Einstein y las ecuaciones de campo unificado asimétrico

Einstein and the field equations unified asymmetric

Wenceslao Segura González
Investigador independiente
e-mail: wenceslaoseguragonzalez@yahoo.es
web: http://wenceslaoseguragon.wix.com/wenceslao-segura

Sinopsis. En el año 1945 Einstein retornó a la teoría de campo unificado asimétrico que había investigado en el año 1925. Una teoría con tensor métrico y conexión afín ambos asimétricos con lo que se quería conseguir la unificación de la gravitación y el electromagnetismo. El procedimiento utilizado por Einstein fue buscar unas ecuaciones que fuesen una generalización de las ecuaciones relativistas de la gravitación. Hasta su fallecimiento en el año 1955, Einstein publicó catorce deducciones de las ecuaciones de campo unificado asimétrico, que son reunidas y estudiadas en este artículo.

Abstract. In 1945 Einstein returns to theory of field unified asymmetric that had investigated in 1925. A theory with metric tensor and affine connection both asymmetrics, with what he wanted to achieve the unification of gravitation and electromagnetism. The procedure used by Einstein was to find equations that generalize the relativistic equations of gravitation. Until his death in 1955, Einstein published fourteen deductions of the equations of field unified asymmetric, which are gathered and studied in this article.

Contenido

La versión *v1* del artículo «Einstein y las ecuaciones de campo unificado asimétrico» fue publicada el día 24 de febrero de 2016

Einstein y las ecuaciones de campo unificado asimétrico

Einstein and the field equations unified asymmetric

Wenceslao Segura González
Investigador independiente
e-mail: wenceslaoseguragonzalez@yahoo.es
web: http://wenceslaoseguragon.wix.com/wenceslao-segura

Introducción

La teoría de la Relatividad

Entendemos la teoría de la Relatividad como aquella que afirma que la Naturaleza no es más que la manifestación del continuo espacio-tiempo. Tanto los campos físicos como la matería son para la Relatividad estructuras espacio-temporales. En este sentido la teoría de la Relatividad manifiesta que la Física debe reducirse al estudio de la geometría del espacio-tiempo.

Se debe distinguir tres fases en el desarrollo de la teoría de la Relatividad y en todas ellas estuvo presente de forma destacada Albert Einstein, a saber: teoría especial de la Relatividad, Relatividad General y teoría de campo unificado.

La teoría especial de la Relatividad

La teoría especial o restringida de la Relatividad debe ser considerada como la primera fase del desarrollo de la teoría. Hay que entenderla como la base de la teoría relativista, en el sentido de que en ella nace el concepto fundamental de continuo espacio-tiempo. De esta teoría resulta que la simultaneidad de sucesos que se producen en puntos diferentes es relativa, es decir que sucesos que ocurren en puntos diferentes pueden ser simultáneos para unos observadores y no simultáneos para otros. Esto nos viene a decir que, si bien cada observador puede hacer una separación entre el espacio y el tiempo *, esta división no es única, sino relativa al observador, por ello no se puede afirmar que el espacio existe de forma independiente al tiempo, sino lo que existe es una íntima relación entre el espacio y el tiempo, a lo que denominamos espacio-tiempo.

El segundo resultado de la teoría especial de la Relatividad es que la geometría del espacio-tiempo en ausencia de campos es pseudo euclídea, es decir que el elemento de línea del espacio-tiempo cuando es expresado en coordenadas cartesianas viene dado por

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \eta_{ik} dx^i dx^k$$

donde η_{ik} es el tensor métrico de Minkowski.

La teoría especial de la Relatividad añade a la física relativista el principio de covariancia [102] [92], que junto a los conceptos anteriores forman la estructura fundamental de la teoría de la Relatividad tal como aquí la entendemos. Es de aplicación el principio de la Relatividad especial, según el cual todos los sistemas de referencia inerciales son equivalentes para la descripción de la Naturaleza, o sea, los fenómenos físicos son idénticos para todos los observadores inerciales con independencia de sus velocidades relativas. Entonces las leyes físicas deben tener la misma forma en todos los sistemas de referencia inerciales, pues si se detectara alguna diferencia

* El espacio de un observador en un momento dado, está formado por los puntos donde se producen sucesos que son simultáneos entre sí.

podría utilizarse para distinguir un sistema de referencia de otro, lo que entraría en contradicción con el principio de la Relatividad.

Esta última afirmación no es más que el principio de covariancia, que dice que las leyes naturales pueden formularse de una forma la cual sea independiente del sistema de coordenadas espacio-temporal, es decir la misma forma en todos los sistemas. La Relatividad Especial nos enseña que esta covariancia es conseguida gracias a que las leyes físicas pueden ponerse en notación tensorial. Por tanto, podemos considerar equivalente el principio de covariancia y el hecho de que las leyes físicas pueden formularse tensorialmente; aunque hay que recordar que es posible establecer ecuaciones no tensoriales y que sin embargo sean covariantes, es decir las mismas en todos los sistemas de coordenadas.

Se puede dar generalidad al principio de covariancia que surge de la Relatividad Especial. Formulada una ley tensorialmente, la expresión seguirá siendo la misma con independencia del tipo de transformación de las coordenadas espacio-temporales utilizada, no teniendo que limitarse a las transformaciones de Lorentz. Por este razonamiento decimos que el principio de covariancia tiene su origen en la Relatividad Especial y no en la Relatividad General como habitualmente se dice.

Como la geometría del espacio-tiempo puede ser representada tensorialmente y la Física relativista reduce la Naturaleza a una interpretación geométrica, parece lógico que las leyes físicas admitan una representación tensorial, y aquí encontramos el origen del principio de covariancia.

Debemos advertir la diferencia existente entre el principio de covariancia y el principio general de la Relatividad. Una ley física puede venir expresada tensorialmente y por lo tanto tomar la misma forma en todos los sistemas de referencia; sin embargo, esto no significa que represente la misma ley física, como ocurriría si fuera de aplicación el principio general de la Relatividad. Por ejemplo, la forma de la ecuación geodésica es la misma para un sistema de referencia inercial que para otro no inercial, no obstante esta misma ecuación revela efectos inerciales en un sistema no inercial los cuales no aparecen en los sistemas inerciales, representando por tanto leyes diferentes, aunque con la misma forma tensorial. Es claro que el principio general de la Relatividad implica el principio de covariancia, pero lo contrario no es cierto.

Einstein identifica al principio de covariancia como lo hemos formulado anteriormente, con el principio general de la Relatividad. Pero ambos conceptos son diferentes como queda dicho. Mientras que el principio general de la Realtividad es una ley con contenido físico, el principio de covariancia es una herramienta matemática.

Sin embargo, el principio de covariancia tiene un alto valor heurístico porque, como señala Einstein, es un instrumento que nos guía en la obtención de las ecuaciones físicas, especialmente en la búsqueda de las ecuaciones de campo unificado.

La Relatividad General

La segunda fase en el desarrollo de la teoría de la Relatividad es la teoría general de la Relatividad o Relatividad General. Esta teoría no es general como erróneamente indica su nombre, puesto que se aplica al caso limitado en que exista únicamente campo gravitatorio.

La Relatividad General estudia el campo gravitatorio como expresión de la geometría del continuo espacio-tiempo. En concreto, la presencia de campo gravitatorio modifica la geometría pseudo euclídea de la Relatividad Especial convirtiéndola en una geometría de tipo riemanniano.

La teoría relativista de la gravitación es incompleta; por una parte se limita exclusivamente al campo gravitatorio y por otra no es capaz de incluir a la materia, ya sea como fuente de campo o como elemento pasivo sobre el que actúa la gravedad. Esto queda bien expresado en la ecuación de campo gravitatorio

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = -\chi T_{ik}$$

mientras que el primer miembro de la ecuación está formado por tensores que describen la geometría del continuo espacio-tiempo, el segundo miembro es una descripción fenomenológica de la materia. Se trata de una teoría dualística que describe el campo como geometría del espacio-tiempo, pero que agrega la materia como un elemento extraño a la geometría *. La teoría de la Relatividad exige que las ecuaciones de campo sean monística, donde el único elemento que aparezca sea la geometría del espacio-tiempo y en donde no sea necesario introducir la materia como elemento complementario. En este sentido la Relatividad General es una teoría incompleta y provisional.

* También la teoría electromagnética de Maxwell es dualística, porque al igual que ocurre con la Relatividad General, la carga eléctrica es ajena al campo.

La teoría de campo unificado

La teoría de la Relatividad tiene una tercera y última fase que es llamada la teoría de campo unificado, que se entiende como la expresión completamente desarrollada de la teoría relativista.

La teoría de campo unificado persigue un doble objetivo: la descripción de todos los campos físicos como una manifestación de la geometría del espacio-tiempo y la comprensión de la materia como una estructura geométrica libre de singularidad. Einstein aventura que de esta última fase de la Relatividad podría obtenerse incluso las leyes cuánticas.

El estudio de las teorías de campo unificado relativista comenzó en el año 1918 y se prolongó algunos años después de la muerte de Einstein en 1955 [43]. Los numerosos intentos que se idearon no resultaron fructíferos. Esta circunstancia unida a los éxitos que por entonces cosechaba la teoría de campo cuántico, hicieron que se abandonara el estudio de las teorías unificadas relativistas.

No es aceptable decir que la teoría de la Relatividad fracasó en su intento de unificación de la Naturaleza sobre una base geométrica. Sólo podemos decir que no tuvo éxito, en el mismo sentido que las teorías de campo cuántico tampoco han llegado a la deseada unificación.

Einstein y las teorías de campo unificado asimétrico

Hace ahora un siglo Einstein y Hilbert obtuvieron las ecuaciones finales de la Relatividad General [44] [14], una teoría gravitatoria que da sustancialidad al campo, al que identifica con el continuo espacio-tiempo. Según esta teoría la gravedad es el resultado de la «curvatura» del espacio-tiempo que es producida por la masa de los cuerpos y por cualquier forma de energía.

Nada más surgir la teoría general de la Relatividad se intentó su generalización. Si la gravedad es explicada por la geometría del espacio-tiempo, lo mismo debería de ocurrir con el otro campo conocido en la época, el electromagnético. Además, la Relatividad General no es una teoría pura de campo, puesto que no es capaz de interpretar la materia, de tal forma que la teoría es mixta en el sentido de que la materia aparece como un elemento extraño al campo.

La primera generalización de la Relatividad General la realizó Hermann Weyl [116] [118] y su gran logro consistió en formular una teoría geométrica en la que la conexión no era lo mismo que los símbolos de Christoffel; o sea, la geometría no era de Riemann sino una de carácter más general. La teoría de Weyl reconocía la importancia de la conexión, que se situaba al mismo nivel que la métrica.

Poco tiempo después, Arthur Eddington [12] reconoció que es posible desarrollar una geometría cuyo principal elemento sea la conexión, mientras que la métrica aparece como una magnitud derivada. Sin embargo, Eddington no desarrolló plenamente la teoría física correspondiente, pero dejó los cimientos para que poco tiempo después Einstein desarrollara la primera teoría basada en la conexión, que ahora es llamada teoría de campo puramente afín.

Durante el año 1923 Einstein publicó cuatro trabajos en los que desarrolló la primera teoría puramente afín de campo [15] [16] [17] [18], que no logró unificar satisfactoriamente la gravedad y el electromagnetismo. Este proyecto de teoría puramente afín fue pronto abondonado, hasta que dos décadas después fue recuperado por Erwin Schrödinger generalizándola a conexiones no simétricas [69] a [90].

Einstein, que ya por entonces lideraba la investigación en teoría unificada de campo, abandonó la teoría puramente afín y tras dos años de estudio abordó la teoría métrico-afín. En 1925 Einstein publicó su primera teoría de esta especie con el título «Teoría unificada de campo de la gravitación y la electricidad» [19]. Fue un primer intento que puso las bases para posteriores estudios. Esta teoría que ha recibido el nombre de Einstein, Einstein-Schrödinger, Einstein-Schrödinger-Strauss o Einstein-Kaufman fue retomada con más constancia por Einstein en el año 1945 y permaneció como la teoría de campo unificada más elaborada.

La teoría del año 1925 es asimétrica, pues tanto el tensor métrico como la conexión no tienen la propiedad de simetría que caracteriza a la Relatividad General, en este sentido es la primera teoría de este género que hizo Einstein y que retomó en el año 1945. Es curioso que en la investigación que Einstein desarrolló desde ese año hasta su muerte en 1955 nunca mencionara la teoría de 1925, ni siquiera cuando en el año 1953 publicó una deducción de las ecuaciones de campo asimétrico que es exactamente igual a la que presentó en 1925.

La teoría de campo unificado de Einstein

Como hemos dicho, en el año 1945 Einstein publicó la primera de una serie de investigaciones relacionadas con la teoría unificada de campo asimétrico. En estas investigaciones fue ayudado por su asistente Ernst G. Straus y por la física Bruria Kaufman.

La idea de Einstein consiste en generalizar la teoría gravitoria, o sea, obtener una teoría que no solamente se reduzca a la Relatividad General en primera aproximación, sino una teoría cuyas ecuaciones sigan un paralelismo con las de la teoría general de la Relatividad.

La teoría de campo unificado asimétrico de Einstein es considerada como una teoría de campo completa, es decir, monística y por tanto sólo se admite ecuaciones similares a la del caso exterior de la Relatividad General. La materia, por tanto, no es necesario introducirla en la teoría como un elemento extraño al campo, sino que debe de surgir de las ecuaciones de campo.

