

---

Хмельник С. И.

# Электромагнитная волна в проводе переменного тока

## Аннотация

Предлагается решение уравнений Максвелла для провода переменного тока. Рассматривается структура токов и потоков энергии.

## Оглавление

1. Введение
  2. Решение системы уравнений Максвелла
  3. Напряженности и токи в проводе
  4. Потоки энергии
  5. Ток и поток энергии в проводе
  6. Обсуждение
- Приложение 1  
Литература

## 1. Вступление

В [1] дано непротиворечивое решение уравнений Максвелла для вакуума. Ниже предлагается аналогичное решение уравнений Максвелла для провода переменного тока.

Уравнения Максвелла в общем случае в системе СГС имеют вид [2]:

$$\operatorname{rot}(E) + \frac{\mu}{c} \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot}(H) - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} J = 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{div}(E) = 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{div}(H) = 0, \quad (4)$$

$$J = \frac{1}{\rho} E, \quad (5)$$

где

$J$ ,  $H$ ,  $E$  - ток проводимости, магнитная и электрическая напряженности соответственно,

$\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\rho$  - диэлектрическая проницаемость, магнитная проницаемость, удельное сопротивление материала провода.

Далее эти уравнения применяются для анализа структуры переменного тока в проводе. При синусоидальном токе в проводе с удельной индуктивностью  $L$  и удельным сопротивлением  $\rho$  напряженность и ток связаны соотношением вида

$$J = \frac{1}{\rho + i\omega L} E = \frac{\rho - i\omega L}{\rho^2 + (\omega L)^2} E.$$

Отсюда при  $\rho \ll \omega L$  находим:

$$I \approx \frac{-i}{\omega L} E.$$

Следовательно, для анализа структуры синусоидального тока в проводе при достаточно высокой частоте условием (5) можно пренебрегать.

## 2. Решение системы уравнений Максвелла

Рассмотрим решение системы уравнений Максвелла (1.1-1.4) для провода. В системе цилиндрических координат  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  эти уравнения имеют вид [3]:

$$\frac{E_r}{r} + \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = v \frac{dH_r}{dt}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = v \frac{dH_\varphi}{dt}, \quad (3)$$

$$\frac{E_\varphi}{r} + \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} = v \frac{dH_z}{dt}, \quad (4)$$

$$\frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = q \frac{dE_r}{dt} \quad (6)$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = q \frac{dE_\varphi}{dt}, \quad (7)$$

$$\frac{H_\varphi}{r} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = q \frac{dE_z}{dt} + \frac{4\pi}{c} J_z. \quad (8)$$

где

$$v = -\frac{\mu}{c}, \quad (9)$$

$$q = \frac{\varepsilon}{c}, \quad (10)$$

Далее рассматривается только монохроматическое решение. Для сокращения записи в дальнейшем будем применять следующие обозначения:

$$co = \cos(\alpha\varphi + \chi z + \omega t), \quad (11)$$

$$si = \sin(\alpha\varphi + \chi z + \omega t), \quad (12)$$

где  $\alpha$ ,  $\chi$ ,  $\omega$  – некоторые константы.

Представим неизвестные функции в следующем виде:

$$H_r \cdot = h_r(r)co, \quad (13)$$

$$H_\varphi \cdot = h_\varphi(r)si, \quad (14)$$

$$H_z \cdot = h_z(r)si, \quad (15)$$

$$E_r \cdot = e_r(r)si, \quad (16)$$

$$E_\varphi \cdot = e_\varphi(r)co, \quad (17)$$

$$E_z \cdot = e_z(r)co, \quad (18)$$

$$J_r \cdot = j_r(r)co, \quad (19)$$

$$J_\varphi \cdot = j_\varphi(r)si, \quad (20)$$

$$J_z \cdot = j_z(r)si, \quad (21)$$

где  $h(r)$ ,  $e(r)$ ,  $j(r)$  - некоторые функции координаты  $r$ .

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что функции (13-21) преобразуют систему уравнений (1-8) с тремя аргументами  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  в систему уравнений с одним аргументом  $r$  и неизвестными функциями  $h(r)$ ,  $e(r)$ ,  $j(r)$ .

Далее предполагается, что существует только ток (21), направленный вдоль оси  $Z$ . Этот ток создается внешним источником. Показывается, что наличие этого тока является причиной существования электромагнитной волны в проводе.

В приложении 1 показано, что у системы (1.1-1.4) при условиях (13-21) существует решение, имеющее следующий вид:

$$e_\varphi(r) = Ar^{\alpha-1}, \quad (22)$$

$$e_r(r) = e_\varphi(r), \quad (23)$$

$$e_z(r) = \frac{2\chi r}{\alpha} e_\varphi(r), \quad (24)$$

$$h_r(r) = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} e_\varphi(r), \quad (25)$$

$$h_\varphi(r) = -h_r(r), \quad (26)$$

$$h_z(r) = 0, \quad (27)$$

$$j_z(r) \approx \frac{c}{4\pi} \left( \left( \frac{r}{\alpha} - \frac{\alpha}{r} \right) \right) h_r(r), \quad (28)$$

где  $A, c, \alpha, \omega$  – константы.

