Pi Formulas , Part 15

Edgar Valdebenito

abstract

In this note we show some formulas related with the constant Pi

Número Pi , Sucesiones , Arcotangentes

EDGAR VALDEBENITO

martes, 08 de septiembre de 2015

Resumen. En esta nota mostramos algunas fórmulas del tipo arcotangente para la constante Pi:

$$\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)^{-1} = 3.14159265...$$

Introducción y Fórmulas

1. Sea $q_n \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$ la sucesión definida como sigue:

$$q_n = \{1,1,3,7,13,27,53,107,213,425,...\} \tag{1}$$

La sucesión q_n se obtiene por el siguiente proceso:

$$\begin{gathered} f(x,n) = x^2 + 2^{n+1}x - 2^{2n} \\ g(x,y) = \frac{x+y}{2} \\ a_1 = 0, b_1 = 1 \\ n = 1...NMax \\ q_n = Numerador\ de\ g(a_n, b_n) \\ f(q_n, n) < 0 \Rightarrow a_{n+1} = q_n/2^n \wedge b_{n+1} = b_n \\ f(q_n, n) > 0 \Rightarrow a_{n+1} = a_n \wedge b_{n+1} = q_n/2^n \end{gathered} \tag{2}$$

donde $NMax$ es el número máximo de iteraciones.

Es válida la siguiente fórmula:

$$\pi = 8\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) - 8\sum_{n=1}^{\infty}\tan^{-1}\left(\frac{2^n w_n}{2^{2n+1} + q_n q_{n+1}}\right) \tag{3}$$

donde

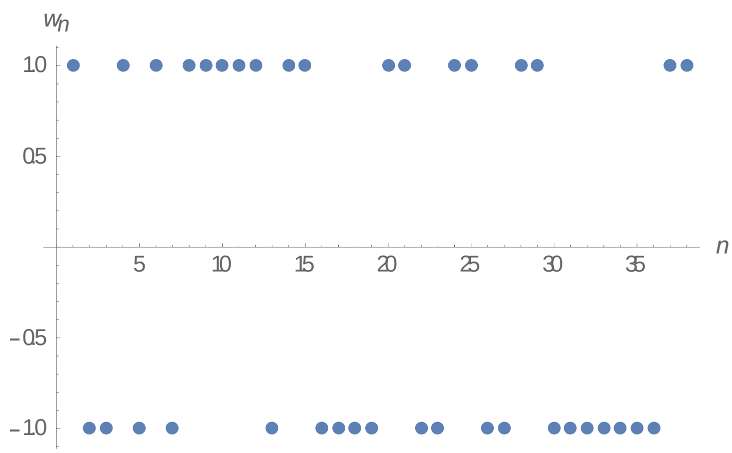
$$w_n = 2q_n - q_{n+1} = \pm 1, n \in \mathbb{N} \tag{4}$$

Sea

$$h_n = \frac{2^n w_n}{2^{2n+1} + q_n q_{n+1}} \tag{5}$$

Se tiene:

$$h_n = \left\{ \frac{2}{9}, -\frac{4}{35}, -\frac{8}{149}, \frac{16}{603}, -\frac{32}{2399}, \frac{64}{9623}, -\frac{128}{38439}, \ldots \right\} \tag{6}$$



2. Sea $q_n \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$ la sucesión definida como sigue:

$$q_n = \{1,1,3,5,9,17,35,69,137,275,\ldots\} \tag{7}$$

La sucesión q_n se obtiene por el siguiente proceso:

$$\begin{gathered} f(x,n) = x^2 - 2^{n+2} x + 2^{2n} \\ g(x,y) = \frac{x+y}{2} \\ a_1 = 0, b_1 = 1 \\ n = 1 \ldots NMax \\ q_n = Numerador\ de\ g(a_n, b_n) \\ f(q_n, n) > 0 \Rightarrow a_{n+1} = q_n / 2^n \wedge b_{n+1} = b_n \\ f(q_n, n) < 0 \Rightarrow a_{n+1} = a_n \wedge b_{n+1} = q_n / 2^n \end{gathered} \tag{8}$$

donde $NMax$ es el número máximo de iteraciones.