Las ecuaciones de la gravitación que se pretenden generalizar son las de la Relatividad General

$$\begin{aligned} D_r \mathbf{g}^{ik} &= 0 \\ R_{ik} &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

donde la primera ecuación es la derivada covariante de la densidad del tensor métrico * y la segunda es la anulación del tensor de Ricci. Además, en vista a su generalización, hay que tener presente que en la Relatividad General tanto el tensor métrico como la conexión son simétricas (y por tanto el vector de torsión es nulo $\tau_i = \Gamma_{ir}{}^r - \Gamma_{ri}{}^r = 0$) y también lo es el tensor de Ricci que sirve para componer la densidad lagrangiana de donde se derivan las ecuaciones (1).

La generalización de las ecuaciones gravitatorias son conseguidas, primeramente, suponiendo la asimetría del tensor métrico y de la conexión. Se observa que la parte simétrica del tensor métrico (que son 10 componentes) viene a representar el campo gravitatorio, mientras que las 6 componentes de la parte antisimétrica del tensor métrico deben corresponder al tensor de campo electromagnético.

A continuación es necesario generalizar la propiedad de simetría de la Relatividad General. Einstein elige lo que llama simetría hermítica o invariancia por transposición. Sea una magnitud $H_{ik} = H_{ik}(g, \Gamma)$ que depende del tensor métrico y de la conexión. Decimos que tiene simetría hermítica si al cambiar el tensor métrico y la conexión por sus conjugados y luego intercambiar los índices *i* y *k* se obtiene la misma magnitud

$$H_{ik}(g, \Gamma) = H_{ki}(\tilde{g}, \tilde{\Gamma}).$$

Einstein utiliza otro concepto de simetría, diferente de la simetría hermítica antes definida y que llama condición de simetría: si en una ecuación física $H_{ik}(g, \Gamma) = 0$ se sustituye el tensor métrico y la conexión afín por sus conjugados la ecuación se mantiene, es decir

$$H_{ik}(g, \Gamma) = 0 \quad \Rightarrow \quad H_{ik}(\tilde{g}, \tilde{\Gamma}) = 0,$$

Nótese que si H_{ik} tiene simetría hermítica se cumple la condición de simetría, pero no se puede afirmar lo contrario.

Einstein persigue generalizar las ecuaciones (1) procurando que las expresiones generalizadas tengan la simetría hermítica. Por ello se ve en la necesidad de hacer una nueva definición de derivada covariante, para que tenga la simetría hermítica y con la que poder obtener una ecuación similar a la primera de (1). Igualmente es necesario (aunque no en todas las deducciones que luego veremos) generalizar el tensor de Ricci buscando la deseada simetría hermítica.

La primera ecuación (1) se generaliza al precio de requerir que el vector de torsión sea nulo o lo que es lo mismo a exigir que

$$\mathbf{g}^{[ik]}{}_{,k} = 0$$

que tiene el claro significado físico de representar al primer grupo de ecuaciones de Maxwell.

Otro elemento guía de Einstein en la búsqueda de las ecuaciones de campo unificado es el principio de covariancia, al que Einstein llama principio general de la Relatividad. Entonces las ecuaciones de campo buscada deben ser invariantes frente a transformaciones de coordenadas y previsiblemente deben ser ecuaciones tensoriales.

Por último, Einstein utiliza el principio de mínima simplicidad lógica posible como un elemento guía en su investigación. Aún con todo lo expuesto, en la deducción de las ecuaciones de campo unificado sigue habiendo un alto grado de arbitrareidad, pero poco más se puede hacer al respecto, ya que no tenemos suficientes argumentos físicos para elegir un camino u otro en la búsqueda de las ecuaciones de campo.

Para conseguir los objetivos antes trazados, Einstein va a utilizar en la mayoría de las deducciones que expondremos a continuación, el principio variacional. La ventaja en la utilización de este principio radica en que

* Las densidades serán representadas en lo que sigue con letra negrita.

las ecuaciones de campo resultante son compatibles, lo que no se puede asegurar si se utiliza otro método.

Al utilizar un principio variacional, Einstein se va a enfrentar al dilema de elegir la densidad lagrangiana. El camino más natural, que es el seguido por Einstein, es tomar densidades lagrangianas similares a la utilizada en la Relatividad General. Esto significa que va a utilizar el tensor de Ricci (o sus modificados) para construir conjuntamente con el tensor métrico la densidad lagrangiana

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{g}^{ik} R_{ik}, \tag{2}$$

variando la acción respecto al tensor métrico y respecto a la conexión. Por tanto la teoría de Einstein es una teoría métrico-afín.

En ninguna de las deducciones que veremos más abajo utiliza Einstein la curvatura homotética, un tensor de segundo orden derivado de la contracción del tensor de curvatura que puede ser utilizado para construir densidades lagrangianas. La razón hay que buscarla, quizás, en que para las ecuaciones que buscaba Einstein, la curvatura homotética es nula.

En algunas de las propuestas de Einstein no se utiliza el método variacional, sino que se obtienen las ecuaciones de campo mediante consideraciones genéricas, siempre tratando de generalizar los resultados de la teoría gravitatoria.

Las deducciones de campo unificado de Einstein

En este artículo se reúnen todas las deducciones que hizo Einstein de las ecuaciones de campo unificado asimétrico. Llama la atención que sean 14 las demostraciones que hizo Einstein, ¿por qué un número tan elevado?

En el epígrafe anterior hemos expuesto los principios en los que se guió Einstein para hallar sus ecuaciones. Pero es fácil advertir la debilidad de esos argumentos. Por ejemplo, las ecuaciones de campo no tienen porqué tener la condición de simetría, podrían obedecer a otra simetría más compleja; ni la densidad lagrangiana tiene que ajustarse a la forma (2), pues hay otras posibilidades. Es decir, los argumentos esgrimidos por Einstein para obtener las ecuaciones de campo no son concluyentes.

Einstein en sus numerosas demostraciones quiso encontrar razones (quizás de orden estético) que fortalecieran sus argumentos de partida, aquí se encuentra la principal razón por las que abordó las deducciones ecuaciones de campo de catorce formas diferentes.

Existe otra circunstancia por la que Einstein hizo tantas deducciones. La primera teoría de campo asimétrico, la del año 1945 que hemos llamado **A**, no es satisfactoria porque, aún utilizando un principio de mínima acción, impone arbitrariamente una condición (la nulidad del vector de torsión) que no es deducible del principio variacional. Esta condición debilita la compatibilidad de las ecuaciones finales, hasta el punto que cabe discutir si entre las soluciones de las ecuaciones hay variedad suficiente para acoger soluciones físicas reales.

No obstante lo anterior, Einstein ve en esas ecuaciones (que se denominan ecuaciones fuertes) la más natural generalización de la gravitación. En parte, con sus varias deducciones quería encontrar razones para elegir entre estas últimas ecuaciones o bien las encontradas por otros procedimientos y denominada ecuaciones débiles de campo. Finalmente por razonamientos que no discutimos en este artículo, Einstein se inclinó por el sistema débil de ecuaciones de campo que son derivadas íntegramente de un principio variacional.

En realidad Einstein deduce cinco grupos diferentes de ecuaciones de campo aunque muy parecidos entre sí Los dos principales grupos son las denominadas ecuaciones fuertes de campo

$$\begin{gathered} D_r g^{\underset{+}{i}\underset{-}{k}} = \partial_r g^{ik} + g^{sk}\Gamma_{sr}^{\ \ i} + g^{is}\Gamma_{rs}^{\ \ k} = 0 \\ \tau_i = 0 \\ R_{ik} = 0 \end{gathered} \tag{Sistema 1}$$

donde la derivada covariante que aparece en la primera ecuación es definida en 2-A, y las ecuaciones débiles

$$\begin{aligned} &D_r \boldsymbol{g}^{\underset{+}{i}\underset{-}{k}} = 0 \\ &\tau_i = 0 \\ &R_{(ik)} = 0 \\ &R_{[ik],r} + R_{[kr],i} + R_{[ri],k} = 0, \end{aligned} \tag{Sistema 2}$$

donde, como es habitual, los paréntesis redondos significan simetrización y los cuadrados antisimetrización; la coma representa la derivación parcial respecto a las coordenadas.

Otro conjunto de ecuaciones de campo tiene una estructura intermedia entre las dos anteriores, por lo que la hemos llamado ecuaciones fuertes generalizadas

$$\begin{aligned}
&D_r \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}} - \frac{1}{3}\left(\boldsymbol{M}^i \delta_r^k - \boldsymbol{M}^k \delta_r^i\right) = 0 \\
&\tau_i = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(Sistema 3)} \\
&\overline{R}^*_{ik} = -\Gamma_{ik,r}^{\ \ r} + \Gamma_{ir}^{\ \ t}\Gamma_{tk}^{\ \ r} + \frac{1}{2}\left[\Gamma_{(ir),k}^{\ \ r} + \Gamma_{(rk),i}^{\ \ r}\right] - \Gamma_{ik}^{\ \ t}\Gamma_{(tr)}^{\ \ r} = 0
\end{aligned}$$

donde $\overline{R}^*_{ik}$ es un tensor derivado del tensor de Ricci y definido en 2-F, mientras que $\boldsymbol{M}^i$ es una densidad vectorial definida por

$$\boldsymbol{M}^i = \frac{1}{2}\left(D_t \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{it}} - D_t \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ti}}\right).$$

Otro conjunto de ecuaciones matemáticamente correctas y obtenidas como intermediarias en una de las deducciones es

$$\begin{aligned}
&D_r \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{g}^{ik}\tau_r - \frac{1}{3}\delta_r^k \boldsymbol{g}^{it}\tau_t \\
&R_{ik} = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(Sistema 4)} \\
&\boldsymbol{g}^{[it]}{}_{,t} = 0
\end{aligned}$$

caracterizada por tener un vector de torsión no nulo.

En una de sus últimas investigaciones, publicada poco antes de su muerte en 1955, Einstein dedujo las ecuaciones de campo

$$\begin{aligned}
&D_r \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}} - \frac{1}{2}\boldsymbol{g}^{ik}\tau_r + \frac{1}{3}\boldsymbol{g}^{ip}\tau_p \delta_r^k = 0 \qquad\qquad \text{(Sistema 5)} \\
&R_{ik} = 0
\end{aligned}$$

que tiene la propiedad de ser invariante frente a la transformación lambda (definida en el epígrafe 3-N).

En las dos tablas de las siguientes páginas resumimos los rasgos más característicos de las catorce deducciones que abordaremos más adelante.

En ese artículo nos limitamos a presentar las distintas deducciones realizadas por Einstein y sus colaboradores, completándolas con demostraciones de otros autores. Pero Einstein no se limitó exclusivamente a realizar los cálculos que presentamos, sino que estudió problemas físico-matemáticos relacionados con las ecuaciones de campo, como la compatibilidad de las ecuaciones de campo o las identidades de Bianchi que surgen de la invariancia de las ecuaciones, asuntos que no son tratados en este artículo.

Un problema relacionado con la teoría, que no tratamos en este artículo, es su relación con la experiencia. En primera aproximación debe obtenerse las ecuaciones de la Relatividad General y las ecuaciones del electromagnetismo de Maxwell, por lo que las experiencias que soportan a estas teorías también hablarían a favor de la teoría de campo unificado. Quedaría abierta la cuestión de si a segunda aproximación coinciden los resultados experimentales.

En las teorías de campo unificado deben encontrarse fenómenos de interacción entre el electromagnetismo y la gravitación. El más notable de estos fenómenos sería la producción de campo magnético por cuerpos (no cargados) en movimiento, en particular podría interpretarse el campo magnético terrestre.

Las distintas deducciones planteadas por Einstein han sido clasificadas con una letra, desde la **A** hasta la **O**, catorce en total, algunas de ellas fueron publicadas en la misma forma en varias ocasiones, nosotros la hemos fechado atendiendo a la primera de esas publicaciones. Completamos esta investigación con las deducciones de las ecuaciones de la autoría de otros físicos destacados en esta investigación, como Tonnelat, Schrödinger y Lichnerowicz.

No hemos dudado de hacer repeticiones, siempre con la idea puesta de facilitar la lectura y, en la medida de lo posible, conseguir que cada apartado se pueda leer por separado. Al final del artículo hemos puesto una bibliografía seleccionada, donde no sólo se encuentran las referencias del texto, sino las más importantes y significativas contribuciones al desarrollo de la teoría de campo unificado de Einstein.

Para lo referente a la notación y la base matemática sobre la que se desarrolla la presente investigación remitimos al lector a la obra Segura González, Wenceslao: *La conexión afín. Aplicación a la teoría clásica de campos*, eWT, 2015, descargas desde la página http://vixra.org/abs/1504.0085.

