, pode ser considerada como um "marcador" de *blowups*, e assim podemos construir soluções com instantes de *blowup* τ_* bem determinados, à nossa vontade, tais que $T(\tau_*) \to \infty$.

Na ausência de singularidades de $T(t)$ e $X(\xi(x))$, entretanto, desejando apenas velocidades regulares, conclui-se que é possível a uma equação de Navier-Stokes tridimensional (em geral, n-dimensional) *"bem comportada"* ter mais de uma solução para a mesma velocidade inicial. Da especial forma dada à solução $u(x,t)$ em (10), com $T(0) = 0$ ou não, para uma mesma velocidade inicial $u(x,0) = X\big(\xi(x)\big)T(0)J = u^0(x)$, com $J = (1,1,-2)$, é possível gerar, em princípio, infinitas velocidades diferentes $u(x,t) = X(\xi(x))T(t)J$, para diferentes funções da posição $X(\xi(x))$ e do tempo $T(t)$, que resolvem a equação de Navier-Stokes (1). Se a força externa é zero, isso nos remete de novo à resposta negativa ao 15º problema de Smale [1], como já havíamos visto na seção § 1 anterior pensando apenas na não unicidade da pressão devido ao termo adicional $\theta(t) + q$, onde $q \neq 0$ é uma constante e $\theta(t)$ uma função explícita do tempo.

§ 3 – A não unicidade em dimensão espacial $n = 2$

O que há com as provas de unicidade das soluções das equações de Navier-Stokes em dimensão espacial $n = 2$? O que foi feito na seção anterior com $n = 3$ pode ser aplicado em $n = 2$, com $\xi = x_1 + x_2$, $J = (1,-1)$, portanto também não há unicidade de soluções nas Equações de Navier-Stokes para $n = 2$. Mas este é (ou era) um dos resultados mais bem estabelecidos na teoria matemática dos fluidos, importantíssimo resultado, portanto iremos analisá-lo.

Não sendo possível analisar todas as provas existentes, é possível ao menos entender que tais provas não devem levar em consideração a ausência do termo não linear nas Equações de Navier-Stokes, $\sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \equiv ((u \cdot \nabla)u)_i, 1 \leq i \leq n$, e foi a esta ausência que recorremos em nosso exemplo.

Semelhantemente a esta causa, também se percebe que diferentes equações do tipo de Navier-Stokes, com ausência de um ou mais termos da respectiva equação completa, e que não obstante tenham a mesma condição inicial $u(x,0) = u^0(x)$, terão provavelmente, no caso geral, diferentes soluções $u(x,t)$ entre elas, e assim não poderá haver unicidade de solução em relação à equação de Navier-Stokes completa, com todos os termos. Se todas apresentassem sempre a mesma e única solução, bastaria para nós resolver somente a mais simples delas, por exemplo, $\nabla p = -\frac{\partial u}{\partial t}$ ou $\nabla p = \nu \nabla^2 u$ (Equação de Poisson se $\nabla p \not\equiv 0$ ou de Laplace se $\nabla p \equiv 0$) ou $\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \nabla^2 u$ (Equação do Calor com $\nabla p = 0$), todas com $u(x,0) = u^0(x)$, e conferir se a soma dos demais termos faltantes é igual a zero ao aplicar a solução u obtida na equação reduzida. Se sim, a solução da equação reduzida é também solução da equação completa. Importante exemplo desta ausência são as Equações de Euler, que diferem das Equações de Navier-Stokes pela ausência do operador diferencial nabla aplicado a u, $\nabla^2 u \equiv \Delta u$, devido ao coeficiente de viscosidade ser nulo, $\nu = 0$.

É fácil provar que as três equações acima, assim como a equação $\nabla p + \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \nabla^2 u$, não podem realmente ter uma única solução, dada apenas a condição inicial para a velocidade $u(x,0) = u^0(x)$. Pelo contrário, a forma completa das equações de Navier-Stokes, onde supomos que $\sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \equiv ((u \cdot \nabla)u)_i \not\equiv 0,\ 1 \leq i \leq n$, tem unicidade de solução para $n = 2$ e em ao menos um pequeno intervalo de tempo não nulo $[0, T]$ para $n = 3$, onde T é conhecido como *blowup time*. Acrescentemos em todas estas equações a condição de incompressibilidade, $\nabla \cdot u = 0$.