Сравним решение это решение, и решение, полученное в [1] для вакуума – см. табл. 1. Видно, что (несмотря на идентичность уравнений) эти решения существенно отличаются. Эти различия вызваны наличием внешней электродвижущей силы, в которой  $e_z(r) \neq 0$ . Она вызывает продольный ток смещения, который существенно изменяет структуру электромагнитной волны.

Таблица 1.

	Вакуум	Провод
$j_z$	<b>0</b>	$\frac{c}{4\pi} \left( \left( \frac{r}{\alpha} - \frac{\alpha}{r} \right) \right) h_r(r)$
$e_r$	$Ar^{\alpha-1}$	$Ar^{\alpha-1}$
$e_\varphi$		
$e_z$	<b>0</b>	$\frac{2\chi r}{\alpha} e_\varphi(r)$
$h_r$	$-e_\varphi(r)$	$-\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} e_\varphi(r)$
$h_\varphi$	$-h_r(r)$	$-h_r(r)$
$h_z$	<b>0</b>	<b>0</b>

### 3. Напряженности и токи в проводе

Далее мы будем рассматривать только функции  $j_z(r)$ ,  $e_r(r)$ ,  $e_\varphi(r)$ ,  $e_z(r)$ ,  $h_r(r)$ ,  $h_\varphi(r)$ ,  $h_z(r)$ . Все величины приводятся в системе СГС.

На рис. 1 показаны, например, графики этих функций при  $A = 10^{10}$ ,  $\alpha = 12.8$ ,  $\mu = 1$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\omega = 300$ . Величина  $j_z(r)$  показана в единицах  $(A/мм^2)$  – в отличие от всех остальных величин, показанных в системе СГС. Увеличение функции  $j_z(r)$  при увеличении радиуса объясняет скин-эффект.

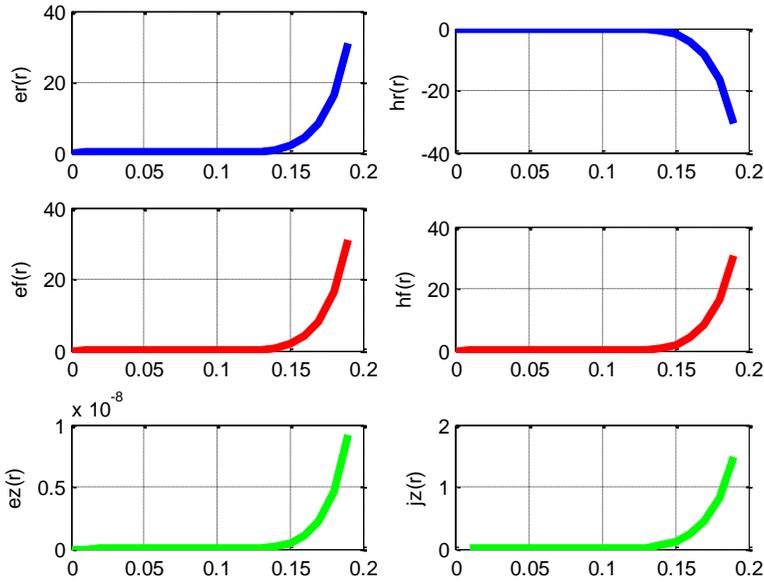


Fig.1. (SSMB)

Плотность энергии электромагнитной волны

$$W = E^2 + H^2 = (e_r(r)si)^2 + (e_\phi(r)si)^2 + (h_r(r)co)^2 + (h_\phi(r)co)^2$$

или

$$W = (e_r(r))^2 + (e_\phi(r))^2 \tag{1}$$

- см. также рис. 1. Таким образом, плотность энергии электромагнитной волны постоянна на всех точках окружности данного радиуса.

На рис. 2 для демонстрации сдвига фаз между компонентами волны показаны функции

$$co = \cos(\alpha\varphi + \chi z + \omega t), \quad si = \sin(\alpha\varphi + \chi z + \omega t)$$

или эквивалентные им при  $z = ct$  функции

$$co = \cos\left(\alpha\varphi + \frac{2\omega}{c} z\right), \quad si = \sin\left(\alpha\varphi + \frac{2\omega}{c} z\right). \tag{2}$$

При  $\varphi = 0$ ,  $2\omega/c = 0.1$  эти функции принимают вид  $co = \cos(z)$ ,  $si = \sin(z)$  и показаны на рис. 2.

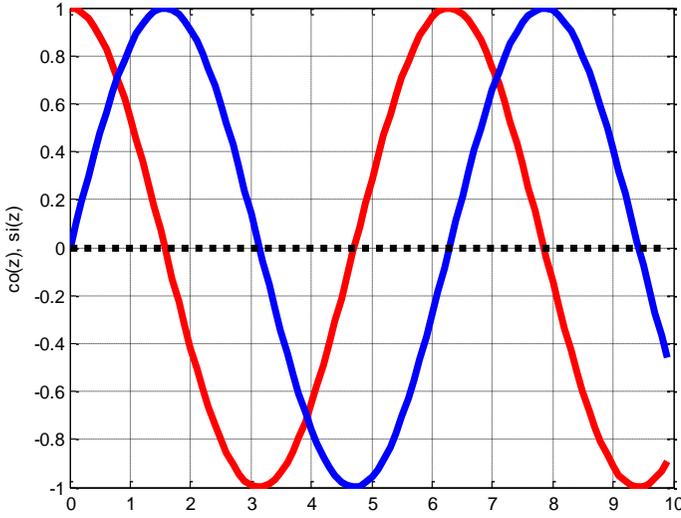


Fig.2. (SSMB)