	Denominación	Autor	Año	Método	Densidad lagrangiana	Ecuaciones
A	Las ecuaciones fuertes de campo	Einstein	1945	Principio variacional y condición previa $\tau_i = 0$	$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{g}^{ik} \hat{R}_{ik}$,	Sistema fuerte (1)
B	Las ecuaciones débiles de campo	Einstein Straus	1946	Principio variacional y multiplicadores de Lagrange: $\boldsymbol{h}^i$, b_i	$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{g}^{ik} R_{ik} + \boldsymbol{h}^i \tau_i + b_i \boldsymbol{g}^{[ik]}{}_{,k}$	Sistema débil (2)
C	La densidad tensorial antisimétrica de tres índices $\boldsymbol{g}^{ikr}$	Einstein	1948	Principio variacional y condición previa: $\boldsymbol{g}^{[ik]} = \boldsymbol{g}^{ikr}{}_{,r}$	$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{g}^{ik} R_{ik}$	Sistema débil (2)
D	Las identidades de Bianchi	Einstein	1950	Similitud con la Relatividad General		Sistema débil (2)
E	Las condiciones *a priori*	Einstein	1950	Principio variacional y condiciones previas: $\tau_i = 0$ y $\boldsymbol{g}^{[ik]}{}_{,k} = 0$	$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{g}^{ik} R_{ik}$	Sistema débil (2)
F	La generalización natural de las ecuaciones de la gravitación	Einstein	1950	Generalización de las ecuaciones de la gravitación		Sistema fuerte (1)
G	La condición de simetría	Einstein	1953	Principio variacional y condición de simetría	$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{g}^{ik} R_{ik}$	Sistema fuerte (1)
H	Las ecuaciones fuertes generalizadas	Einstein	1953	Principio variacional y transformación de la conexión afín	$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{g}^{ik} \overline{R}^{*}_{ik}$	Sistema fuerte generalizado (3)

	Denominación	Autor	Año	Método	Densidad lagrangiana	Ecuaciones
I	Las ecuaciones débiles obtenidas de un sólo multiplicador de Lagrange	Einstein	1953	Principio variacional y multiplicador de Lagrange: b_i	$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{g}^{ik}\overline{R}^{*}_{ik} + b_i\,\boldsymbol{g}^{[it]}{}_{,t}$	Sistema débil (2)
J	La conexión de Schrödinger	Einstein	1953	Principio variacional y transformación de la conexión afín	$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{g}^{ik}R_{ik}$	Sistema débil (2)
K	El tensor de Ricci modificado	Einstein	1953	Principio variacional y multiplicador de Lagrange: b_i	$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{g}^{ik}R^{**}_{ik} + b_i\,\boldsymbol{g}^{[is]}{}_{,s}$	Sistema débil (2)
L	Ecuaciones de campo con vector de torsión no nulo	Einstein Kaufmann	1955	Principio variacional	$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{g}^{ik}R_{ik}$	Sistema con vector de torsión no nulo (4)
M	El campo auxiliar y la normalización	Einstein Kaufmann	1955	Principio variacional y transformación de la conexión afín	$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{g}^{ik}R_{ik}$	Sistema débil (2)
N	La transformación lambda	Einstein Kaufmann	1955	Principio variacional con $U_{ik}{}^{r}$ e invariancia lambda	$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{g}^{ik}R_{ik}$	Sistema invariante lambda (5)
O	La equivalencia entre las ecuaciones débiles de campo y las ecuaciones invariantes lambda	Einstein	1955	Principio variacional con $U_{ik}{}^{r}$ y normalización lambda	$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{g}^{ik}R_{ik}$	Sistema débil (2)

$$R_{ik} = \Gamma_{ir,k}{}^{r} - \Gamma_{ik,r}{}^{r} + \Gamma_{ir}{}^{t}\Gamma_{tk}{}^{r} - \Gamma_{ik}{}^{t}\Gamma_{tr}{}^{r}$$
$$\hat{R}_{ik} = -\Gamma_{ik,r}{}^{r} + \Gamma_{ir}{}^{t}\Gamma_{tk}{}^{r} + \partial_k\partial_i \ln\sqrt{g} - \partial_s \ln\sqrt{g}\,\Gamma_{ik}{}^{s}$$

$$\overline{R}^{*}_{ik} = -\Gamma_{ik,r}{}^{r} + \Gamma_{ir}{}^{t}\Gamma_{tk}{}^{r} + \frac{1}{2}\left[\Gamma_{(ir),k}{}^{r} + \Gamma_{(rk),i}{}^{r}\right] - \Gamma_{ik}{}^{t}\Gamma_{(tr)}{}^{r}$$
$$R^{**}_{ik} = \left[-\Gamma_{ik,r}{}^{r} + \Gamma_{ir}{}^{t}\Gamma_{tk}{}^{r}\right] + \partial_k\partial_i \ln\sqrt{g} - \partial_t \ln\sqrt{g}\,\Gamma_{ik}{}^{t}$$

A) EINSTEIN (1945): Las ecuaciones fuertes de campo

1-A.- Métrica y conexión

En la teoría de campo unificado que Einstein formuló en el año 1945 [23] [94], que llamamos teoría **A**, el tensor métrico g_{ik} tiene componentes complejas y posee la propiedad hermítica, es decir

$$g_{ik} = \overline{g}_{ki}$$

donde $\overline{g}_{ik}$ significa el complejo conjugado de g_{ik}. Si se descompone el tensor métrico como

$$g_{ik} = s_{ik} + i a_{ik}$$

encontramos que dada la propiedad de hermiticidad, la parte real s_{ik} es simétrica $s_{ik} = s_{ki}$ y la parte imaginaria a_{ik} es antisimétrica $a_{ik} = -a_{ki}$.

Si $g = \det(g_{ik})$ entonces $\overline{g} = \det\left(\overline{g_{ik}}\right)$ ya que el complejo conjugado de un producto es el producto de los complejos conjugados; por la propiedad de hermiticidad y dado que el determinante de una matriz es igual a la de su traspuesta se tiene

$$\overline{g} = \det\left(\overline{g_{ik}}\right) = \det(g_{ki}) = \det(g_{ik}) = g$$

lo que significa que g es un número real.

Einstein eligió el signo de g negativo. El signo del determinante de s_{ik} también tiene que ser negativo, es decir $(+---)$ o bien $(-+++)$, o sea una métrica lorentziana. Esto es así porque los signos de la parte espacial tienen que ser los mismos y por tanto que g sea negativo significa que el signo de la parte temporal debe ser opuesto al de la parte espacial y además en ausencia de campos la métrica debe reducirse a la de Minkowski de la Relatividad Especial.

El signo del determinante g será el mismo independientemente del sistema de coordenadas elegido. En efecto, supongamos una transformación de un sistema de coordenadas K a otro K', caracterizado por la matriz $A = (A_k^i)$, entonces la ley de transformación del tensor métrico es

$$g'_{ik} = A_i^m A_k^n g_{mn}$$

o en forma matricial

$$G' = A G A^T$$

donde A^T es la matriz traspuesta de A. Teniendo en cuenta que el determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes y que el determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta, nos queda

$$g' = \left[\det(A)\right]^2 g$$

como la matriz A es real, entonces los signos de g y g' coinciden. Como s_{ik} es un tensor, lo mismo ocurrirá con el signo de su determinante que será negativo para cualquier sistema de coordenadas.

Definimos las componentes contravariantes del tensor métrico por la relación

$$g_{ik} g^{rk} = \delta_i^r \tag{1.A}$$

que representa un sistema de ecuaciones lineales con tantas ecuaciones como incógnitas (g^{rk}) y que tiene solución única puesto que el determinante de los coeficientes (g_{ik}) es distinto de cero. De (1.A) obtenemos

$$g^{it} g_{ik} g^{rk} = \delta_i^r g^{it} = g^{rt} \quad \Rightarrow \quad g^{it} g_{ik} = \delta_k^t .$$

Naturalmente g^{ik} es un tensor por serlo g_{ik} y δ_k^i y ser (1.A) una expresión válida en cualquier sistema de coordenadas, en efecto de $g'_{ik} g'^{rk} = \delta_i^r$ se deriva

$$A_i^m A_k^n g_{mn} g'^{rk} = \delta_i^r \quad \Rightarrow \quad A_k^n g_{mn} g'^{rk} = \delta_i^r B_m^i = B_m^r \quad \Rightarrow \quad g^{mt} A_k^n g_{mn} g'^{rk} = g^{mt} B_m^r$$

siendo A_k^i la matriz de la transformación de coordenadas de K [donde es válida (1.A)] a K' y B_k^i la matriz inversa; de lo anterior se sigue

$$A_k^n \delta_n^t g'^{rk} = g^{mt} B_m^r \quad \Rightarrow \quad g'^{rk} = B_m^r B_t^k g^{mt}$$

como queríamos demostrar.

Finalmente indiquemos que el tensor g^{ik} también es hermítico: $\overline{g^{ik}} = g^{ki}$.

La conexión afín del espacio en la teoría de que llamaremos **A** para distinguirla de las restantes, también tiene la propiedad de hermiticidad, es decir

$$\overline{\Gamma_{ik}{}^{r}} = \Gamma_{ki}{}^{r} .$$

Por esta propiedad se deriva que las componentes del tensor de torsión $\tau_{ik}{}^{r}$ son imaginarios puros, puesto que

$$\tau_{ik}{}^{r} = \Gamma_{ik}{}^{r} - \Gamma_{ki}{}^{r} = \Gamma_{ik}{}^{r} - \overline{\Gamma_{ik}{}^{r}},$$

e igual propiedad tendrá el vector de torsión

$$\tau_{i} = \tau_{ik}{}^{k} = \Gamma_{ik}{}^{k} - \Gamma_{ki}{}^{k}.$$

2-A.- La derivada covariante

En geometría de Riemann existe un tensor métrico y una conexión de componentes reales y simétricas, además la derivada covariante del tensor métrico es nula

$$D_r g_{ik} = \partial_r g_{ik} - g_{sk}\Gamma_{ir}{}^{s} - g_{is}\Gamma_{kr}{}^{s} = 0. \tag{2.A}$$

La expresión anterior corresponde a 40 ecuaciones independientes, dada la simetría del tensor métrico. Además, por la condición de simetría de la conexión (que son 24 ecuaciones) se obtienen en total 64 ecuaciones, tantas como componentes de la conexión, esto significa que de (2.A) podemos establecer una relación entre la conexión y el tensor métrico y sus primeras derivadas.

En la geometría de la teoría **A** de Einstein nos encontramos con una conexión no simétrica, lo que significa que podemos dar dos definiciones de derivada covariante de un vector (la + y la $-$)

$$D_i A^{\underset{+}{k}} = \partial_i A^k + A^s \Gamma_{si}{}^{k}; \qquad D_i A^{\underset{-}{k}} = \partial_i A^k + A^s \Gamma_{is}{}^{k}$$
$$D_i A_{\underset{+}{k}} = \partial_i A_k - A_s \Gamma_{ki}{}^{s}; \qquad D_i A_{\underset{-}{k}} = \partial_i A_k - A_s \Gamma_{ik}{}^{s},$$

las dos igualmente aceptables. Notemos que si $D_i A^{\underset{+}{k}}$ es un tensor, entonces $D_i A^{\underset{-}{k}}$ debe ser otro tensor, en efecto

$$D_i A^{\underset{-}{k}} = \partial_i A^k + A^s \Gamma_{is}{}^{k} = \partial_i A^k + A^s \Gamma_{is}{}^{k} + A^s \Gamma_{si}{}^{k} - A^s \Gamma_{si}{}^{k} = D_i A^{\underset{+}{k}} + A^s \tau_{is}{}^{k}$$

como el segundo miembro es la suma de dos tensores, significa que $D_i A^{\underset{-}{k}}$ es también un tensor. Y el mismo razonamiento se aplica a $D_i A_k$.

El problema surge si se utilizan las dos derivdas simultáneamente, entonces nos encontramos con varias posibilidades de derivadas de un tensor. En la teoría **A** de Einstein (y también en sus sucesivas versiones) de entre las seis posibilidades de la derivada covariante de un tensor de segundo orden se elije la siguiente

$$D_r A_{\underset{+}{i}\underset{-}{k}} = \partial_r A_{ik} - A_{sk}\Gamma_{ir}{}^{s} - A_{is}\Gamma_{rk}{}^{s}.$$

Siguendo los métodos habituales es fácil calcular otras derivadas covariantes, por ejemplo para un tensor de segundo orden contravariante tenemos

$$D_r A^{\underset{+}{i}\underset{-}{k}} = \partial_r A^{ik} + A^{sk}\Gamma_{sr}{}^{i} + A^{is}\Gamma_{rs}{}^{k}.$$

3-A.- Derivada covariante de densidades tensoriales

Una densidad tensorial es el producto de un tensor (o un escalar o un vector) multiplicado por la raíz cuadrada del módulo del determinante de un tensor de segundo orden covariante. Un caso especial es cuando el determinante es el del tensor métrico, entonces dado, por ejemplo, un tensor A^k su densidad tensorial es

$$\boldsymbol{A}^k = \sqrt{g}A^k$$

se sobreentiende que consideramos el módulo de g para evitar un valor imaginario al hacer la raíz cuadrada.