Trata-se assim de um interessante problema de Análise Combinatória aplicada à Análise Matemática e Física-Matemática.

§ 4 – Unicidade em dimensão espacial $n = 3$

Verificamos na seção § 2 que o sistema

$$\begin{cases} \nabla p + \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \nabla^2 u \\ (u \cdot \nabla)u = 0 \\ \nabla \cdot u = 0 \\ u(x,0) = 0 \end{cases} \tag{22}$$

tem infinitas soluções para a velocidade da forma

$$u(x,t) = X(\xi)T(t)\ (1, 1, -2),\ \ \xi = x_1 + x_2 + x_3, \tag{23}$$

com $T(0) = 0$ ou outro valor constante, não obstante existem as provas conhecidas da unicidade de

$$\begin{cases} \nabla p + \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = \nu \nabla^2 u \\ \nabla \cdot u = 0 \\ u(x,0) = 0 \end{cases} \tag{24}$$

em ao menos um pequeno intervalo de tempo $[0, T]$ não nulo, contradizendo o que obtivemos.

Sem ser necessário nos demorarmos nas provas conhecidas, expondo todos os seus detalhes, repetindo suas passagens, é possível constatar em Leray [8], Ladyzhenskaya [9], Kreiss and Lorenz [10], dentre outros, que as provas de existência e unicidade baseiam-se na forma completa das equações de Navier-Stokes, por exemplo (24), e não em uma forma desmembrada das equações de Navier-Stokes, como (22).

§ 5 – Não Unicidade em dimensão espacial $n = 3$, com $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$

Não exploramos a condição (4) até o momento, a condição de contorno $u|_{x\in\partial\Omega} = u^{\partial}(x,t)$, nem o fato da pressão não ter variação temporal, $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$, conforme proposto no problema original de Smale [1]. De fato são dois grandes complicadores ao problema, mas não impossibilitam a solução da questão. A resposta continua a mesma: negativa.

De (13), fatorando o integrando, separando as variáveis em $X(\xi)$ e $T(t)$, fazendo

$$\nabla^2 X = -X \tag{25}$$

(buscando soluções espacialmente periódicas, combinações de senos e cossenos), retirando o tempo do domínio da pressão e definindo $f = 0$, temos

$$\begin{aligned} p(x) - p_0 &= \int_{\xi_0}^{\xi(x)} \left(\nu \mathrm{T} \nabla^2 X - X \frac{dT}{dt}\right) d\xi \\ &= -\left(\nu\, T + \frac{dT}{dt}\right) \int_{\xi_0}^{\xi(x)} X\, d\xi. \end{aligned} \tag{26}$$

Consideremos p_0 como a pressão na superfície $\xi = \xi_0$, qualquer que seja o instante de tempo $t \geq 0$.

Como a pressão não pode variar no tempo, então o termo que aparece multiplicando a integral deve ser igual a uma constante k, i.e.,

$$\left(\nu\, T + \frac{dT}{dt}\right) = -k, \tag{27}$$

ou

$$\frac{dT}{dt} + \nu\, T + k = 0, \tag{28}$$

uma equação diferencial ordinária linear e de primeira ordem no tempo, cuja solução é da forma

$$T(t) = Ae^{Bt} + Ce^{-Dt} + E, \tag{29}$$

para A, B, C, D, E constantes.

Substituindo (28) em (27) obtemos

$$\begin{cases} B = -\nu \\ D = +\nu \\ E = -\frac{k}{\nu},\ \nu \neq 0 \end{cases} \tag{30}$$

ou seja,

$$T(t) = Fe^{-\nu t} - \frac{k}{\nu}, \nu > 0, \quad (31)$$

para $F = A + C$ uma constante e lembrando que o coeficiente de viscosidade ν não pode ser negativo.

Em $t = 0$, chamando $T(0) = T_0$, temos

$$T(0) = F - \frac{k}{\nu} = T_0, \quad (32)$$

ou

$$F = T_0 + \frac{k}{\nu}, \quad (33)$$

donde

$$T(t) = \left(T_0 + \frac{k}{\nu}\right) e^{-\nu t} - \frac{k}{\nu}, \nu > 0. \quad (34)$$

Daqui se vê que somente o valor de T_0 não é suficiente para encontrar unicidade de solução neste problema, pois há uma infinidade de possibilidades para se escolher a constante k. Incluamos a seguir a condição (4),

$$u|_{x\in\partial\Omega} = u^{\partial}(x,t), \quad (35)$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ é o domínio em $u: \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^3$ e $p: \Omega \to \mathbb{R}$.