Найдем среднее значение плотности амплитуды тока в проводе с радиусом R:

$$\overline{J_z} = \frac{1}{\pi R^2} \iint_{r, \varphi} [J_z] dr \cdot d\varphi. \quad (5)$$

С учетом (2.21) найдем:

$$\overline{J_z} = \frac{1}{\pi R^2} \iint_{r, \varphi} [j_z(r) si] dr \cdot d\varphi = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R j_z(r) \left( \int_0^{2\pi} (si \cdot d\varphi) \right) dr.$$

С учетом (2) найдем:

$$\overline{J_z} = \frac{1}{\alpha \pi R^2} \int_0^R j_z(r) \left( \cos(2\alpha\pi + \frac{2\omega}{c} z) - \cos(\frac{2\omega}{c} z) \right) dr$$

или

$$\overline{J_z} = \frac{1}{\alpha \pi R^2} (\cos(2\alpha\pi) - 1) \cdot J_{zr}, \quad (6)$$

где

$$J_{zr} = \int_0^R j_z(r) dr. \quad (7)$$

С учетом (2.22, 2.25, 2.28) найдем:

$$j_z(r) = \frac{Ac}{4\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left( \left( \alpha \cdot r^{\alpha-2} - \frac{r^\alpha}{\alpha} \right) \right), \quad (8)$$

$$J_{zr} = \frac{Ac}{4\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \int_0^R \left( \alpha \cdot r^{\alpha-2} - \frac{r^\alpha}{\alpha} \right) dr \quad (9)$$

ИЛИ

$$J_{zr} = \frac{Ac}{4\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left( \frac{\alpha}{\alpha-1} R^{\alpha-1} - \frac{1}{\alpha(\alpha+1)} R^{\alpha+1} \right). \quad (10)$$

На рис. 3 показана функция  $\overline{J_z}(\alpha)$  (6, 10) при  $A=1$ . На этом рисунке пунктирная и сплошная кривые относятся соответственно к  $R=2$  и  $R=1$ . Из (6, 8) и рис. 3 следует, что при определенном распределении величины  $j_z(r)$  среднее значение плотности амплитуды тока  $\overline{J_z}$  существенно зависит от  $\alpha$ .

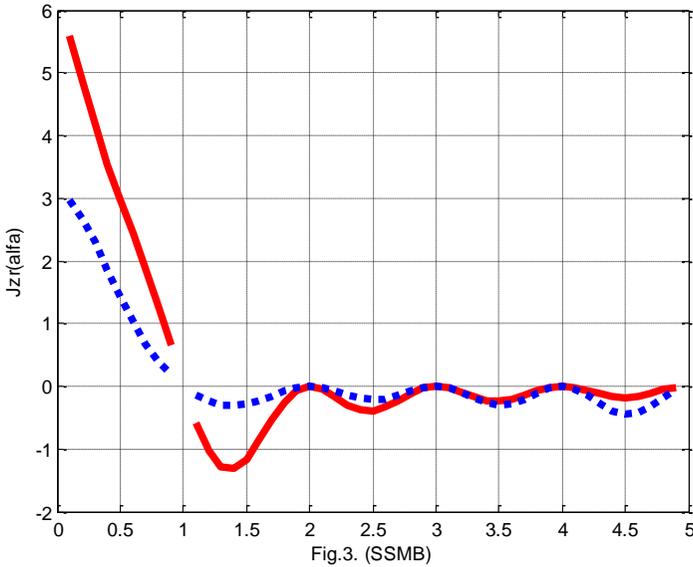


Fig.3. (SSMB)

Ток смещения определяется как

$$J = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E}{\partial t}, \quad (9)$$

или, с учетом (2.13-2.21):

$$J_{r\cdot} = \frac{\varepsilon\omega}{c} e_r(r) \cos, \quad (10)$$

$$J_{\varphi\cdot} = \frac{\varepsilon\omega}{c} e_\varphi(r) \sin, \quad (11)$$

$$J_{z\cdot} = \left( \frac{\varepsilon\omega}{c} e_z(r) + j_z \right) \sin. \quad (12)$$

Отвлекаясь от споров о природе тока смещения, можно говорить о линиях этого тока. Так, например, ток  $J_z$  течет по прямым, параллельным оси провода. Мы рассмотрим линию суммарного тока.

Можно полагать, что скорость распространения тока смещения не зависит от направления тока. В частности, при фиксированном радиусе путь, пройденный током по окружности, и путь, пройденный им по вертикали будут равны. Следовательно, при фиксированном радиусе можно полагать, что  $\Delta\varphi \equiv \Delta z$ . На основе этого предположения можно построить траекторию тока в соответствии с функциями (2).

На рис. 4 показаны две винтовые линии при  $\Delta\varphi = \Delta z$ , описываемые функциями (2) вида

$$co = \cos((\alpha + 2)\varphi), \quad si = \sin((\alpha + 2)\varphi).$$

На рис. 4 толстая линия построена при  $\alpha = 1.8$ , а тонкая линия - при  $\alpha = 2.5$ .