Por la definición de determinante se encuentra que

$$\delta g = g g^{pq} \delta g_{pq}$$

entonces si la variación δ es la derivada covariante se tiene

$$D_r g = g g^{ik} D_r g_{\underset{+}{i}\underset{-}{k}} \tag{3.A}$$

notemos que lo anterior es una definición, pues se podría haber tomado otra de las derivadas covariantes que se pueden construir. Con (3.A) es posible calcular las derivadas covariantes de las densidades tensoriales. Por ejemplo, la derivada covariante de una densidad vectorial es

$$D_r \boldsymbol{A}^{\underset{+}{k}} = D_r\left(\sqrt{g}A^{\underset{+}{k}}\right) = D_r\sqrt{g}A^k + \sqrt{g}D_r A^{\underset{+}{k}},$$

por (3.A) tenemos

$$D_r \boldsymbol{A}^{\underset{+}{k}} = \partial_r \boldsymbol{A}^k + \boldsymbol{A}^s \Gamma_{sr}^{\ \ k} + \frac{1}{2}\boldsymbol{A}^k g^{pq} D_r g_{\underset{+-}{pq}} - \frac{1}{2}\boldsymbol{A}^k g^{pq}\partial_r g_{pq}$$

y por la definición de la derivada covariante del tensor métrico queda

$$D_r \boldsymbol{A}^{\underset{+}{k}} = \partial_r \boldsymbol{A}^k + \boldsymbol{A}^s \Gamma_{sr}^{\ \ k} - \frac{1}{2}\boldsymbol{A}^k \left(\Gamma_{sr}^{\ \ s} + \Gamma_{rs}^{\ \ s}\right).$$

El resultado se puede extender a una densidad tensorial cualquiera, por ejemplo para el caso de la densidad de un tensor de segundo orden covariante se tiene

$$D_r \boldsymbol{A}_{\underset{+-}{ik}} = \partial_r \boldsymbol{A}_{ik} - \boldsymbol{A}_{sk}\Gamma_{ir}^{\ \ s} - \boldsymbol{A}_{is}\Gamma_{rk}^{\ \ s} - \frac{1}{2}\boldsymbol{A}_{ik}\left(\Gamma_{sr}^{\ \ s} + \Gamma_{rs}^{\ \ s}\right).$$

Y para una densidad escalar

$$D_r \boldsymbol{A} = \partial_r \boldsymbol{A} - \frac{1}{2}\boldsymbol{A}\left(\Gamma_{sr}^{\ \ s} + \Gamma_{rs}^{\ \ s}\right).$$

Finalmente, pongamos la expresión de la derivada covariante de la densidad del tensor métrico en forma contravariante

$$D_r \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}} = \partial_r \boldsymbol{g}^{ik} + \boldsymbol{g}^{sk}\Gamma_{sr}^{\ \ i} + \boldsymbol{g}^{is}\Gamma_{rs}^{\ \ k} - \frac{1}{2}\boldsymbol{g}^{ik}\left(\Gamma_{sr}^{\ \ s} + \Gamma_{rs}^{\ \ s}\right).$$

4-A.- El tensor de curvatura

El tensor de curvatura $R^k_{\ sir}$ de Riemann se obtiene por alguno de los procedimientos habituales. Encontramos dos de estos tensores, según la derivada que se utilice: la + o la $-$. Si utilizamos la primera de las derivadas encontramos (con un signo opuesto al utilizado por Einstein)

$$R^k_{\ sir} = \Gamma_{sr,i}^{\ \ k} - \Gamma_{si,r}^{\ \ k} + \Gamma_{sr}^{\ \ n}\Gamma_{ni}^{\ \ k} - \Gamma_{si}^{\ \ n}\Gamma_{nr}^{\ \ k}$$

pero si usamos la derivada $-$, entonces obtenemos como tensor de curvatura el complejo conjugado del anterior, por tanto es suficiente tomar uno de ellos (nosotros elegimos el primero) como el tensor de curvatura de la teoría.

El tensor de curvatura tiene dos contracciones, una de ellas da el tensor de Ricci y la otra la curvatura homotética. El tensor de Ricci es

$$R_{ik} = R^r_{\ ikr} = \Gamma_{ir,k}^{\ \ r} - \Gamma_{ik,r}^{\ \ r} + \Gamma_{ir}^{\ \ t}\Gamma_{tk}^{\ \ r} - \Gamma_{ik}^{\ \ t}\Gamma_{tr}^{\ \ r},$$

este tensor no es hermítico. En efecto, si en R_{ik} intercambiamos los índices *i, k* y luego calculamos el complejo conjugado no volvemos a encontrar R_{ik}. Buscamos un tensor hermítico derivado del tensor de Ricci, porque esta es una propiedad que requerimos para que la densidad lagrangiana sea real. La posibilidad que planteó Einstein es hallar el valor medio del tensor de Ricci con el traspuesto de su complejo conjugado, lo que garantiza que el tensor hallado sea hermítico

$$\overline{R}_{ik} = \frac{1}{2}\left[R_{ik}(\Gamma) + R_{ki}(\tilde{\Gamma})\right] = -\Gamma_{ik,r}^{\ \ r} + \Gamma_{ir}^{\ \ t}\Gamma_{tk}^{\ \ r} + \frac{1}{2}\left(\Gamma_{ir,k}^{\ \ r} + \Gamma_{rk,i}^{\ \ r}\right) - \frac{1}{2}\Gamma_{ik}^{\ \ t}\left(\Gamma_{tr}^{\ \ r} + \Gamma_{rt}^{\ \ r}\right).$$

5-A.- El tensor de no-metricidad

La idea de Einstein es la de generalizar la teoría general de la Relatividad para llegar a una teoría unitaria. En este sentido extiende un resultado válido en el espacio de Riemann: la nulidad del tensor de no-metricidad $Q_{ikr} = D_r g_{ik} = 0$, que en nuestro caso es

$$Q_{\underset{+-}{ik}r} = D_r g_{\underset{+-}{ik}} = \partial_r g_{ik} - g_{sk}\Gamma_{ir}^{\ \ s} - g_{is}\Gamma_{rk}^{\ \ s} = 0, \qquad (4.A)$$

que corresponde a una ecuación auxiliar que nos permite obtener la conexión en función del tensor métrico y sus primeras derivadas. Multiplicando (4.A) por $-g^{it}g^{mk}$ se encuentra que

$$D_r g^{\underset{+-}{ik}} = 0 \;\Rightarrow\; D_r g_{\underset{+-}{ik}} = 0 \;\Rightarrow\; D_r g = 0 \;\Rightarrow\; D_r \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}} = 0.$$

por tanto de (3.A) y (4.A) encontramos que la derivada covariante del determinante del tensor métrico es nula.

La razón de buscar unas ecuaciones de campo de las que se pueda deducir (4.A) se encuentra en la generalización que Einstein hace de la propiedad de simetría que cumplen los tensores en la Relatividad General.

Ahora esta propiedad se generaliza a la simetría hermítica, caracterizada porque al cambiar en una expresión tensorial el tensor métrico y la conexión por sus complejos conjugados, se obtiene el mismo tensor con los índices intercambiados, es decir

$$A_{ik....}\left(\tilde{g},\tilde{\Gamma}\right)=A_{ki....}\left(g,\Gamma\right).$$

Pues bien, esta propiedad la cumple la ecuación (4.A), en efecto

$$D_r\tilde{g}_{\underset{+}{i}\underset{-}{k}}=\partial_r\tilde{g}_{ik}-\tilde{g}_{sk}\tilde{\Gamma}_{ir}{}^{s}-\tilde{g}_{is}\tilde{\Gamma}_{rk}{}^{s}=\partial_r g_{ki}-g_{ks}\Gamma_{ri}{}^{s}-g_{si}\Gamma_{kr}{}^{s}=D_r g_{\underset{+}{k}\underset{-}{i}},$$

(4.A) hay que entenderla como la natural generalización de la correspondiente ecuación en Relatividad General.

6-A.- La densidad lagrangiana

Anteriormente hemos dado la matemática en que se basa la teoría que estamos examinando. El paso siguiente es buscar una densidad lagrangiana de la que se deriven las ecuaciones de campo a partir de un principio de mínima acción.

En la primera derivación que hace Einstein de las ecuaciones de campo asimétrico buscó una densidad lagrangiana de la que debía derivarse la ecuación (4.A). El procedimiento que siguió fue el siguiente. Por (3.A) sabemos que $D_i\ln\sqrt{g}$ es un tensor, en efecto

$$D_i\ln\sqrt{g}=\frac{1}{\sqrt{g}}D_i\sqrt{g}=\frac{1}{2g}D_i g=\frac{1}{2}g^{pq}D_i g_{\underset{+}{p}\underset{-}{q}},$$

como el último miembro es un tensor de segundo orden covariante multiplicado por un tensor de tercer orden covariante, el resultado es un tensor covariante que llamamos S_i. Por la definición de la derivada covariante del tensor métrico se tiene

$$S_i=D_i\ln\sqrt{g}=\frac{1}{2}g^{pq}\partial_i g_{pq}-\frac{1}{2}\left(\Gamma_{si}{}^{s}+\Gamma_{is}{}^{s}\right)$$

y como

$$\delta g=gg^{pq}\delta g_{pq}\qquad\Rightarrow\qquad\partial_i g=gg^{pq}\partial_i g_{pq}$$

entonces

$$S_i=\partial_i\ln\sqrt{g}-\frac{1}{2}\left(\Gamma_{si}{}^{s}+\Gamma_{is}{}^{s}\right).$$

Su derivada covariante que llamaremos S_{ik} es

$$S_{ik}=D_k S_{\underset{+}{i}}=\partial_k\partial_i\ln\sqrt{g}-\frac{1}{2}\partial_k\left(\Gamma_{si}{}^{s}+\Gamma_{is}{}^{s}\right)-\partial_s\ln\sqrt{g}\,\Gamma_{ik}{}^{s}+\frac{1}{2}\Gamma_{ik}{}^{r}\left(\Gamma_{sr}{}^{s}+\Gamma_{rs}{}^{s}\right).$$

El tensor S_{ik} no es hermítico a consecuencia del segundo sumando. Entonces tenemos que hallar un nuevo tensor S_{ik} resultado del valor medio del tensor S_{ik} y del traspuesto de su complejo conjugado

$$\overline{S}_{ik}=\frac{1}{2}\left[S_{ik}\left(\Gamma\right)+S_{ki}\left(\tilde{\Gamma}\right)\right]=\partial_k\partial_i\ln\sqrt{g}-\partial_s\ln\sqrt{g}\Gamma_{ik}{}^{s}+\frac{1}{2}\Gamma_{ik}{}^{r}\left(\Gamma_{sr}{}^{s}+\Gamma_{rs}{}^{s}\right)-\frac{1}{4}\left(\Gamma_{si,k}^{\ s}+\Gamma_{is,k}^{\ s}+\Gamma_{ks,i}^{\ s}+\Gamma_{sk,i}^{\ s}\right),$$

que tiene la propiedad de ser un tensor hermítico.

Einstein buscó una densidad lagrangiana de la que se pudiera derivar (4.A). Para conseguir este objetivo definió el tensor

$$\overline{R}_{ik}+\overline{S}_{ik}=-\Gamma_{ik,r}^{\ r}+\Gamma_{ir}{}^{t}\Gamma_{tk}{}^{r}+\partial_k\partial_i\ln\sqrt{g}-\partial_s\ln\sqrt{g}\Gamma_{ik}{}^{s}+\frac{1}{4}\left(\Gamma_{is,k}^{\ s}+\Gamma_{sk,i}^{\ s}-\Gamma_{si,k}^{\ s}-\Gamma_{ks,i}^{\ s}\right).$$

que es un tensor hermítico, al igual que es su último sumando. Einstein tomó para construir la densidad lagrangiana el tensor

$$\hat{R}_{ik}=\overline{R}_{ik}+\overline{S}_{ik}-\frac{1}{4}\left(\tau_{i,k}-\tau_{k,i}\right)=-\Gamma_{ik,r}^{\ r}+\Gamma_{ir}{}^{t}\Gamma_{tk}{}^{r}+\partial_k\partial_i\ln\sqrt{g}-\partial_s\ln\sqrt{g}\Gamma_{ik}{}^{s}\qquad(5.A)$$

que también es un tensor hermítico.

La densidad lagrangiana se define por

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{g}^{ik}\hat{R}_{ik},\qquad(6.A)$$

que depende de la conexión y su primera derivada, además depende tensor métrico, de su primera y de su segunda derivada. Como tanto $\boldsymbol{g}^{ik}$ como $\hat{R}_{ik}$ son hermíticos, entonces

$$\overline{\boldsymbol{L}} = \overline{\boldsymbol{g}}^{ik}\overline{\hat{R}}_{ik} = \boldsymbol{g}^{ki}\hat{R}_{ki} = \boldsymbol{g}^{ik}\hat{R}_{ik} = \boldsymbol{L} \tag{7.A}$$

lo que significa que la densidad lagrangiana es una función real.

7-A.- Ecuaciones de campo

En el año 1945 Einstein planteó su primera teoría hermítica de campo unificado, obteniendo las ecuaciones de campo por un método mixto, como luego veremos. El procedimiento fue criticado por el mismo Einstein al año siguiente en el trabajo que publicó en colaboración con Straus. Exponemos a continuación la primera deducción de Einstein.

Las ecuaciones de campo se obtienen a partir de un principio variacional. La acción del campo es

$$I = \int \boldsymbol{L}\, d\Omega$$

donde $d\Omega$ es el producto de las diferenciales de las coordenadas. Si se varían arbitrariamente las componentes de la conexión y del tensor métrico, con la condición de que estas variaciones así como la variación de la primera derivada del tensor métrico se anulen en los límites del volumen de integración, entonces la variación de la acción es nula.

Debemos advertir de una condición que se no encuentra expresamente en el trabajo original de Einstein. La densidad lagrangiana (6.A) depende de las derivadas segundas del tensor métrico, lo que en general no ocurre en las teorías métrico-afín, por tanto es necesario poner como exigencia en el principio variacional que las variaciones de las primeras derivadas del tensor métrico se anulen en la superficie de integración.

El principio de mínima acción es por tanto

$$\delta I = \delta \int \boldsymbol{g}^{ik}\hat{R}_{ik}\, d\Omega = \delta \int \boldsymbol{g}^{ik}\left(-\Gamma_{ik,r}^{\ \ r} + \Gamma_{ir}^{\ \ t}\Gamma_{tk}^{\ \ r} + \partial_k \partial_i \ln\sqrt{g} - \partial_s \ln\sqrt{g}\,\Gamma_{ik}^{\ \ s}\right) d\Omega, \tag{8.A}$$

estamos en una teoría métrico-afín, es decir que variamos tanto la conexión como el tensor métrico, obteniendo por tanto, dos conjuntos de ecuaciones, la primera es la ecuación auxiliar, o sea, la que nos relaciona la conexión con el tensor métrico y sus derivadas, mientras que el segundo conjunto son las ecuaciones de campo.