Podemos escolher o domínio Ω que seja mais conveniente para a solução deste problema de Smale. Precisamos, em princípio, escolher apenas um único domínio Ω específico tal que se verifique a não unicidade de soluções, sem precisar provar que a mesma conclusão vale também para qualquer região Ω.

Não obstante, constata-se que a possibilidade aqui é bastante ampla, e uma infinidade de regiões $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ podem ser escolhidas. O valor da função $u^{\partial}(x,t)$ que devemos escolher é igual ao valor de $u(x,t)$ em $\partial\Omega$, qualquer que seja Ω.

Para $u(x,t)$ dado em (10),

$$u(x_1,x_2,x_3,t) = X(x_1+x_2+x_3)T(t)\,(1,1,-2) = X(\xi)T(t)J, \quad (36)$$
$$\xi(x) = x_1 + x_2 + x_3,\ J = (1,1,-2),$$

e $X(\xi(x))$ solução de (25), i.e.,

$$X(\xi) = A\,cos\,\xi + B\,sen\,\xi, \quad (37)$$

com A e B constantes reais e $T(t)$ dado em (34), a solução do sistema (1), (2), (3) para a velocidade é

$$u(x,t) = (A\,cos\,\xi + B\,sen\,\xi)\left[\left(T_0 + \frac{k}{\nu}\right)e^{-\nu t} - \frac{k}{\nu}\right]J, \qquad (38)$$
$$\xi(x) = x_1 + x_2 + x_3,\ J = (1,1,-2),$$

valendo

$$u^0(x) = u(x,0) = (A\,cos\,\xi + B\,sen\,\xi)\,T_0\,J. \qquad (39)$$

Por simplicidade, vamos escolher $A = B = T_0 = k = 1$ em (38), e assim a função $u^{\partial}(x,t)$ deve ser igual ao valor da solução $u(x,t)$ em $\partial\Omega$, com os parâmetros igualados a 1, i.e., qualquer que seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ teremos

$$u^{\partial}(x,t) = u(x,t) = (cos\,\xi + sen\,\xi)\left[\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)e^{-\nu t} - \frac{1}{\nu}\right]J, \qquad (40)$$
$$\xi(x) = x_1 + x_2 + x_3,\ J = (1,1,-2),$$

valendo

$$u^0(x) = u(x,0) = (cos\,\xi + sen\,\xi)\,J. \qquad (41)$$

Vemos que a introdução da condição (4) no sistema (1), (2), (3) pode tornar única a velocidade, conforme (40), mas a pressão continuará não sendo única, como também já acontecia na situação da seção § 1.

Usando (37) e (27) em (26), com $A = B = k = 1$, teremos

$$p(x) - p_0 = +\int_{\xi_0}^{\xi(x)} X\,d\xi = (sen\,\xi - cos\,\xi)\Big|_{\xi_0}^{\xi} \qquad (42)$$
$$= (sen\,\xi - cos\,\xi) - (sen\,\xi_0 - cos\,\xi_0),$$
$$\xi(x) = x_1 + x_2 + x_3,$$

onde podemos considerar p_0 como a pressão (constante) na superfície $\xi = \xi_0$.

Vemos assim que, ao contrário da velocidade em (40), a solução acima para a pressão do sistema (1) a (4) tem ainda dois parâmetros livres, p_0 e ξ_0, portanto devemos concluir que a solução (u,p) não é única. Faltam, evidentemente, os valores de p_0 e ξ_0, condições que não fazem parte dos dados do problema.

§ 6 – Inexistência em dimensão espacial $n = 3$

Nesta seção vamos fazer para três dimensões o que já fizemos em duas dimensões em [7], seção § 7.