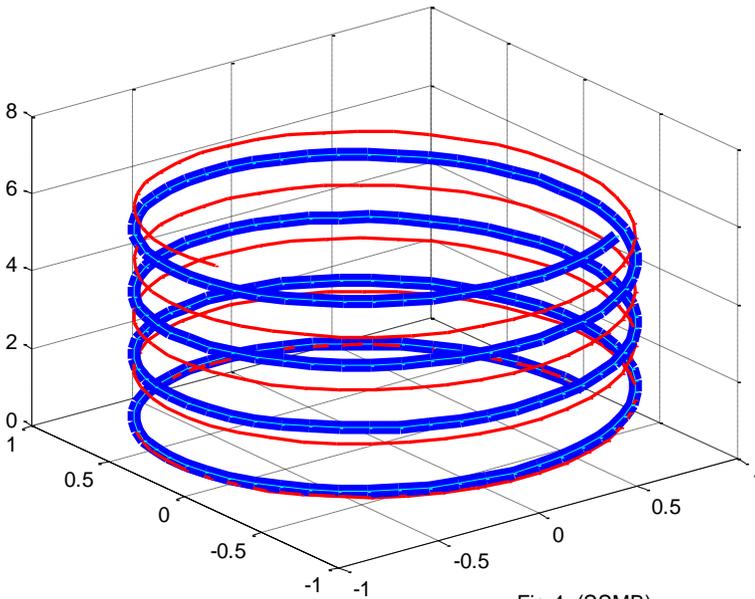


Fig.4. (SSMB)

## 4. Потoki энергии

Плотность потока электромагнитной энергии – вектор Пойнтинга определяется формулой

$$S = \eta E \times H, \tag{1}$$

где

$$\eta = c/4\pi. \quad (2)$$

В цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$  плотность потока электромагнитной энергии имеет три компоненты  $S_r, S_\varphi, S_z$ , направленные вдоль радиуса, по окружности, вдоль оси соответственно. Они определяются по формуле

$$S = \begin{bmatrix} S_r \\ S_\varphi \\ S_z \end{bmatrix} = \eta(E \times H) = \eta \begin{bmatrix} E_\varphi H_z - E_z H_\varphi \\ E_z H_r - E_r H_z \\ E_r H_\varphi - E_\varphi H_r \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Из (2.13-2.18) следует, что поток, проходящий через данное сечение провода в данный момент времени,

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} \bar{S}_r \\ \bar{S}_\varphi \\ \bar{S}_z \end{bmatrix} = \eta \iint_{r,\varphi} \begin{bmatrix} s_r \cdot si^2 \\ s_\varphi \cdot si \cdot co \\ s_z \cdot si \cdot co \end{bmatrix} dr \cdot d\varphi. \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} s_r &= (e_\varphi h_z - e_z h_\varphi) \\ s_\varphi &= (e_z h_r - e_r h_z) \\ s_z &= (e_r h_\varphi - e_\varphi h_r) \end{aligned} \quad (6)$$

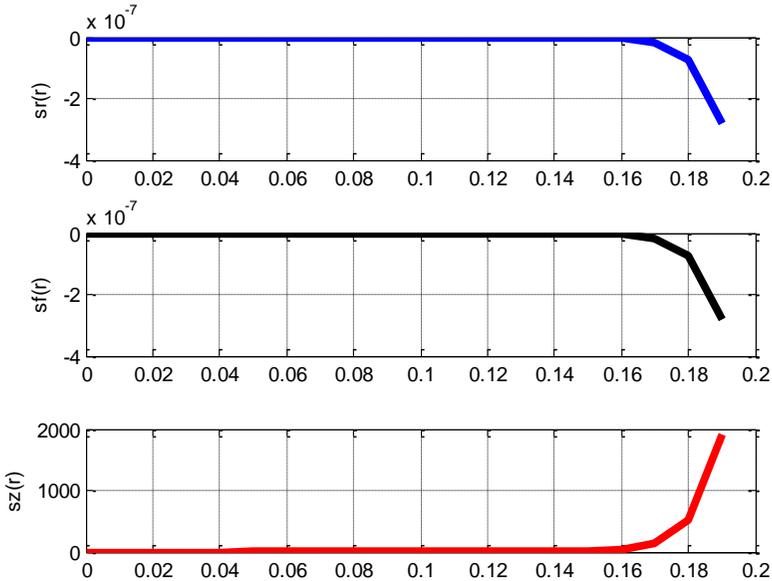


Fig.5. (SSMB)

Этим величинам равна плотность того потока энергии, который при данном радиусе распространяется по радиусу, по окружности и вдоль оси OZ соответственно. На рис. 5 показаны графики этих функций в зависимости от радиуса при  $A = 10^{10}$ ,  $\alpha = 12.8$ ,  $\mu = 1$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\omega = 300$ .