Al variar la conexión obtenemos

$$\delta I_1 = \int \left[-\boldsymbol{g}^{ik}\left(\delta\Gamma_{ik}^{\ \ r}\right)_{,r} + \boldsymbol{g}^{ik}\Gamma_{ir}^{\ \ t}\delta\Gamma_{tk}^{\ \ r} + \boldsymbol{g}^{ik}\delta\Gamma_{ir}^{\ \ t}\Gamma_{tk}^{\ \ r} - \boldsymbol{g}^{ik}\partial_s \ln\sqrt{g}\,\delta\Gamma_{ik}^{\ \ s} \right] d\Omega = 0$$

al aplicar el teorema de Gauss

$$\int_V \partial_r\left(\sqrt{g}A^k\right) d\Omega = \int_\Sigma A^k dS_k$$

siendo dS_k el vector de superficie bidimensional, entonces el término

$$\int \partial_r\left(\sqrt{g}g^{ik}\delta\Gamma_{ik}^{\ \ r}\right) d\Omega = \int g^{ik}\delta\Gamma_{ik}^{\ \ r} dS_r$$

se anula, puesto que la variación de la conexión se anula en la superficie de integración, tras lo cual encontramos

$$\delta I_1 = \int \left(\partial_r \boldsymbol{g}^{ik}\delta\Gamma_{ik}^{\ \ r} + \boldsymbol{g}^{ik}\Gamma_{ir}^{\ \ t}\delta\Gamma_{tk}^{\ \ r} + \boldsymbol{g}^{ik}\Gamma_{tk}^{\ \ r}\delta\Gamma_{ir}^{\ \ t} - \boldsymbol{g}^{ik}\partial_s \ln\sqrt{g}\,\delta\Gamma_{ik}^{\ \ s}\right) d\Omega =$$
$$= \int \left(\partial_r \boldsymbol{g}^{ik} + \boldsymbol{g}^{sk}\Gamma_{sr}^{\ \ i} + \boldsymbol{g}^{is}\Gamma_{rs}^{\ \ k} - \boldsymbol{g}^{ik}\partial_r \ln\sqrt{g}\right)\delta\Gamma_{ik}^{\ \ r} d\Omega = 0,$$

como la variación de la conexión es arbitraria obtenemos las ecuaciones

$$\partial_r \boldsymbol{g}^{ik} + \boldsymbol{g}^{sk}\Gamma_{sr}^{\ \ i} + \boldsymbol{g}^{is}\Gamma_{rs}^{\ \ k} - \boldsymbol{g}^{ik}\partial_r \ln\sqrt{g} = 0 \tag{9.A}$$

o bien

$$\sqrt{g}\partial_r g^{ik} + g^{ik}\partial_r\sqrt{g} + \sqrt{g}g^{sk}\Gamma_{sr}^{\ \ i} + \sqrt{g}g^{is}\Gamma_{rs}^{\ \ k} - \sqrt{g}g^{ik}\partial_r \ln\sqrt{g} = 0$$

de donde se deduce

$$\partial_r g^{ik} + g^{sk}\Gamma_{sr}^{\ \ i} + g^{is}\Gamma_{rs}^{\ \ k} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad D_r g^{\underset{+-}{ik}} = 0. \tag{10.A}$$

Por (10.A) se encuentra que la derivada covariante del determinante del tensor métrico es nula, en efecto

$$D_r\sqrt{g} = \frac{1}{2\sqrt{g}}D_r g = -\frac{1}{2}\sqrt{g}g_{pq}D_r g^{\underset{+-}{pq}} = 0$$

además de (10.A) también se deduce que

$$D_r g_{\underset{+-}{pq}} = 0$$

por tanto serán nulas las derivadas covariantes de las densidades tensoriales del tensor métrico

$$D_r \boldsymbol{g}_{\underset{+-}{pq}} = 0; \qquad D_r \boldsymbol{g}^{\overset{pq}{+-}} = 0.$$

El segundo grupo de ecuaciones de campo se obtiene haciendo la variación (8.A) respecto al tensor métrico

$$\delta I_2 = \int \left(\hat{R}_{ik} \delta \boldsymbol{g}^{ik} + \boldsymbol{g}^{ik} \delta \hat{R}_{ik} \right) d\Omega = \int \left[\hat{R}_{ik} \delta \boldsymbol{g}^{ik} + \boldsymbol{g}^{ik} \partial_k \partial_i \left(\delta \ln \sqrt{g} \right) - \boldsymbol{g}^{ik} \partial_s \left(\delta \ln \sqrt{g} \right) \Gamma_{ik}{}^{s} \right] d\Omega = 0, \quad (11.A)$$

volvemos a usar el teorema de Gauss; así el último de los sumandos del último miembro es

$$-\int \boldsymbol{g}^{ik} \partial_s \left(\delta \ln \sqrt{g} \right) \Gamma_{ik}{}^{s} d\Omega = -\int \partial_s \left(\boldsymbol{g}^{ik} \Gamma_{ik}{}^{s} \delta \ln \sqrt{g} \right) d\Omega + \int \partial_s \left(\boldsymbol{g}^{ik} \Gamma_{ik}{}^{s} \right) \delta \ln \sqrt{g}\, d\Omega =$$
$$= -\int g^{ik} \Gamma_{ik}{}^{s} \delta \ln \sqrt{g}\, dS_s + \int \partial_s \left(\boldsymbol{g}^{ik} \Gamma_{ik}{}^{s} \right) \delta \ln \sqrt{g}\, d\Omega = \int \partial_s \left(\boldsymbol{g}^{ik} \Gamma_{ik}{}^{s} \right) \delta \ln \sqrt{g}\, d\Omega,$$

donde la integral de superficie se anula porque en ella son nulas las variaciones del tensor métrico, por tanto también es nula la variación de su determinante. El segundo sumando del último término de (11.A) es

$$\int \boldsymbol{g}^{ik} \partial_k \partial_i \left(\delta \ln \sqrt{g} \right) d\Omega = \int \partial_k \left[\boldsymbol{g}^{ik} \partial_i \left(\delta \ln \sqrt{g} \right) \right] d\Omega - \int \partial_k \boldsymbol{g}^{ik} \partial_i \left(\delta \ln \sqrt{g} \right) d\Omega =$$
$$= \int g^{ik} \partial_i \left(\delta \ln \sqrt{g} \right) dS_k - \int \partial_i \left(\partial_k \boldsymbol{g}^{ik} \delta \ln \sqrt{g} \right) d\Omega + \int \partial_i \partial_k \boldsymbol{g}^{ik} \delta \ln \sqrt{g}\, d\Omega =$$
$$= \int g^{ik} \delta \left(\partial_i \ln \sqrt{g} \right) dS_k - \int \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_k \boldsymbol{g}^{ik} \delta \ln \sqrt{g} dS_i + \int \partial_i \partial_k \boldsymbol{g}^{ik} \delta \ln \sqrt{g}\, d\Omega,$$

tanto las variaciones del tensor métrico como las variaciones de sus primeras derivadas son nulas en los límites de integración, de tal forma que las dos integrales de superficie anteriores se anulan, por tanto tendremos

$$\delta I_2 = \int \left(\hat{R}_{ik} \delta \boldsymbol{g}^{ik} + \boldsymbol{g}^{ik} \delta \hat{R}_{ik} \right) d\Omega = \int \left\{ \hat{R}_{ik} \delta \boldsymbol{g}^{ik} + \left[\partial_i \partial_k \boldsymbol{g}^{ik} + \partial_s \left(\boldsymbol{g}^{ik} \Gamma_{ik}{}^{s} \right) \right] \delta \ln \sqrt{g} \right\} d\Omega = 0. \quad (12.A)$$

Hay que poner la variación del determinante del tensor métrico en función de la variación de la densidad del tensor métrico

$$\delta \ln \sqrt{g} = \frac{1}{\sqrt{g}} \delta \sqrt{g} = -\frac{1}{2} g_{pq} \delta g^{pq} = -\frac{1}{2\sqrt{g}} g_{pq} \delta \boldsymbol{g}^{pq} + \frac{1}{2\sqrt{g}} g_{pq} g^{pq} \delta \sqrt{g} =$$
$$= -\frac{1}{2\sqrt{g}} g_{pq} \delta \boldsymbol{g}^{pq} + 2\delta \ln \sqrt{g}$$

por tanto

$$\delta \ln \sqrt{g} = \frac{1}{2\sqrt{g}} g_{pq} \delta \boldsymbol{g}^{pq},$$

volviendo a (12.A) y teniendo en cuenta que la variación del tensor métrico es arbitraria, nos queda

$$\hat{R}_{ik} + \frac{1}{2\sqrt{g}} \left[\partial_m \partial_n \boldsymbol{g}^{mn} + \partial_s \left(\boldsymbol{g}^{mn} \Gamma_{mn}^{\ \ s} \right) \right] g_{ik} = 0. \quad (13.A)$$

De la deducido del epígrafe 4-A se tiene

$$D_r \sqrt{g} = \partial_r \sqrt{g} - \frac{1}{2} \sqrt{g} \left(\Gamma_{sr}{}^{s} + \Gamma_{rs}{}^{s} \right) = 0 \ \Rightarrow \ \partial_r \ln \sqrt{g} = \frac{1}{2} \left(\Gamma_{sr}{}^{s} + \Gamma_{rs}{}^{s} \right),$$

entonces (9.A) queda

$$\partial_r \boldsymbol{g}^{ik} + \boldsymbol{g}^{sk} \Gamma_{sr}^{\ \ i} + \boldsymbol{g}^{is} \Gamma_{rs}{}^{k} - \frac{1}{2} \boldsymbol{g}^{ik} \left(\Gamma_{sr}{}^{s} + \Gamma_{rs}{}^{s} \right) = 0.$$

particularizando para $k = r$

$$\partial_r \boldsymbol{g}^{ir} + \boldsymbol{g}^{sr} \Gamma_{sr}^{\ \ i} - \frac{1}{2} \boldsymbol{g}^{ir} \tau_r = 0,$$

si ahora hacemos $i = r$ y luego cambiando el índice k por i obtenemos

$$\partial_r \boldsymbol{g}^{ri} + \boldsymbol{g}^{sr} \Gamma_{sr}^{\ \ i} + \frac{1}{2} \boldsymbol{g}^{ri} \tau_r = 0.$$

hallando las derivadas de ambas expresiones llegamos a

$$\partial_i \partial_r \boldsymbol{g}^{ir} + \left(\boldsymbol{g}^{sr} \Gamma_{sr}^{\ \ i} \right)_{,i} = 1/2 \left(\boldsymbol{g}^{ir} \tau_r \right)_{,i}$$
$$\partial_i \partial_r \boldsymbol{g}^{ri} + \left(\boldsymbol{g}^{sr} \Gamma_{sr}^{\ \ i} \right)_{,i} = -1/2 \left(\boldsymbol{g}^{ri} \tau_r \right)_{,i}$$

como *i, r* son índices mudos, entonces de lo anterior se llega a

$$\left(\mathfrak{g}^{ir}\tau_r\right)_{,i} = -\left(\mathfrak{g}^{ri}\tau_r\right)_{,i} \quad \Rightarrow \quad \left[\mathfrak{g}^{(ir)}\tau_r\right]_{,i} = 0$$

encontrando finalmente

$$\partial_i\partial_r\mathfrak{g}^{ir} + \left(\mathfrak{g}^{sr}\Gamma_{sr}{}^{i}\right)_{,i} = \frac{1}{2}\left[\mathfrak{g}^{[ir]}\tau_r\right]_{,i},$$

expresión que llevamos a (13.A)

$$\hat{R}_{ik} + \frac{1}{4\sqrt{g}}\left[\mathfrak{g}^{[mr]}\tau_r\right]_{,m} g_{ik} = 0,$$

que conjuntamente como (10.A) son las ecuaciones de campo.

Al final de su investigación, Einstein sugirió que al anterior conjunto habría que añadirle la condición $\tau_r = 0$ con lo cual se logra que las ecuaciones finales de campo sean

$$D_r g^{\underset{+-}{ik}} = 0 \qquad \tau_i = 0 \qquad \hat{R}_{ik} = 0 \tag{14.A}$$

nótese que si es nulo el vector de torsión, entonces el tensor de Ricci coincide con $\hat{R}_{ik}$. En efecto, como

$$\partial_i \ln\sqrt{g} = \frac{1}{2}\left(\Gamma_{ri}{}^{r} + \Gamma_{ir}{}^{r}\right)$$

y

$$\tau_i = \Gamma_{ir}{}^{r} - \Gamma_{ri}{}^{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma_{ir}{}^{r} = \Gamma_{ri}{}^{r} \quad \Rightarrow \partial_i \ln\sqrt{g} = \Gamma_{ir}{}^{r}, \tag{15.A}$$

si este resultado se lleva a (5.A) se encuentra que $\hat{R}_{ik} = R_{ik}$.

Notemos que (14.A) es muy similar a las ecuaciones de la gravitación, representando por tanto una teoría que generaliza a la Relatividad General, tal como quería Einstein. Debemos notar que se cumple en general la identidad

$$D_r\mathfrak{g}^{\underset{+-}{ir}} - D_r\mathfrak{g}^{\underset{+-}{ri}} = 2\partial_r\mathfrak{g}^{[ir]} - \mathfrak{g}^{(ir)}\tau_r \tag{16.A}$$

como se comprueba por cálculo directo; entonces si se cumple (14.A) será

$$\partial_r\mathfrak{g}^{[ir]} = 0.$$

Al sistema (14.A) se le denomina sistema de ecuaciones fuertes (y no son enteramente deducibles de un principio variacional) y que distinguimos de las ecuaciones débiles que deduciremos más adelante. Primeramente notamos que hemos usado un método mixto, hemos aplicado el principio variacional y luego hemos exigido la nulidad del vector de torsión *. Este procedimiento no garantiza la compatibilidad de las ecuaciones, o al menos reduce su grado de compatibilidad, esto es así porque hay más ecuaciones que variables, son 84 las ecuaciones diferenciales del sistema (14.A) pero son 80 las variables (64 de la conexión y 16 del tensor métrico), por tanto el sistema está sobredeterminado. Cabe entonces preguntarse si las ecuaciones (14.A) son suficientes para tener como soluciones las que corresponden al mundo físico.