As equações de Navier-Stokes sem força externa com $n = 3$ são (usando $x \equiv x_1,\ y \equiv x_2$ e $z \equiv x_3$)

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial z} = \nu \nabla^2 u_1 \\ \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial z} = \nu \nabla^2 u_2 \\ \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_3}{\partial y} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial z} = \nu \nabla^2 u_3 \end{cases} \tag{43}$$

Podemos dispor o sistema acima de forma parecida com um sistema de equações lineares,

$$\begin{cases} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial z} = \nu \nabla^2 u_1 - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial t} \\ u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial z} = \nu \nabla^2 u_2 - \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t} \\ u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_3}{\partial y} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial z} = \nu \nabla^2 u_3 - \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial t} \end{cases} \tag{44}$$

e a seguir em forma de uma equação matricial,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} & \frac{\partial u_3}{\partial y} & \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu \nabla^2 u_1 - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial t} \\ \nu \nabla^2 u_2 - \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t} \\ \nu \nabla^2 u_3 - \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial t} \end{pmatrix}. \tag{45}$$

Chamando

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} & \frac{\partial u_3}{\partial y} & \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{pmatrix}, \tag{46}$$

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \tag{47}$$

$$B = \begin{pmatrix} \nu \nabla^2 u_1 - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial t} \\ \nu \nabla^2 u_2 - \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t} \\ \nu \nabla^2 u_3 - \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial t} \end{pmatrix}, \tag{48}$$

a solução para U da equação (45), $AU = B$, é

$$U = A^{-1}B, \tag{49}$$

que para existir e ter solução única deve-se ter

$$\det A = \frac{\partial u_1}{\partial x}\left(\frac{\partial u_2}{\partial y}\frac{\partial u_3}{\partial z} - \frac{\partial u_2}{\partial z}\frac{\partial u_3}{\partial y}\right) - \frac{\partial u_1}{\partial y}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{\partial u_3}{\partial z} - \frac{\partial u_2}{\partial z}\frac{\partial u_3}{\partial x}\right) \tag{50}$$

$$+ \frac{\partial u_1}{\partial z}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial y}\frac{\partial u_3}{\partial x}\right) \neq 0,$$

ou seja,

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial y}\frac{\partial u_3}{\partial z} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial z}\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z}\frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{\partial u_3}{\partial y} \neq \tag{51}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial z}\frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{\partial u_3}{\partial z} + \frac{\partial u_1}{\partial z}\frac{\partial u_2}{\partial y}\frac{\partial u_3}{\partial x},$$

regra que também deve ser obedecida para $t = 0$ (de novo pode nos levar aos casos (C) e (D) de [4], quando o sistema torna-se impossível de ser resolvido).

Se usarmos a condição de incompressibilidade $\nabla \cdot u = 0$,

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} = 0, \tag{52}$$

i.e.,

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = -\left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}\right), \tag{53}$$

transforma-se a condição (51) em

$$-\left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}\right)\frac{\partial u_2}{\partial y}\frac{\partial u_3}{\partial z} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial z}\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z}\frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{\partial u_3}{\partial y} \neq \tag{54}$$

$$-\left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}\right)\frac{\partial u_2}{\partial z}\frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{\partial u_3}{\partial z} + \frac{\partial u_1}{\partial z}\frac{\partial u_2}{\partial y}\frac{\partial u_3}{\partial x},$$

ou equivalentemente,

$$+\left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}\right)\frac{\partial u_2}{\partial z}\frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial z}\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z}\frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{\partial u_3}{\partial y} \neq \tag{55}$$

$$+\left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}\right)\frac{\partial u_2}{\partial y}\frac{\partial u_3}{\partial z} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{\partial u_3}{\partial z} + \frac{\partial u_1}{\partial z}\frac{\partial u_2}{\partial y}\frac{\partial u_3}{\partial x}.$$

Como esta condição deve ser válida para todo t, em $t = 0$ deve-se obedecer a

$$+\left(\frac{\partial u_2^0}{\partial y} + \frac{\partial u_3^0}{\partial z}\right)\frac{\partial u_2^0}{\partial z}\frac{\partial u_3^0}{\partial y} + \frac{\partial u_1^0}{\partial y}\frac{\partial u_2^0}{\partial z}\frac{\partial u_3^0}{\partial x} + \frac{\partial u_1^0}{\partial z}\frac{\partial u_2^0}{\partial x}\frac{\partial u_3^0}{\partial y} \neq \tag{56}$$

$$+\left(\frac{\partial u_2^0}{\partial y} + \frac{\partial u_3^0}{\partial z}\right)\frac{\partial u_2^0}{\partial y}\frac{\partial u_3^0}{\partial z} + \frac{\partial u_1^0}{\partial y}\frac{\partial u_2^0}{\partial x}\frac{\partial u_3^0}{\partial z} + \frac{\partial u_1^0}{\partial z}\frac{\partial u_2^0}{\partial y}\frac{\partial u_3^0}{\partial x},$$

i.e.