Es válida la siguiente fórmula:

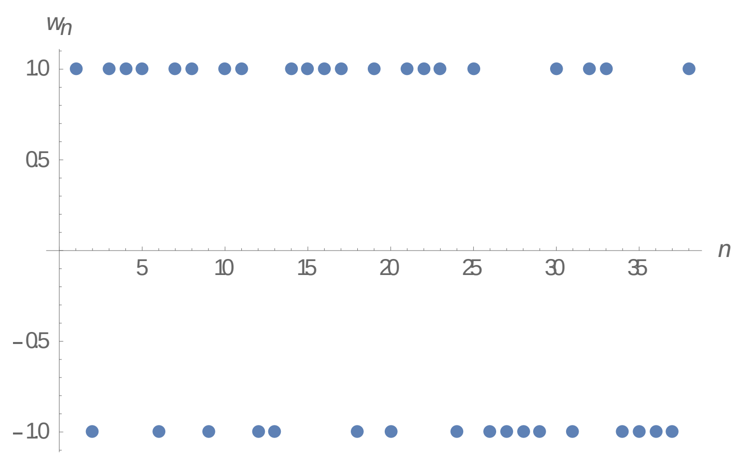
$$\pi = 12\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) - 12\sum_{n=1}^{\infty}\tan^{-1}\left(\frac{2^n w_n}{2^{2n+1} + q_n\, q_{n+1}}\right) \tag{9}$$

donde

$$w_n = 2q_n - q_{n+1} = \pm 1\,, n \in \mathbb{N} \tag{10}$$

y h_n se define como en (5):

$$h_n = \left\{\frac{2}{9}, -\frac{4}{35}, \frac{8}{143}, \frac{16}{557}, \frac{32}{2201}, -\frac{64}{8787}, \frac{128}{35183}, \ldots\right\} \tag{11}$$



3. Sea $q_n \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$ la sucesión definida como sigue:

$$q_n = \{1, 3, 5, 9, 19, 37, 73, 147, 295, 591, \ldots\} \tag{12}$$

La sucesión q_n se obtiene por el siguiente proceso:

$$
\begin{gathered}
f(x,n) = 3x^2 - 2^{2n} \\
g(x,y) = \frac{x+y}{2} \\
a_1 = 0, b_1 = 1 \\
n = 1 \ldots NMax \\
q_n = Numerador\ de\ g(a_n, b_n) \\
f(q_n, n) < 0 \Rightarrow a_{n+1} = q_n / 2^n \wedge b_{n+1} = b_n \\
f(q_n, n) > 0 \Rightarrow a_{n+1} = a_n \wedge b_{n+1} = q_n / 2^n
\end{gathered} \tag{13}
$$

donde $NMax$ es el número máximo de iteraciones.

Es válida la siguiente fórmula:

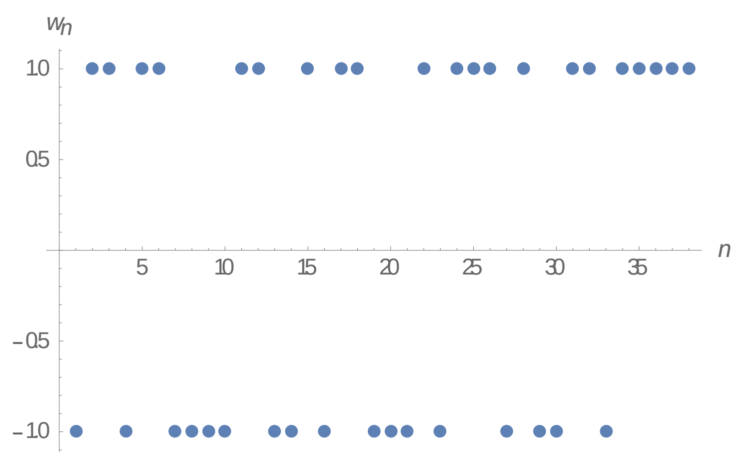
$$
\pi = 6\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) - 6\sum_{n=1}^{\infty}\tan^{-1}\left(\frac{2^n w_n}{2^{2n+1} + q_n q_{n+1}}\right) \tag{14}
$$

donde

$$
w_n = 2q_n - q_{n+1} = \pm 1, n \in \mathbb{N} \tag{15}
$$

y h_n se define como en (5):

$$
h_n = \left\{-\frac{2}{11}, \frac{4}{47}, \frac{8}{173}, -\frac{16}{683}, \frac{32}{2751}, \frac{64}{10893}, -\frac{128}{43499}, \ldots\right\} \tag{16}
$$



Referencias

[1] Abramowitz, M., and Stegun, I.A.: Handbook of Mathematical Functions. Nueva York: Dover , 1965.

[2] Boros, G., Moll, V.: Irresistible Integrals.Cambridge University Press,2004.

[3] Gradshteyn, I.S., and Ryzhik, I.M.: Table of Integrals,Series and Products. 5^{th} ed.,ed. Alan Jeffrey. Academic Press, 1994.

[4] Spiegel,M.R.: Mathematical Handbook, McGraw-Hill Book Company , New York , 1968.

[5] Valdebenito, E.: Pi Handbook , manuscript , unpublished , 1989 , (20000 formulas).