Al igual que ocurre en Relatividad General las ecuaciones (14.A) no pueden determinar unívocamente una solución para g_{ik}. En efecto, si g_{ik} fuera una solución de (14.A), también g'_{ik}, derivada de la anterior por una transformación de coordenades $x'^k = x'^k(x^i)$, debe ser solución de (14.A). Esto quiere decir que existen cuatro ecuaciones complementarias a (14.A), que son llamadas las identidades de Bianchi. Como la ambigüedad

---

* El formalismo métrico para hallar las ecuaciones de la Relatividad General sigue este proceso mixto. Es decir, *a priori* se da una de las ecuaciones de campo $D_r g_{ik} = 0$, que nos permite obtener la relación entre la conexión y el tensor métrico; y luego se aplica el principio variacional para obtener el otro grupo de ecuaciones de campo $R_{ik} = 0$. Pero en este caso no hay incompatibiliad entre los dos grupos de ecuaciones, puesto que la conexión no aparece en la ecuación $R_{ik} = 0$ que depende exclusivamente del tensor métrico.

Einstein dedicó varias investigaciones al problema de la compatibilidad de las ecuaciones de campo, en particular concluyó que el sistema de ecuaciones fuertes (14.A) «no es aceptable desde el punto de vista físico», Einstein, A.; Kaufman, B.: «Sur l'état actuel de la théorie générale de la gravitation», en *Louis de Broglie. Physicien et penseur*, Albin Michel, 1953, pp. 321-342.

de la solución es por las cuatro ecuaciones de transformación de las coordenadas $x'^k = x'^k(x^i)$ entonces debe de existir igual número de ecuaciones complementarias.

Puede elegirse una gauge determinada, es decir un determinado sistema de coordenadas y entonces quedará eliminada la ambigüedad. En Relatividad General es habitual utilizar el sistema de coordenadas armónico, con lo cual se obtiene una definida solución para el tensor métrico y que además simplifica considerablemente las ecuaciones de campo. Podría pensarse que la segunda de las ecuaciones (14.A) define una gauge, pero es una ecuación covariante y no representa una condición coordenada, es decir no singulariza un sistema de coordenadas. Las condiciones coordenadas deben ser no covariantes, es decir válidas sólo en algunos sistemas de coordenadas, pero no en todos.

B) EINSTEIN-STRAUS (1946): Las ecuaciones débiles de campo

1-B.- La densidad lagrangiana y las ecuaciones de campo de Einstein-Straus

Advertido de las dificultades de las ecuaciones (14.A), Einstein y Straus plantearon de nuevo la teoría [24], pero ahora aplicando exclusivamente el principio variacional, lo que garantiza que las ecuaciones que se obtienen son compatibles entre ellas.

La densidad lagrangiana de Einstein-Straus es

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{g}^{ik}\overline{R}_{ik} + \boldsymbol{h}^i\tau_i + b_i\boldsymbol{g}^{[ik]}{}_{,k} \tag{1.B}$$

donde $\boldsymbol{h}^i$ y b_i son multiplicadores de Lagrange, $\overline{R}_{ik}$ es el tensor de Ricci hermítico y τ_i es el vector de torsión definido por

$$\tau_i = \Gamma_{is}{}^s - \Gamma_{si}{}^s .$$

Nótese que $\boldsymbol{g}^{[ik]}{}_{,k}$ es una densidad vectorial, tal como se deduce (16.A), ya que todos los restantes términos de esa expresión son tensores.

Ahora aplicamos el principio variacional. Variamos respecto a $\boldsymbol{h}^i$, b_i, $\Gamma_{ik}{}^r$ y $\boldsymbol{g}^{ik}$. Al variar respecto a $\boldsymbol{h}^i$ se halla

$$\tau_i = 0, \tag{2.B}$$

y al variar respecto a b_i se encuentra

$$\boldsymbol{g}^{[ik]}{}_{,k} = 0. \tag{3.B}$$

Para hacer la variación respecto a $\Gamma_{ik}{}^r$ tenemos que usar la identidad de Palatini que por cálculo directo se comprueba que es

$$\delta R_{ik} = -D_r\left(\delta\Gamma_{\underset{+}{i}\underset{-}{k}}{}^{\underset{0}{r}}\right) + \frac{1}{2}D_k\left(\delta\Gamma_{\underset{+}{i}\underset{+}{r}}{}^{r}\right) + \frac{1}{2}D_i\left(\delta\Gamma_{\underset{+}{r}\underset{-}{k}}{}^{r}\right), \tag{4.B}$$

donde la derivada covariante del primer sumando es definida por

$$D_r\left(\delta\Gamma_{\underset{+}{i}\underset{-}{k}}{}^{\underset{0}{r}}\right) = \partial_r\left(\delta\Gamma_{ik}{}^r\right) - \delta\Gamma_{sk}{}^r\Gamma_{ir}{}^s - \delta\Gamma_{is}{}^r\Gamma_{rk}{}^s + \delta\Gamma_{ik}{}^s\frac{1}{2}\left(\Gamma_{sr}{}^r + \Gamma_{rs}{}^r\right).$$

Para adaptar el teorema de Gauss a las derivadas covariantes que aparecen en (4.B) tenemos que comprobar previamente que se cumple

$$D_r\left(\boldsymbol{g}^{\underset{+}{i}\underset{-}{k}}\delta\Gamma_{\underset{+}{i}\underset{-}{k}}{}^{\underset{0}{r}}\right) = \boldsymbol{g}^{ik}D_r\left(\delta\Gamma_{\underset{+}{i}\underset{-}{k}}{}^{\underset{0}{r}}\right) + \delta\Gamma_{ik}{}^r D_r\boldsymbol{g}^{\underset{+}{i}\underset{-}{k}}. \tag{5.B}$$

Si definimos para simplificar la densidad vectorial

$$\boldsymbol{H}^{\underset{0}{r}} \equiv \boldsymbol{g}^{\underset{+}{i}\underset{-}{k}}\delta\Gamma_{\underset{+}{i}\underset{-}{k}}{}^{\underset{0}{r}}$$

entonces teniendo en cuenta que por definición

$$D_r H^{\underset{0}{r}} = \partial_r H^r + H^s\frac{1}{2}\left(\Gamma_{sr}{}^r + \Gamma_{rs}{}^r\right),$$

y que

$$D_r\sqrt{g} = \partial_r\sqrt{g} - \frac{1}{2}\sqrt{g}\left(\Gamma_{rs}{}^s + \Gamma_{sr}{}^s\right)$$

encontramos

$$D_r \boldsymbol{H}^{\underset{0}{r}} = \partial_r \boldsymbol{H}^r = \partial_r \left(\boldsymbol{g}^{ik} \delta \Gamma_{ik}{}^r \right) \tag{6.B}$$

que es lo mismo que se encuentra cuando se desarrolla (5.B), lo que significa la validez de (5.B), que será usada a la hora de aplicar el teorema integral de Gauss como veremos más adelante.

Ahora tenemos que comprobar si es aplicable la relación

$$D_k \left(\boldsymbol{g}^{\underset{+}{i}\underset{-}{k}} \delta \Gamma_{\underset{+}{i}\underset{+}{r}}{}^r \right) = \boldsymbol{g}^{ik} D_k \left(\delta \Gamma_{\underset{+}{i}\underset{+}{r}}{}^r \right) + \delta \Gamma_{ir}{}^r D_k \boldsymbol{g}^{\underset{+}{i}\underset{-}{k}}, \tag{7.B}$$

procedemos igual que antes; definimos la densidad vectorial

$$\boldsymbol{H}^{\underset{-}{k}} \equiv \boldsymbol{g}^{\underset{+}{i}\underset{-}{k}} \delta \Gamma_{\underset{+}{i}\underset{+}{r}}{}^r,$$

y encontramos que

$$D_r \boldsymbol{H}^{\underset{-}{r}} = \partial_r \boldsymbol{H}^r - \frac{1}{2} \boldsymbol{H}^r \tau_r \tag{8.B}$$

donde recordamos que hemos definido $\tau_r = \Gamma_{rs}{}^s - \Gamma_{sr}{}^s$ e igual resultado que en (8.B) se encuentra cuando se desarrolla la expresión (7.B), con lo que de nuevo demostramos que también para la segunda de las derivadas covariantes que aparece en (4.B) es de aplicación la regla de derivación de Leibnitz.

Utilizando el mismo razonamiento se encuentra que para el tercero de los sumandos de (4.B) se cumple

$$D_i \left(\boldsymbol{g}^{\underset{+}{i}\underset{-}{k}} \delta \Gamma_{\underset{+}{r}\underset{-}{k}}{}^r \right) = \boldsymbol{g}^{\underset{+}{i}\underset{-}{k}} D_i \left(\delta \Gamma_{\underset{+}{r}\underset{-}{k}}{}^r \right) + \delta \Gamma_{\underset{+}{r}\underset{-}{k}}{}^r D_i \boldsymbol{g}^{\underset{+}{i}\underset{-}{k}},$$

siempre y cuando definamos

$$\boldsymbol{H}^{\underset{+}{i}} \equiv \boldsymbol{g}^{\underset{+}{i}\underset{-}{k}} \delta \Gamma_{\underset{+}{r}\underset{-}{k}}{}^r$$

entonces hallamos

$$D_i \boldsymbol{H}^{\underset{+}{i}} = \partial_i \boldsymbol{H}^i + \frac{1}{2} \boldsymbol{H}^i \tau_i . \tag{9.B}$$

Con los resultados (6.B), (8.B) y (9.B) el teorema de Gauss [95] queda en cada caso

$$\int D_r \left(\boldsymbol{g}^{\underset{+}{i}\underset{-}{k}} \delta \Gamma_{\underset{+}{i}\underset{-}{k}}{}^{\underset{0}{r}} \right) d\Omega = \int \partial_r \left(\boldsymbol{g}^{ik} \delta \Gamma_{ik}{}^r \right) d\Omega = \int g^{ik} \delta \Gamma_{ik}{}^r dS_r$$

$$\int D_k \left(\boldsymbol{g}^{\underset{+}{i}\underset{-}{k}} \delta \Gamma_{\underset{+}{i}\underset{+}{r}}{}^r \right) d\Omega = \int \partial_k \left(\boldsymbol{g}^{ik} \delta \Gamma_{ir}{}^r \right) d\Omega - \frac{1}{2} \int \boldsymbol{g}^{ik} \delta \Gamma_{ir}{}^r \tau_k \, d\Omega = \int g^{ik} \delta \Gamma_{ir}{}^r dS_k - \frac{1}{2} \int \boldsymbol{g}^{ik} \delta \Gamma_{ir}{}^r \tau_k \, d\Omega$$

$$\int D_i \left(\boldsymbol{g}^{\underset{+}{i}\underset{-}{k}} \delta \Gamma_{\underset{+}{r}\underset{-}{k}}{}^r \right) d\Omega = \int \partial_i \left(\boldsymbol{g}^{ik} \delta \Gamma_{rk}{}^r \right) d\Omega + \frac{1}{2} \int \boldsymbol{g}^{ik} \delta \Gamma_{rk}{}^r \tau_i \, d\Omega = \int g^{ik} \delta \Gamma_{rk}{}^r dS_i + \frac{1}{2} \int \boldsymbol{g}^{ik} \delta \Gamma_{rk}{}^r \tau_i \, d\Omega.$$

Ya estamos en condiciones de aplicar el principio de mínima acción a la densidad lagrangiana (1.B) para la variación de las componentes de la conexión

$$\delta I = \int \left(\boldsymbol{g}^{ik} \delta \bar{R}_{ik} + \boldsymbol{h}^i \delta \tau_i \right) d\Omega = \int \left[\boldsymbol{g}^{ik} \delta \bar{R}_{ik} + \boldsymbol{h}^i \left(\delta \Gamma_{is}{}^s - \delta \Gamma_{si}{}^s \right) \right] d\Omega = 0, \tag{10.B}$$

el primer sumando del último miembro es

$$\int \boldsymbol{g}^{ik} \delta \bar{R}_{ik} d\Omega = -\int \boldsymbol{g}^{ik} D_r \left(\delta \Gamma_{\underset{+}{i}\underset{-}{k}}{}^{\underset{0}{r}} \right) d\Omega + \frac{1}{2} \int \boldsymbol{g}^{ik} D_k \left(\delta \Gamma_{\underset{+}{i}\underset{+}{r}}{}^r \right) d\Omega + \frac{1}{2} \int \boldsymbol{g}^{ik} D_i \left(\delta \Gamma_{\underset{+}{r}\underset{-}{k}}{}^r \right) d\Omega$$

que al integrar por partes, aplicar el teorema de Gauss y tener en cuenta que en la superficie de integración la variación de la conexión es nula, obtenemos

$$\int \boldsymbol{g}^{ik} \delta \bar{R}_{ik} d\Omega = \int D_r \boldsymbol{g}^{\underset{+}{i}\underset{-}{k}} \delta \Gamma_{ik}{}^r d\Omega - \frac{1}{2} \int D_k \boldsymbol{g}^{\underset{+}{i}\underset{-}{k}} \delta \Gamma_{ir}{}^r d\Omega -$$

$$-\frac{1}{4} \int \boldsymbol{g}^{ik} \delta \Gamma_{ir}{}^r \tau_k \, d\Omega - \frac{1}{2} \int D_i \boldsymbol{g}^{\underset{+}{i}\underset{-}{k}} \delta \Gamma_{rk}{}^r d\Omega + \frac{1}{4} \int \boldsymbol{g}^{ik} \delta \Gamma_{rk}{}^r \tau_i \, d\Omega$$

agrupando todas las integrales anteriores

$$\int \boldsymbol{g}^{ik} \delta \bar{R}_{ik} d\Omega = \int \left(D_r \boldsymbol{g}^{\underset{+}{i}\underset{-}{k}} - \frac{1}{2} D_s \boldsymbol{g}^{\underset{+}{i}\underset{-}{s}} \delta_r^k - \frac{1}{2} D_s \boldsymbol{g}^{\underset{+}{s}\underset{-}{k}} \delta_r^i - \frac{1}{4} \boldsymbol{g}^{is} \delta_k^r \tau_s + \frac{1}{4} \boldsymbol{g}^{sk} \delta_r^i \tau_s \right) \delta \Gamma_{ik}{}^r d\Omega.$$