$$+\left(\frac{\partial u_2^0}{\partial y}+\frac{\partial u_3^0}{\partial z}\right)\frac{\partial u_2^0}{\partial z}\frac{\partial u_3^0}{\partial y}+\frac{\partial u_1^0}{\partial y}\frac{\partial u_2^0}{\partial z}\frac{\partial u_3^0}{\partial x}+\frac{\partial u_1^0}{\partial z}\frac{\partial u_2^0}{\partial x}\frac{\partial u_3^0}{\partial y}\neq \tag{57}$$

$$+\left(\frac{\partial u_2^0}{\partial y}\right)^2\frac{\partial u_3^0}{\partial z}+\left(\frac{\partial u_3^0}{\partial z}\right)^2\frac{\partial u_2^0}{\partial y}+\frac{\partial u_1^0}{\partial y}\frac{\partial u_2^0}{\partial x}\frac{\partial u_3^0}{\partial z}+\frac{\partial u_1^0}{\partial z}\frac{\partial u_2^0}{\partial y}\frac{\partial u_3^0}{\partial x},$$

onde se usou $u(x,y,z,0)=u^0(x,y,z)=(u_1^0(x,y,z),u_2^0(x,y,z),u_3^0(x,y,z))$.

Se a velocidade inicial u^0 for tal que sejam desobedecidas (56)-(57) então ou não haverá solução para o sistema (43) (sistema impossível) ou não haverá uma única solução (sistema indeterminado), tal como na teoria de sistemas lineares. Qualquer que seja um destes casos (sistema impossível ou sistema indeterminado) teremos a resposta negativa ao problema de Smale: não há sempre uma única solução para o sistema (1) a (4), o que já pode ocorrer desde $t=0$.

Definindo

$$U_1=\begin{pmatrix}\nu\nabla^2 u_1-\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial u_1}{\partial t} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z}\\ \nu\nabla^2 u_2-\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial u_2}{\partial t} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z}\\ \nu\nabla^2 u_3-\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\partial u_3}{\partial t} & \frac{\partial u_3}{\partial y} & \frac{\partial u_3}{\partial z}\end{pmatrix}, \tag{58}$$

$$U_2=\begin{pmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial x} & \nu\nabla^2 u_1-\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial u_1}{\partial t} & \frac{\partial u_1}{\partial z}\\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \nu\nabla^2 u_2-\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial u_2}{\partial t} & \frac{\partial u_2}{\partial z}\\ \frac{\partial u_3}{\partial x} & \nu\nabla^2 u_3-\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\partial u_3}{\partial t} & \frac{\partial u_3}{\partial z}\end{pmatrix} \tag{59}$$

e

$$U_3=\begin{pmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \nu\nabla^2 u_1-\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial u_1}{\partial t}\\ \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \nu\nabla^2 u_2-\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial u_2}{\partial t}\\ \frac{\partial u_1}{\partial z} & \frac{\partial u_3}{\partial y} & \nu\nabla^2 u_3-\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\partial u_3}{\partial t}\end{pmatrix}, \tag{60}$$

a solução para u_1,u_2,u_3 será

$$u_1=\frac{\det U_1}{\det A}, \tag{61}$$

$$u_2=\frac{\det U_2}{\det A} \tag{62}$$

e

$$u_3=\frac{\det U_3}{\det A}. \tag{63}$$

Sendo

$$\det U_1 = \left(\nu\nabla^2 u_1 - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial u_2}{\partial y}\,\frac{\partial u_3}{\partial z} - \frac{\partial u_2}{\partial z}\,\frac{\partial u_3}{\partial y}\right) + \tag{64}$$

$$+\left(\nu\nabla^2 u_2 - \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial z}\,\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\,\frac{\partial u_3}{\partial z}\right) +$$

$$+\left(\nu\nabla^2 u_3 - \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\,\frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial u_1}{\partial z}\,\frac{\partial u_2}{\partial y}\right),$$

$$\det U_2 = \left(\nu\nabla^2 u_1 - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial u_2}{\partial z}\,\frac{\partial u_3}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial x}\,\frac{\partial u_3}{\partial z}\right) + \tag{65}$$

$$+\left(\nu\nabla^2 u_2 - \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\,\frac{\partial u_3}{\partial z} - \frac{\partial u_1}{\partial z}\,\frac{\partial u_3}{\partial x}\right) +$$