Поток энергии вдоль оси OZ и равен

$$\bar{S} = \bar{S}_z = \eta \iint_{r,\varphi} [s_z \cdot si \cdot co] dr \cdot d\varphi. \quad (7)$$

Найдем  $s_z$ . Из (6, 2.22, 2.23, 2.26) получаем:

$$s_z = -2e_\varphi h_r = 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} e_\varphi^2 \quad (9)$$

или

$$s_z = Qr^{2\alpha-2}, \quad (10)$$

где

$$Q = 2A^2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \quad (11)$$

В приложении 2 статьи [1] показано, что из (7) следует, что

$$\bar{S} = \frac{c}{16\alpha\pi} (1 - \cos(4\alpha\pi)) \int_r (s_z(r) dr). \quad (12)$$

Пусть  $R$  – радиус цилиндрического провода. Тогда из (12) получаем, как в [1],

$$S_{\text{int}} = \int_{r=0}^R (s_z(r) dr) = \frac{Q}{2\alpha-1} R^{2\alpha-1}, \quad (13)$$

$$S_{\text{alfa}} = \frac{1}{\alpha} (1 - \cos(4\alpha\pi)), \quad (14)$$

$$\bar{S} = \frac{c}{16\pi} S_{\text{alfa}} S_{\text{int}}. \quad (15)$$

Этот поток энергии не зависит от координаты и потому сохраняет свое значение на протяжении всего провода.

На рис. 7 показана функция  $\bar{S}(\alpha)$  (15) при  $Q = 1$ . На рис. 7 пунктирная и сплошная кривые относятся соответственно к  $R = 2$  и  $R = 1.8$ .

Поскольку поток энергии и энергия связаны соотношением  $S = W \cdot c$ , то из (15) можно найти энергию в единице длины провода:

$$\bar{W} = \frac{A}{16\pi} S_{\alpha} S_{\text{int}}. \quad (17)$$

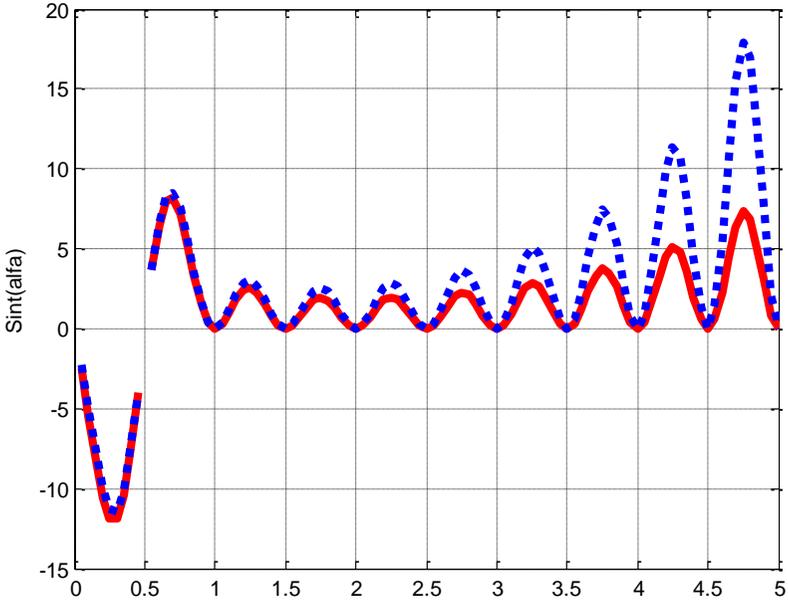


Fig.7. (SSMB)

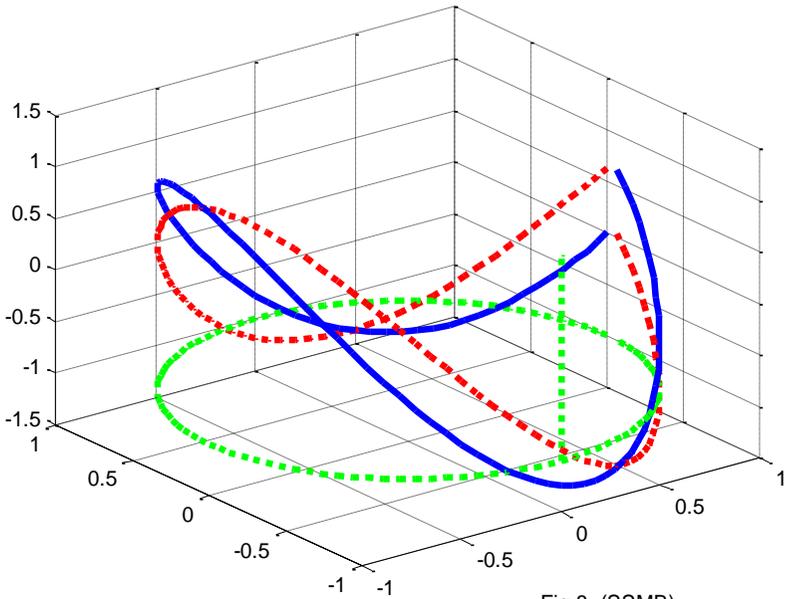


Fig.8. (SSMB)

Как следует из (7, 3.2) плотность потока энергии на окружности данного радиуса определяется функцией вида

$$\bar{S}_{rz} = s_z \sin(2\alpha\varphi + 4\omega z/c). \quad (18)$$

На рис. 8 показаны функции (18) при  $A=1$ ,  $\alpha=1.8$ ,  $r=1$  и двух значениях второго слагаемого: 0 и 0.5 – см. сплошную и пунктирную линии соответственно.