Al añadir la segunda integral del último término de (10.B) encontramos

$$\delta I = \int \left(D_r \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}} - \frac{1}{2} D_s \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{is}} \delta_r^k - \frac{1}{2} D_s \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{sk}} \delta_r^i - \frac{1}{4} \boldsymbol{g}^{is} \delta_k^r \tau_s + \frac{1}{4} \boldsymbol{g}^{sk} \delta_r^i \tau_s + \boldsymbol{h}^i \delta_r^k - \boldsymbol{h}^k \delta_r^i \right) \delta \Gamma_{ik}{}^r d\Omega ,$$

y como la variación de la conexión es arbitraria, entonces para que la anterior integral sea nula debe de cumplirse que

$$D_r \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}} - \frac{1}{2} D_s \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{is}} \delta_r^k - \frac{1}{2} D_s \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{sk}} \delta_r^i - \frac{1}{4} \boldsymbol{g}^{is} \delta_k^r \tau_s + \frac{1}{4} \boldsymbol{g}^{sk} \delta_r^i \tau_s + \boldsymbol{h}^i \delta_r^k - \boldsymbol{h}^k \delta_r^i = 0 \qquad (11.B)$$

que es el segundo grupo de ecuaciones de campo.

(11.B) se puede simplificar. Como ya se encontró, el vector de torsión es nulo, entonces (11.B) queda

$$D_r \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}} - \frac{1}{2} D_s \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{is}} \delta_r^k - \frac{1}{2} D_s \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{sk}} \delta_r^i + \boldsymbol{h}^i \delta_r^k - \boldsymbol{h}^k \delta_r^i = 0, \qquad (12.B)$$

al contraer la anterior ecuacion primero respecto a *r* y *k* y después respecto a *i* y *r* se encuentra

$$\begin{aligned} D_r \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ir}} + \frac{1}{2} D_r \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ri}} - 3\boldsymbol{h}^i &= 0 \\ D_r \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ri}} + \frac{1}{2} D_r \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ir}} + 3\boldsymbol{h}^i &= 0, \end{aligned} \qquad (13.B)$$

y su suma es

$$D_r \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ir}} + D_r \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ri}} = 0$$

pero por otra parte se cumple

$$D_r \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ir}} - D_r \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ri}} = 2\partial_r \boldsymbol{g}^{[ir]} - \boldsymbol{g}^{(ir)} \tau_r = 0$$

por tanto debe de cumplirse

$$D_r \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ir}} = 0 ; \quad D_r \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ri}} = 0$$

entonces de cualquiera de las ecuaciones (13.B) se deduce que $\boldsymbol{h}^i = 0$ y llevando este resultado a (12.B)

$$D_r \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}} = 0 \qquad (14.B)$$

que es el grupo de ecuaciones de campo resultante de la variación de la acción respecto a la conexión afín.

Finalmente vamos a variar la acción de la densidad lagrangiana (1.B) respecto a $\boldsymbol{g}^{ik}$

$$\delta I = \int \left[\overline{R}_{ik} \delta \boldsymbol{g}^{ik} + b_i \frac{1}{2} \left(\delta \boldsymbol{g}^{ik}{}_{,k} - \delta \boldsymbol{g}^{ki}{}_{,k} \right) \right] d\Omega$$

integrando por partes y aplicando el teorema de Gauss tenemos

$$\delta I = \int \left[\overline{R}_{ik} + \frac{1}{2} b_{i,k} - \frac{1}{2} b_{k,i} \right] \delta \boldsymbol{g}^{ik} d\Omega$$

y como la variación del tensor métrico es arbitraria, se encuentra para el cuarto grupo de ecuaciones de campo

$$\overline{R}_{ik} + \frac{1}{2} \left(b_{i,k} - b_{k,i} \right) = 0.$$

Reuniendo los resultados encontramos que las ecuaciones de campo son

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{g}^{[ik]}{}_{,k} = 0 \\ &\tau_i = 0, \\ &D_r \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}} = 0 \\ &\overline{R}_{ik} + \frac{1}{2} \left(b_{i,k} - b_{k,i} \right) = 0, \end{aligned} \qquad (15.B)$$

ya hemos visto que la primera ecuación se deriva de la segunda y de la tercera. Si el vector de torsión es nulo, entonces $\Gamma_{ir}{}^r = \Gamma_{ri}{}^r$ y como se ha demostrado en 7-A

$$\partial_i \ln \sqrt{g} = \frac{1}{2} \Gamma_{ir}{}^r \quad \Rightarrow \quad \Gamma_{ir,k}{}^r = \Gamma_{rk,i}{}^r$$

con ambos resultados se concluye que $\overline{R}_{ik} = R_{ik}$.

En el sistema (15.B) hay 84 ecuaciones ($4 + 64 + 16$) y 84 variables ($\boldsymbol{g}^{ik}$, $\Gamma_{ik}{}^r$ y b_i). Recordemos que al igual que en Relatividad General el anterior sistema de ecuaciones no puede determinar unívocamente la solución de los campos, lo que significa que además de (15.B) deben existir cuatro identidades complementarias, las llamadas identidades de Bianchi. Podemos eliminar las b_i de la cuarta ecuación, descomponiéndola en parte simétrica y antisimétrica, entonces las ecuaciones de campo quedan

$$\begin{aligned} &\tau_i = 0 \\ &D_r \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}} = 0 \\ &R_{(ik)} = 0 \\ &R_{[ik],r} + R_{[kr],i} + R_{[ri],k} = 0 \end{aligned} \tag{16.B}$$

al que se le llama conjunto débil de las ecuaciones de campo. Existen dos identidades en el sistema (16.B). Son las mismas que surgen en las ecuaciones de campo electromagnético maxweliano. En efecto, en las ecuaciones de Maxwell encontramos seis variables (tres correspondientes al campo eléctrico **E** y otras tres para el campo magnético **B**), sin embargo existen ocho ecuaciones: dos vectoriales (con tres componentes cada una) y dos escalares, todas ellas se deducen de las dos ecuaciones tensoriales

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{1}{\varepsilon_0} j^i; \quad F_{ik,r} + F_{kr,i} + F_{ri,k} = 0$$

válidas en ausencia de gravedad y en coordenadas cartesianas, donde F_{ik} es el tensor de campo electromagnético. Las dos identidades que existen son

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 F^{ik}}{\partial x^i \partial x^k} = 0 \\ &\varepsilon^{ikrp} \frac{\partial}{\partial x^p}\left(F_{ik,r} + F_{kr,i} + F_{ri,k}\right) = 0 \end{aligned}$$

lo que hace disminuir el dos el número de ecuaciones independientes. Nótese que la anulación de la primera ecuación es por la antisimetría del tensor F_{ik} y la anulación de la última ecuación es debido a la antisimetría de los símbolos de Kronecker. Por tanto en el sistema de Maxwell en realidad hay seis ecuaciones independientes para seis variables.

Pues lo mismo ocurre con el sistema (16.B), donde existen dos identidades, similares a las que aparecen en las ecuaciones de Maxwell; a saber

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \boldsymbol{g}^{[ik]}}{\partial x^i \partial x^k} = 0 \\ &\varepsilon^{ikrp} \frac{\partial}{\partial x^p}\left\{R_{[ik],r} + R_{[kr],i} + R_{[ri],k}\right\} = 0 \end{aligned}$$

por lo tanto, el sistema (16.B) tiene 82 ecuaciones ($4+64+10+4$), 80 variables ($64+16$) y las dos identidades anteriores, o sea, 80 ecuaciones independientes para 80 campos.

Las ecuaciones (16.B) son diferentes y menos restrictivas que las (14.A) que obtuvo Einstein en su primera teoría hermítica de campo unificado. La primera ecuación (16.B), que ahora surge del principio variacional, tiene como consecuencia que la última de las ecuaciones de (16.B) sea más débil que la ecuación $R_{[ik]} = 0$ correspondiente al conjunto (14.A). También debemos señalar que la última ecuación (16.B) eleva en uno el grado de diferenciación, esto surge a consecuencia del último sumando de la densidad lagrangiana (1.B), que se introduce para conseguir la primera ecuación de (15.B) al aplicar el principio variacional.

2.B.- Teoría linealizada

Las ecuaciones de campo de la Relatividad General y las ecuaciones de Maxwell (en cierta medida) se pueden deducir de (16.B) en una primera aproximación. Supongamos

$$g_{ik} = \eta_{ik} + \gamma_{ik}$$

donde los γ_{ik} son pequeños y por tanto podemos despreciar sus cuadrados y η_{ik} es el tensor métrico de Minkowski de la Relatividad Especial (utilizamos, por tanto, coordenadas cartesianas). η_{ik} es la métrica del espacio-tiempo en ausencia de campos. Con esta suposición las dos primeras ecuaciones (16.B) quedan

$$\begin{aligned} &\Gamma_{ir}^{\ \ r} - \Gamma_{ri}^{\ \ r} = 0 \\ &\gamma_{ik,r} - \eta_{sk}\Gamma_{ir}^{\ \ s} - \eta_{is}\Gamma_{rk}^{\ \ s} = 0, \end{aligned} \tag{17.B}$$

de la segunda de las ecuaciones anteriores se puede despejar la conexión, resultando

$$\Gamma_{ik}^{\ \ s} = \tfrac{1}{2}\eta^{sr}\left(\gamma_{ir,k} + \gamma_{rk,i} - \gamma_{ki,r}\right)$$

como se puede comprobar por cálculo directo. Con este último resultado la primera de las ecuaciones (17.B) queda

$$\frac{1}{2}\eta^{sr}\left(\gamma_{ir,s}+\gamma_{rs,i}-\gamma_{si,r}\right)-\frac{1}{2}\eta^{sr}\left(\gamma_{sr,i}+\gamma_{ri,s}-\gamma_{is,r}\right)=\eta^{sr}\left(\gamma_{[ir],s}+\gamma_{[is],r}\right)=0$$

donde se ha tenido en cuenta el carácter simétrico del tensor de Minkowski. De nuevo usando esta propiedad se encuentra

$$\eta^{sr}\gamma_{[ir],s}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \gamma_{[ir]}{}^{,r}=0. \tag{18.B}$$

En la aproximación considerada el tensor de Ricci hermítico es

$$\overline{R}_{ik}=-\Gamma_{ik,r}^{\ r}+\frac{1}{2}\Gamma_{ir,k}^{\ r}+\frac{1}{2}\Gamma_{rk,i}^{\ r}$$

y puesto en función de γ_{ik}

$$\overline{R}_{ik}=\frac{1}{2}\eta^{rs}\left[-\gamma_{(is),k,r}-\gamma_{(sk),r,i}+\gamma_{sr,i,k}+\gamma_{ki,s,r}\right],$$

su parte simétrica es

$$R_{(ik)}=\frac{1}{2}\eta^{rs}\left[-\gamma_{(is),k\,r}-\gamma_{(sk),r\,i}+\gamma_{(sr),ik}+\gamma_{(ki),s\,r}\right] \tag{19.B}$$

y la parte antisimétrica

$$R_{[ik]}=\frac{1}{2}\eta^{rs}\gamma_{[ik],r\,s}. \tag{20.B}$$

Por tanto la tercera y cuarta ecuación de (16.B) en el caso considerado de teoría linealizada

$$\begin{gathered}\eta^{rs}\left[-\gamma_{(is),k,r}-\gamma_{(sk),r,i}+\gamma_{(sr),i,k}+\gamma_{(ki),s,r}\right]=0\\ \eta^{rs}\left\{\gamma_{[ik],p}+\gamma_{[kp],i}+\gamma_{[pi],k}\right\}_{,r\,s}=0.\end{gathered} \tag{21.B}$$

Entonces las ecuaciones de campo gravitatorio son

$$R_{(ik)}=0$$

idénticas a las ecuaciones de la gravitación en el vacío en la misma aproximación, si se supone que el campo gravitatorio viene expresado por $\gamma_{(ik)}$; mientras que las ecuaciones de campo electromagnético son

$$\begin{gathered}\gamma^{[ir]}{}_{,r}=0\\ \eta^{rs}\left\{\gamma_{[ik],p}+\gamma_{[kp],i}+\gamma_{[pi],k}\right\}_{,r\,s}=0\end{gathered}$$

siendo el tensor de campo electromagnético $\gamma_{[ik]}$. La segunda de las anteriores ecuaciones no coincide con la correspondiente a la teoría de Maxwell que afirma que es nulo lo incluido en el paréntesis de esta ecuación. Por tanto nuestra teoría electromagnética es compatible con la de Maxwell aunque no al contrario. Sobre este asunto Einstein y Straus afirman que esta no es una objeción a la teoría ya que «no conocemos la correspondencia de las soluciones de las ecuaciones linealizadas con las soluciones rigurosas las cuales son regulares en todo el espacio. Es claro desde el comienzo que en una teoría de campo consistente la cual reclama ser completa (en contraste, por ejemplo a la teoría de la gravitación) solamente son consideradas aquellas soluciones que son regulares en todo el espacio. Si tales soluciones (no triviales) existen no es todavía conocido».