$$+\left(\nu\nabla^2 u_3 - \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial z}\,\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x}\,\frac{\partial u_2}{\partial z}\right),$$

e

$$\det U_3 = \left(\nu\nabla^2 u_1 - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\,\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial y}\,\frac{\partial u_3}{\partial x}\right) + \tag{66}$$

$$+\left(\nu\nabla^2 u_2 - \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\,\frac{\partial u_3}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x}\,\frac{\partial u_3}{\partial y}\right) +$$

$$+\left(\nu\nabla^2 u_3 - \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\,\frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\,\frac{\partial u_2}{\partial x}\right),$$

com $\det A$ dado em (50), temos então

$$u_1 = \frac{\det U_1}{\det A} = \left[\left(\nu\nabla^2 u_1 - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial u_2}{\partial y}\,\frac{\partial u_3}{\partial z} - \frac{\partial u_2}{\partial z}\,\frac{\partial u_3}{\partial y}\right) + \right. \tag{67}$$

$$+\left(\nu\nabla^2 u_2 - \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial z}\,\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\,\frac{\partial u_3}{\partial z}\right) +$$

$$\left. +\left(\nu\nabla^2 u_3 - \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\,\frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial u_1}{\partial z}\,\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)\right] /$$

$$\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial y}\frac{\partial u_3}{\partial z} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial z}\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z}\frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{\partial u_3}{\partial y}\right) - \right.$$

$$\left. -\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial z}\frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{\partial u_3}{\partial z} + \frac{\partial u_1}{\partial z}\frac{\partial u_2}{\partial y}\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)\right],$$

$$u_2 = \frac{\det U_2}{\det A} = [\left(\nu\nabla^2 u_1 - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial u_2}{\partial z}\frac{\partial u_3}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{\partial u_3}{\partial z}\right) + \tag{68}$$

$$+\left(\nu\nabla^2 u_2 - \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_3}{\partial z} - \frac{\partial u_1}{\partial z}\frac{\partial u_3}{\partial x}\right) +$$

$$+\left(\nu\nabla^2 u_3 - \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial z}\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial z}\right)] \,/$$

$$[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial y}\frac{\partial u_3}{\partial z} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial z}\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z}\frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{\partial u_3}{\partial y}\right) -$$

$$-\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial z}\frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{\partial u_3}{\partial z} + \frac{\partial u_1}{\partial z}\frac{\partial u_2}{\partial y}\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)]$$

e

$$u_3 = \frac{\det U_3}{\det A} = [\left(\nu\nabla^2 u_1 - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial y}\frac{\partial u_3}{\partial x}\right) + \tag{69}$$

$$+\left(\nu\nabla^2 u_2 - \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_3}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_3}{\partial y}\right) +$$

$$+\left(\nu\nabla^2 u_3 - \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)] \,/$$

$$[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial y}\frac{\partial u_3}{\partial z} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial z}\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z}\frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{\partial u_3}{\partial y}\right) -$$

$$-\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial z}\frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{\partial u_3}{\partial z} + \frac{\partial u_1}{\partial z}\frac{\partial u_2}{\partial y}\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)].$$

Se $\det A \neq 0$ o sistema (43) é determinado, se $\det A = \det U_1 = \det U_2 = \det U_3 = 0$ o sistema é indeterminado, caso contrário o sistema é impossível ($\det A = 0$ e uma ou duas das matrizes U_1, U_2 e U_3 com determinantes diferentes de zero).

É verdade que as soluções (equações) anteriores, equações (67) a (69), são bem mais complicadas que as equações originais em (43), e parece não haver utilidade alguma em resolvê-las.

Mas desta forma complicada se pode chegar com mais certeza à seguinte constatação (já vista em [7] para $n = 2$): as equações de Navier-Stokes (e Euler) têm uma simetria entre as variáveis, tanto as dependentes quanto as independentes. O mesmo também pode ser percebido diretamente em (43).