На рис. 9 показаны функции (18) на всей плоскости сечения волны при  $R=19$ ,  $A=1$ ,  $\alpha=1.8$  и различных значениях второго слагаемого – на рис. 9 эти значения указаны параметром  $d$

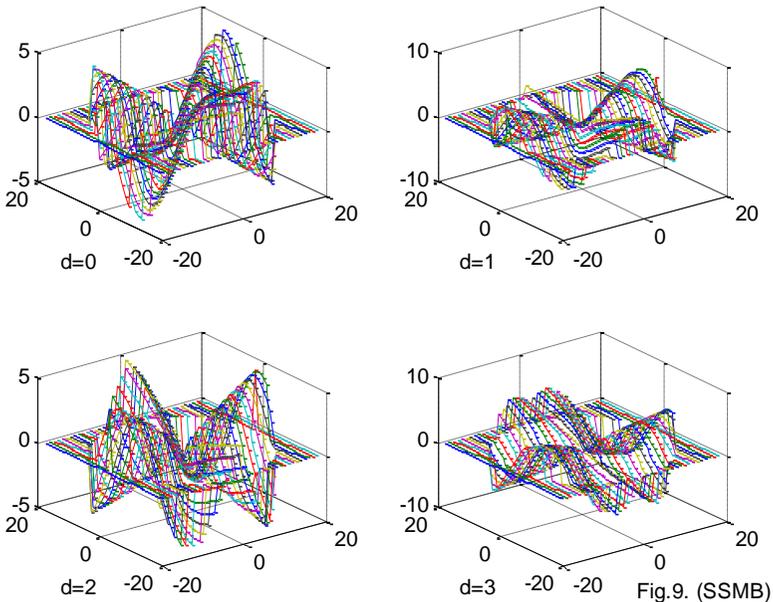


Fig.9. (SSMB)

Отсюда следует, что

- плотность потока неравномерно распределена по сечению потока – существует картина распределения плотности потока по сечению провода;
- эта картина вращается при перемещении по оси  $OZ$ ;
- поток энергии (15), проходящий через площадь сечения, не зависит от  $t$ ,  $z$  и это соответствует закону сохранения энергии.

## 5. Ток и поток энергии в проводе

Можно сказать, что поток массовых частиц (массовый ток) "несёт" поток кинетической энергии, которая выделяется при столкновении с преградой. Точно также электрический ток "несёт" поток электромагнитной энергии, которая выделяется в нагрузке. Это утверждение обсуждается и обосновывается в [4-9]. Отличие между этими двумя случаями состоит в том, что величина массового тока полностью определяет величину кинетической энергии. Однако во втором случае величина электрического тока НЕ определяет величину электромагнитной энергии, которая выделяется в нагрузке. Следовательно, переносимая величина электромагнитной энергии – поток энергии определяется структурой тока. Покажем это.

Как следует из (3.10), среднее значение плотности амплитуды тока  $\overline{J_z}$  в проводе с данным радиусом R зависит от двух параметров:  $\alpha$  и A. При данной плотности можно найти зависимость между этими параметрами, которая следует из (3.10):

$$A = 4\pi J_{zr} / c \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \left( \frac{\alpha}{\alpha-1} R^{\alpha-1} - \frac{1}{\alpha(\alpha+1)} R^{\alpha+1} \right). \quad (1)$$

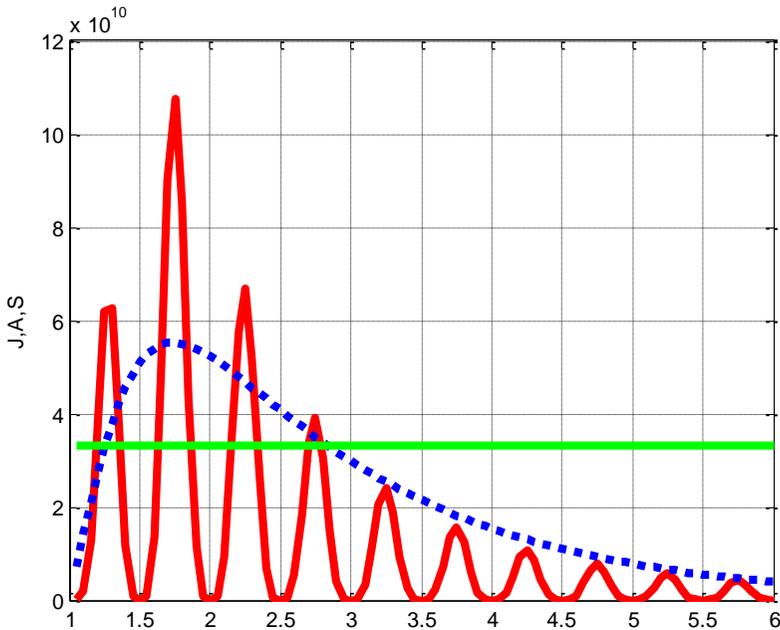


Fig.10. (SSMB)

Как следует из (4.15), плотность потока энергии вдоль провода также зависит от двух параметров:  $\alpha$  и  $A$ . На рис. 10 показаны зависимости (1) и (3.15) при данных  $\overline{J_z} = 1A$ ,  $R = 2$ . При этом прямая линия изображает постоянную плотность тока, сплошная линия – плотность потока, пунктирная линия – параметр  $A$  в масштабе ( $A \cdot 10^{10}$ ). Видно, что при одной и той же плотности тока плотность потока может принимать совершенно различные значения.

## 6. Обсуждение

Показано, что в проводе переменного тока распространяется электромагнитная волна, а математическое описание этой волны является решение уравнений Максвелла.