A simetria neste caso de $n = 3$ é

$$u_1 \mapsto u_2 \tag{70.1}$$

$$u_2 \mapsto u_3 \tag{70.2}$$

$$u_3 \mapsto u_1 \tag{70.3}$$

$$x \mapsto y \tag{70.4}$$

$$y \mapsto z \tag{70.5}$$

$$z \mapsto x \tag{70.6}$$

ficando p e t inalterados:

$$p \leftrightarrow p \tag{71.1}$$

$$t \leftrightarrow t. \tag{71.2}$$

Isso sugere, se não resolve completamente, a questão da solução destas equações. Se as equações em si são simétricas em relação a determinadas transformações, então esperamos que suas soluções também o sejam sob estas transformações. O mesmo método pode ser aplicado também para $n \geq 4$, com a regra (por exemplo)

$$u_i \mapsto u_{i+1},\ u_{n+1} \equiv u_1, \tag{72.1}$$

$$x_i \mapsto x_{i+1},\ x_{n+1} \equiv x_1, \tag{72.2}$$

$$p \leftrightarrow p, \tag{72.3}$$

$$t \leftrightarrow t. \tag{72.4}$$

Nesse caso é preciso que a condição inicial $u(x,0) = u^0(x)$ obedeça também a estas simetrias, mas permanece inalterada a condição de incompressibilidade: $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i^0}{\partial x_i} = 0$.

Se fornecemos $u_1(x,y,z,t)$ como dado de entrada no nosso sistema então podemos concluir que as soluções para u_2 e u_3, supostamente simétricas a u_1 pela regra (70) anterior, sejam, respectivamente,

$$u_2(x,y,z,t) = u_1(y,z,x,t), \tag{73.1}$$

$$u_3(x,y,z,t) = u_2(y,z,x,t) = u_1(z,x,y,t), \tag{73.2}$$

i.e., trocamos x por y, y por z e z por x, na solução dada previamente para u_1 e igualamos a u_2 o resultado desta transformação. Repetimos esta regra em u_2 e igualamos a u_3 o resultado da transformação. Restará obter a pressão p ou então, caso ela também tenha sido dada, verificar se as variáveis $u_1,\ u_2,\ u_3,\ p$ realmente satisfazem o sistema original, procedendo a ajustes caso seja necessário.

É de se esperar ainda que p seja simétrica em relação às variáveis x, y e z, ou seja,

$$p(x,y,z,t) = p(y,z,x,t) = p(z,x,y,t). \tag{74}$$

Claro que (73) e (74) admitem implicitamente que temos simetria retangular nas condições iniciais e de contorno do sistema. Uma vez que esta simetria não ocorra, por exemplo, tenhamos outro tipo de simetria, esférica, cilíndrica, ou mesmo simetria nenhuma (caso geral), as igualdades (73) e (74) não têm necessidade de serem satisfeitas. Sendo assim, a solução para o caso em que não há simetria alguma ainda é um problema a resolver, admitindo-se que há ao menos uma solução (quando o sistema não é impossível).

§ 7 – Conclusão

À pergunta de Smale

"*Do the Navier-Stokes equations on a 3-dimensional domain Ω in $\mathbb{R}^3$ have a unique smooth solution for all time?*"

respondemos "Não".

É possível eliminar os termos não lineares em cada uma das equações do sistema (1), obedecendo-se (2) e (3), o que fornecerá infinitas soluções para a velocidade e a pressão, conforme (10) e (13), respectivamente,

$$u(x_1,x_2,x_3,t) = X(x_1+x_2+x_3)T(t)\,(1,1,-2) = X(\xi)T(t)J, \tag{75}$$
$$\xi(x) = x_1+x_2+x_3,\ J = (1,1,-2),$$

e

$$p(x,t) - p_0(t) = \int_{\xi_0}^{\xi(x)} \left(\nu \mathrm{T}\nabla^2 X - X\frac{dT}{dt} + f\right) d\xi + \theta(t), \tag{76}$$

considerando que a pressão pode variar no tempo e temos força externa.

Eliminando a variação temporal da pressão, fazendo $f = 0$ e incluindo-se a condição (4), velocidade $u^\partial(x,t)$ na fronteira $\partial\Omega$, restringimos a infinidade de velocidades, tornando-a única, dada em (40),

$$u^\partial(x,t) = u(x,t) = (cos\,\xi + sen\,\xi)\left[\left(1+\frac{1}{\nu}\right)e^{-\nu t} - \frac{1}{\nu}\right]J, \tag{77}$$
$$\xi(x) = x_1+x_2+x_3,\ J = (1,1,-2),$$

valendo

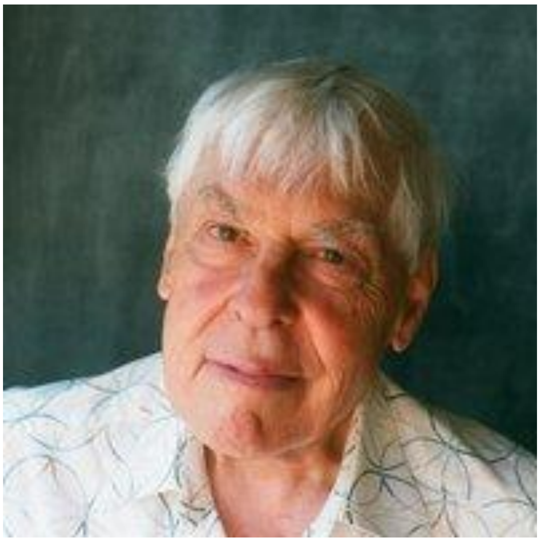
$$u^0(x) = u(x,0) = (cos\,\xi + sen\,\xi)\,J, \tag{78}$$

e onde igualamos a 1 todos os parâmetros livres, $A = B = T_0 = k = 1$, mas ainda temos infinitas soluções possíveis para a pressão, de acordo com (42),

$$p(x) - p_0 = + \int_{\xi_0}^{\xi(x)} X \, d\xi = (sen\, \xi - cos\, \xi)|_{\xi_0}^{\xi} \tag{79}$$
$$= (sen\, \xi - cos\, \xi) - (sen\, \xi_0 - cos\, \xi_0),$$
$$\xi(x) = x_1 + x_2 + x_3,$$

onde consideramos p_0 como a pressão (constante) na superfície $\xi = \xi_0$. Para garantir a unicidade deveriam ser fornecidos os valores de p_0 e ξ_0, condições que não fazem parte dos dados do problema.

Interessante perceber que não é apenas a não unicidade de soluções que encontramos, mas também verificamos na seção § 6 anterior a possibilidade de não existir solução alguma para o sistema, em especial em $t = 0$, caso neste instante o determinante contendo as derivadas $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ seja igual a zero e um ou dois dos determinantes $\det U_1, \det U_2, \det U_3$ também sejam iguais a zero. Estes determinantes $\det U_i$ dependem de $\frac{\partial p}{\partial x_i}$ e $\frac{\partial u_i}{\partial t}$, portanto não poderão ser quaisquer valores da pressão e velocidade que tornarão o sistema univocamente bem determinado (de fato, esta afirmação é válida para qualquer que seja o valor de t). Vimos situação semelhante na equação (7) da seção § 1, relacionada à pressão ser uma função potencial para φ, i.e., φ ser uma função gradiente[5].



Referências

[1] Smale, Steve, *Mathematical Problems for the Next Century*, Mathematical Intelligencer **20** (2): 7-15 (1998). A status of these problems maybe encountered in https://en.wikipedia.org/wiki/Smale%27s_problems.

[2] Hilbert, David, *Mathematical Problems - Lecture delivered before the International Congress of Mathematicians at Paris in 1900*, http://www.clarku.edu/~djoyce/hilbert/. The status of these 23 problems maybe encountered in https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_problems.

[3] Godoi, Valdir M.S., *Solving the 15th Problem of Smale: Navier-Stokes equations*, in http://vixra.org/abs/1507.0022 (2015).

[4] Fefferman, Charles L., *Existence and Smoothness of the Navier-Stokes Equation*, in http://www.claymath.org/sites/default/files/navierstokes.pdf (2000).

[5] Apostol, Tom M., *Calculus*, vol. II., chap. 10. New York: John Wiley & Sons (1969).

[6] Godoi, Valdir M.S., *Breakdown of Navier-Stokes Solutions*, available in http://vixra.org/abs/1505.0083 (2015, 2016).

[7] Godoi, Valdir M.S., *Three Examples of Unbounded Energy for* $t > 0$, available in http://vixra.org/abs/1602.0246 (2016).

[8] Leray, Jean, *Sur Le Mouvement d'un Liquide Visqueux Emplissant L'Espace*, Acta Mathematica **63**, 193-248 (1934).

[9] Ladyzhenskaya, Olga A., *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*. New York: Gordon and Breach Science Publishers (1969).

[10] Kreiss, Heinz-Otto, and Lorenz, Jens, *Initial-Boundary Value Problems and the Navier-Stokes Equations*. San Diego: Academic Press Inc. (1989).