Это решение во многом совпадает с тем, которое ранее найдено для электромагнитной волны, распространяющейся в вакууме [1].

Оказалось, что ток распространяется в проводе по спиральной траектории, а плотность спирали зависит от плотности потока электромагнитной энергии, передаваемой по проводу в нагрузку, т.е. от передаваемой мощности. При этом основной поток энергии распространяется вдоль и внутри провода.

## Приложение 1.

Рассматривается решение уравнений (2.1-2.8) в виде функций (2.13-2.21). Далее производные по  $r$  будем обозначать штрихами. Перепишем уравнения (2.1-2.8) с учетом (2.11, 2.12) в виде

$$\frac{e_r(r)}{r} + e'_r(r) - \frac{e_\varphi(r)}{r} \alpha - \chi \cdot e_z(r) = 0, \quad (1)$$

$$-\frac{1}{r} \cdot e_z(r) \alpha + e_\varphi(r) \chi + \frac{\mu\omega}{c} h_r = 0, \quad (2)$$

$$e_r(r) \chi - e'_z(r) - \frac{\mu\omega}{c} h_\varphi = 0, \quad (3)$$

$$\frac{e_\varphi(r)}{r} + e'_\varphi(r) - \frac{e_r(r)}{r} \cdot \alpha - \frac{\mu\omega}{c} h_z = 0, \quad (4)$$

$$\frac{h_r(r)}{r} + h'_r(r) + \frac{h_\varphi(r)}{r} \alpha + \chi \cdot h_z(r) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} \cdot h_z(r) \alpha - h_\varphi(r) \chi - \frac{\varepsilon\omega}{c} e_r = 0, \quad (6)$$

$$-h_r(r)\chi - h'_z(r) + \frac{\varepsilon\omega}{c}e_\varphi = 0, \quad (7)$$

$$\frac{h_\varphi(r)}{r} + h'_\varphi(r) + \frac{h_r(r)}{r} \cdot \alpha + \frac{\varepsilon\omega}{c}e_z(r) = \frac{4\pi}{c}j_z(r), \quad (8)$$

Умножим (5) на  $\left(-\frac{\mu\omega}{c\chi}\right)$ . Тогда получим:

$$-\frac{\mu\omega}{c\chi} \frac{h_r(r)}{r} - \frac{\mu\omega}{c\chi} h'_r(r) - \frac{\mu\omega}{c\chi} \frac{h_\varphi(r)}{r} \alpha - \frac{\mu\omega}{c} h_z(r) = 0. \quad (9)$$

Сравнивая (4) и (9), замечаем, что они совпадают, если

$$\frac{\mu \cdot \omega}{c\chi} h_\varphi(r) = e_r(r), \quad (10)$$

$$-\frac{\mu \cdot \omega}{c\chi} h_r(r) = e_\varphi(r). \quad (11)$$

Перепишем (2, 3, 6, 7) в виде:

$$e_z(r) = \frac{\chi r}{\alpha} e_\varphi(r) + \frac{r}{\alpha} \frac{\mu\omega}{c} h_r(r), \quad (12)$$

$$e'_z(r) = e_r(r)\chi - \frac{\mu\omega}{c} h_\varphi(r), \quad (13)$$

$$h_z(r) = \frac{\chi r}{\alpha} h_\varphi(r) + \frac{r}{\alpha} \frac{\varepsilon \cdot \omega}{c} e_r(r), \quad (14)$$

$$h'_z(r) = -h_r(r)\chi + \frac{\varepsilon \cdot \omega}{c} e_\varphi(r), \quad (15)$$

Подставим (10, 11) в эти уравнения. Тогда получим:

$$e_z(r) = 2 \frac{r}{\alpha} \frac{\mu\omega}{c} h_r(r), \quad (16)$$

$$e'_z(r) = -2 \frac{\mu\omega}{c} h_\varphi(r), \quad (17)$$

$$h_z(r) = \left( \frac{\chi r}{\alpha} - \frac{r}{\alpha} \frac{\varepsilon \cdot \omega}{c} \frac{\mu \cdot \omega}{c\chi} \right) h_\varphi(r) = \frac{r}{\alpha c^2 \chi} (c^2 \chi^2 - \varepsilon \mu \omega^2) h_\varphi(r), \quad (18)$$

$$h'_z(r) = \left( -\chi + \frac{\varepsilon \cdot \omega}{c} \frac{\mu \cdot \omega}{c\chi} \right) h_r(r) = \frac{-1}{c^2 \chi} (c^2 \chi^2 - \varepsilon \mu \omega^2) h_r(r), \quad (19)$$

Из (16, 17) находим:

$$\frac{2\mu\omega}{\alpha c} (r h_r(r))' = -\frac{2\mu\omega}{c} h_\varphi(r)$$

ИЛИ

$$h_\varphi(r) = \frac{-1}{\alpha}(h_r(r) + r \cdot h'_r(r)) \quad (20)$$

Из (20, 10, 11) находим:

$$e_r(r) = \frac{1}{\alpha}(e_\varphi(r) + r \cdot e'_{\varphi_r}(r)) \quad (21)$$

Из (16, 11) находим:

$$e_z(r) = 2 \frac{r}{\alpha} \frac{\mu\omega}{c} h_r(r) = 2\chi \frac{r}{\alpha} e_\varphi(r) \quad (22)$$

Из (1, 22) находим:

$$e_\varphi(r) = (e_r(r) + r \cdot e'_r(r)) / \left( \alpha + 2\chi^2 \frac{r^2}{\alpha} \right). \quad (23)$$

Из (23, 21) находим:

$$e''_\varphi(r) = \left( 2\chi^2 + \frac{\alpha^2 - 1}{r^2} \right) e_\varphi(r) - \frac{3}{r} e'_{\varphi_r}(r). \quad (24)$$

Из этого уравнения можно найти  $e_\varphi(r)$ , а при известном  $e_\varphi(r)$  определить все остальные функции. Из (21, 10, 11, 16, 18, 8) находим соответственно:

$$e_r(r) = \frac{1}{\alpha}(e_\varphi(r) + r \cdot e'_\varphi(r)), \quad (25)$$

$$h_\varphi(r) = \frac{c\chi}{\mu \cdot \omega} e_r(r), \quad (26)$$

$$h_r(r) = -\frac{c\chi}{\mu \cdot \omega} e_\varphi(r). \quad (27)$$

$$e_z(r) = \frac{2\chi r}{\alpha} e_\varphi(r) \quad (28)$$

$$h_z(r) = \frac{r}{\alpha c^2 \chi} (c^2 \chi^2 - \varepsilon \mu \omega^2) h_\varphi(r), \quad (29)$$

$$j_z(r) \approx \frac{c}{4\pi} \left( \left( \frac{r}{\alpha} \left( 1 + \frac{2\varepsilon \mu \omega^2}{c^2} \right) - \frac{\alpha}{r} \right) \right) h_r(r). \quad (30)$$

Из физических соображений следует принять, что

$$h_z(r) = 0. \quad (31)$$

Тогда из (29) находим:

$$(c^2 \chi^2 - \varepsilon \mu \omega^2) = 0$$

или

$$\chi = \pm \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon \mu}. \quad (32)$$

---

При  $\omega \ll c$  отсюда находим, что

$$|\chi| \ll 1. \quad (33)$$

Тогда в уравнении (24) величиной  $\chi$  можно пренебречь и получить уравнение вида

$$e_{\varphi}''(r) = \left( \frac{\alpha^2 - 1}{r^2} \right) e_{\varphi}(r) - \frac{3}{r} e'_{\varphi}(r). \quad (34)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$e_{\varphi}(r) = Ar^{\alpha-1}, \quad (35)$$

что можно проверить подстановкой (35) в (34). Кроме того, заметим, что при  $\omega \ll c$

$$\left( 1 + \frac{2\varepsilon\mu\omega^2}{c^2} \right) \approx 1 \quad (36)$$

Подставляя (32, 33, 35, 36) в (25-30) окончательно получаем:

$$h_z(r) = 0, \quad (37)$$

$$e_{\varphi}(r) = Ar^{\alpha-1}, \quad (38)$$

$$e_r(r) = e_{\varphi}(r), \quad (39)$$

$$e_z(r) = \frac{2\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{\alpha c} r \cdot e_{\varphi}(r), \quad (40)$$

$$h_r(r) = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} e_{\varphi}(r), \quad (41)$$

$$h_{\varphi}(r) = -h_r(r), \quad (42)$$

$$j_z(r) \approx \frac{c}{4\pi} \left( \left( \frac{r}{\alpha} - \frac{\alpha}{r} \right) \right) h_r(r). \quad (43)$$

## Литература

*Примечание:* **Vixra** - viXra Funding, <http://vixra.org/funding>,  
**DNA** – Доклады независимых авторов,  
ISSN 2225-6717, <http://dna.izdatelstwo.com/>

1. Хмельник С.И. Второе решение уравнений Максвелла, ViXra, 2016-01-26, <http://vixra.org/abs/1601.0292>; DNA, № 35, 2016 - см. [здесь](#).
2. Розанов Н.Н. Специальные разделы математической физики. Часть 3. Электромагнитные волны в вакууме. ИТМО. Санкт-Петербург, 2005.

- 
3. Андре Анго. Математика для электро- и радиоинженеров, изд. «Наука», Москва, 1964, 772 с.
  4. Хмельник С.И. Математическая модель электрического торнадо, ViXra, 2015-04-11, <http://vixra.org/abs/1504.0088>; DNA, № 33, 2015, см. [здесь](#).
  5. Хмельник С.И. Вторая структура постоянного тока, ViXra, 2015-11-21, <http://vixra.org/abs/1511.0206>; DNA, № 35, 2016, см. [здесь](#).
  6. Хмельник С.И. Поток электромагнитной энергии в проводнике с переменным током, ViXra, 2015-03-10, <http://vixra.org/abs/1503.0068>;
  7. Хмельник С.И. Поток электромагнитной энергии в проводнике с постоянным током, DNA, № 32, 2015; ViXra, 2015-03-07, <http://vixra.org/abs/1503.0048>
  8. Хмельник С.И. Структура постоянного тока, DNA, № 33, 2015; ViXra, 2015-03-29, <http://vixra.org/abs/1503.0241>
  9. Хмельник С.И. Структура потока электромагнитной энергии в проводе с постоянным током, DNA, № 33, 2015; ViXra, 2015-04-08, <http://vixra.org/abs/1504.0061>