C) EINSTEIN (1948): La densidad tensorial antisimétrica de tres índices $\mathfrak{g}^{ikr}$

1-C.- La densidad lagrangiana de Einstein

En el año 1948 Einstein volvió a la teoría hermítica [25] y la replanteó de nuevo en un intento de disminuir el carácter más bien artificioso de la densidad lagrangiana (1.B). La densidad lagrangiana que adopta Einstein es

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{g}^{ik}\overline{R}_{ik} \tag{1.C}$$

donde $\overline{R}_{ik}$ es el tensor de Ricci hermítico, tal como se definió en 4.B. La nueva teoría sigue siendo métrico-afín, en el sentido de que tanto el tensor métrico como la conexión son potenciales del campo, debiéndose variar la acción respecto a ambas cantidades.

Según se dedujo en el epígrafe 1-B la variación con respecto a la conexión da las ecuaciones

$$D_r \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}} - \frac{1}{2} D_s \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{is}} \delta_r^k - \frac{1}{2} D_s \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{sk}} \delta_r^i - \frac{1}{4} \boldsymbol{g}^{is} \delta_k^r \tau_s + \frac{1}{4} \boldsymbol{g}^{sk} \delta_r^i \tau_s = 0$$

es decir la expresión (11.B) con $\boldsymbol{h}^i = 0$ ya que en la densidad lagrangiana (1.C) no interviene este multiplicador de Lagrange. Al desarrollar las derivadas covariantes de la anterior expresión resulta

$$\begin{aligned} &\partial_r \boldsymbol{g}^{ik} + \boldsymbol{g}^{sk} \Gamma_{sr}^{\ i} + \boldsymbol{g}^{is} \Gamma_{rs}^{\ k} - \boldsymbol{g}^{sk} \Gamma_{(rs)}^{\ r} - \frac{1}{2}\left(\partial_s \boldsymbol{g}^{is} + \boldsymbol{g}^{ts} \Gamma_{ts}^{\ i} + \boldsymbol{g}^{it} \Gamma_{st}^{\ s} - \boldsymbol{g}^{is} \Gamma_{(ts)}^{\ t}\right) \delta_r^k - \\ &- \frac{1}{2}\left(\partial_s \boldsymbol{g}^{sk} + \boldsymbol{g}^{tk} \Gamma_{ks}^{\ s} + \boldsymbol{g}^{st} \Gamma_{st}^{\ k} - \boldsymbol{g}^{sk} \Gamma_{(ts)}^{\ t}\right) \delta_r^i - \frac{1}{2} \boldsymbol{g}^{is} \delta_k^r \tau_s + \frac{1}{2} \boldsymbol{g}^{sk} \delta_r^i \tau_s = 0 \end{aligned} \tag{2.C}$$

si no existieran los dos últimos sumandos, entonces encontraríamos la ecuación que buscamos $D_r \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}} = 0$. Esto significa que tendríamos que imponer la condición $\tau_i = 0$ la cual, como hemos visto, no podemos establecer porque no se garantiza la compatibilidad de las ecuaciones resultantes.

Buscamos bajo qué condiciones el vector de torsión se anula. Al tomar la parte imaginaria de (2.C) se encuentra

$$\partial_r \boldsymbol{g}^{[ik]} + \boldsymbol{g}^{(sk)} \Gamma_{[sr]}^{\ \ i} + \boldsymbol{g}^{[sk]} \Gamma_{(sr)}^{\ \ i} + \boldsymbol{g}^{(is)} \Gamma_{[rs]}^{\ \ k} + \boldsymbol{g}^{[is]} \Gamma_{(rs)}^{\ \ k} - \boldsymbol{g}^{[sk]} \Gamma_{(rs)}^{\ \ r} - \frac{1}{2} \partial_s \boldsymbol{g}^{[is]} \delta_r^k - \frac{1}{2} \partial_s \boldsymbol{g}^{[sk]} \delta_r^i = 0,$$

y al contraer los índice k y r

$$\frac{1}{2} \partial_s \boldsymbol{g}^{[is]} - \boldsymbol{g}^{(is)} \Gamma_{[rs]}^{\ \ r} = 0 \tag{3.C}$$

por tanto la condición necesaria y suficiente para que $\Gamma_{[rs]}^{\ \ r} = 0$ es que $\partial_s \boldsymbol{g}^{[is]} = 0$. Esta igualdad se cumple si suponemos

$$\boldsymbol{g}^{[ik]} = \boldsymbol{g}^{ikr}{}_{,r} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{g}^{ik} = \boldsymbol{g}^{(ik)} + \boldsymbol{g}^{ikr}{}_{,r}$$

siendo $\boldsymbol{g}^{ikr}$ una densidad tensorial antisimétrica en sus tres índices, es decir que es nula si hay dos o tres índices iguales y en caso contrario el signo es positivo o negativo según haya una permutación par o impar de los índices. Por lo tanto, la densidad tensorial $\boldsymbol{g}^{ikr}$ tiene cuatro componentes independientes, las que tienen de índices (123), (134), (124) y (234). Entonces al cumplirse (3.C) el vector de torsión es nulo y $D_r \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}} = 0$ que se convierte en el primer grupo de ecuaciones de campo.

El segundo grupo de ecuaciones de campo se obtiene haciendo la variación con respecto a $\boldsymbol{g}^{(ik)}$ y $\boldsymbol{g}^{ikr}$ de la acción formada por la densidad lagrangiana (1.C), es decir

$$\delta I = \delta \int \boldsymbol{g}^{ik} \bar{R}_{ik} \, d\Omega = \int \left(\bar{R}_{(ik)} \delta \boldsymbol{g}^{(ik)} + \bar{R}_{[ik]} \delta \boldsymbol{g}^{ikr}{}_{,r} \right) d\Omega = 0$$

del primer sumando del último miembro se obtiene la ecuación

$$\bar{R}_{(ik)} = 0,$$

para tratar el segundo sumando integramos por partes y aplicamos el teorema de Gauss

$$\int \bar{R}_{[ik]} \delta \boldsymbol{g}^{ikr}{}_{,r} \, d\Omega = \int \partial_r \left(\bar{R}_{[ik]} \delta \boldsymbol{g}^{ikr} \right) d\Omega - \int \bar{R}_{[ik],r} \delta \boldsymbol{g}^{ikr} d\Omega = -\int \bar{R}_{[ik],r} \delta \boldsymbol{g}^{ikr} d\Omega = 0,$$

ahora bien, no todas las componentes de $\delta \boldsymbol{g}^{ikr}$ son independientes, aunque sí son arbitrarias. La anterior integral se puede poner como

$$\int \bar{R}_{[ik],r} \delta \boldsymbol{g}^{ikr} d\Omega = \int \sum_{(i,k,j)} \left\{ \bar{R}_{[ik],r} \delta \boldsymbol{g}^{ikr} \right\} d\Omega = 0$$

donde la suma se efectúa sobre todos los posibles conjuntos de número (i,k,r), es decir $(1,2,3), (1,2,4), (1,3,4)$, $(2,3,4)$; el corchete en el integrando significa que aparecen las sumas de todas las permutaciones de los índices (i,k,r), y en esa expresión no se aplica el criterio de sumación de Einstein. Para unos determinados valores de (i,k,r) tendremos

$$\begin{aligned} \left\{ \bar{R}_{[ik],r} \delta \boldsymbol{g}^{ikr} \right\} &= \bar{R}_{[ik],r} \delta \boldsymbol{g}^{ikr} + \bar{R}_{[ir],k} \delta \boldsymbol{g}^{irk} + \bar{R}_{[rk],i} \delta \boldsymbol{g}^{rki} + \bar{R}_{[ri],k} \delta \boldsymbol{g}^{rik} + \bar{R}_{[ki],r} \delta \boldsymbol{g}^{kir} + \bar{R}_{[kr],i} \delta \boldsymbol{g}^{kri} = \\ &= \left(\bar{R}_{[ik],r} - \bar{R}_{[ir],k} - \bar{R}_{[rk],i} + \bar{R}_{[ri],k} - \bar{R}_{[ki],r} + \bar{R}_{[kr],i} \right) \delta \boldsymbol{g}^{rik} = 2\left(\bar{R}_{[ik],r} + \bar{R}_{[ri],k} + \bar{R}_{[kr],i} \right) \delta \boldsymbol{g}^{ikr} \end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta la condición de asimetría de $\delta \boldsymbol{g}^{ikr}$. Volviendo a la integral de acción

$$\int \overline{R}_{[ik],r}\delta \boldsymbol{g}^{ikr} d\Omega = \int \sum_{(i,k,j)} 2\left(\overline{R}_{[ik],r} + \overline{R}_{[ri],k} + \overline{R}_{[kr],i}\right)\delta \boldsymbol{g}^{ikr} d\Omega = 0$$

ahora todos los $\delta \boldsymbol{g}^{ikr}$ son independientes, pues sólo aparece uno de ellos por cada conjunto de números (i,k,r), por lo tanto encontramos

$$\overline{R}_{[ik],r} + \overline{R}_{[ri],k} + \overline{R}_{[kr],i} = 0 \tag{4.C}$$

que son cuatro ecuaciones, una para cada una de las posibles combinaciones de los subíndices que hemos considerado. De nuevo encontramos que para el caso en que sean nulas tanto $D_r \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}}$ como el vector de torsión, la parte antihermítica del tensor de Ricci es nula, por tanto su parte hermítica coincide con el tensor de Ricci, es decir $\overline{R}_{ik} = R_{ik}$.

Resumiendo, las ecuaciones de campo de la teoría hermítica de Einstein de 1948 son

$$\begin{aligned} &D_r \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}} = 0 \\ &\partial_s \boldsymbol{g}^{[is]} = 0 \quad \text{o} \quad \tau^i = 0 \\ &R_{(ik)} = 0 \\ &R_{[ik],r} + R_{[kr],i} + R_{[ri],k} = 0 \end{aligned} \tag{5.C}$$

o sea las mismas ecuaciones que en la teoría de Einstein-Straus (16.B) o sistema débil de ecuaciones.

El elemento de línea del espacio-tiempo es

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = g_{(ik)} dx^i dx^k$$

o sea, sólo interviene la parte simétrica (o real) del tensor métrico, de tal forma que ds^2 es un número real, positivo, negativo o nulo. Que el determinante de g_{ik} sea distinto de cero en todo punto, como antes hemos supuesto, no implica que el determinante de $g_{(ik)}$ sea también distinto de cero. Pero el determinante de $g_{(ik)}$ debe ser distinto de cero en todo punto, ya que en caso contrario no puede afirmarse que se mantendrá la signatura de $g_{(ik)}$.

Entonces no sólo hay que exigir que $g \neq 0$ sino también que el determinante de $g_{(ik)}$ sea distinto de cero y tenga en todo punto un valor negativo. Einstein en su investigación de 1948 da una demostración, que dice es obra de su asistente, por la cual si se supone que las componentes de la conexión son en todo punto determinadas por la primera ecuación (5.C) entonces el determinante de $g_{(ik)}$ es distinto de cero en todo punto, la demostración es un tanto oscura y además no concluye que el valor de ese determinante tiene que ser negativo, propiedad que debe ser, por tanto, impuesta. Este asunto fue abordado por Einstein, en colaboración con Kaufman, algunos años después.

Señalar finalmente que la teoría de Schrödinger [96] que utiliza tensor métrico y conexión asimétrico pero reales, llega a las mismas ecuaciones (5.C) que la teoría de Einstein-Straus, para lo que se exige poner las ecuaciones en función de una nueva conexión, derivada de la primitiva y que tiene la propiedad de tener nulo el vector de torsión.

D) EINSTEIN (1950): Las identidades de Bianchi

1-D.- Las identidades de Bianchi en la geometría de Riemann

La geometría de Riemann viene caracterizada porque tanto el tensor métrico como la conexión afín son simétricos y además la derivada covariante del tensor métrico es nula. Si definimos el tensor de curvatura por la relación

$$R^k{}_{sir} = \Gamma_{sr,i}^{\ \ k} - \Gamma_{si,r}^{\ \ k} + \Gamma_{sr}^{\ \ n}\Gamma_{ni}^{\ \ k} - \Gamma_{si}^{\ \ n}\Gamma_{nr}^{\ \ k} \tag{1.D}$$

entonces en un espacio de Riemann se cumple la siguiente ecuación entre las derivadas covariantes del tensor de curvatura

$$D_m R^k{}_{sir} + D_i R^k{}_{srm} + D_r R^k{}_{smi} = 0 \quad \Rightarrow \quad D_m R_{psir} + D_i R_{psrm} + D_r R_{psmi} = 0 \tag{2.D}$$

expresión que es llamada las identidades de Bianchi.

Se puede generalizar (2.D) para el caso en que la conexión no sea simétrica y por cálculo directo se puede mostrar que

$$D_m R^k{}_{sir} + D_i R^k{}_{srm} + D_r R^k{}_{smi} = R^k{}_{pmi} \tau_{rs}{}^p + R^k{}_{pir} \tau_{ms}{}^p + R^k{}_{prm} \tau_{is}{}^p .$$

o bien

$$R^k{}_{s\{ir;\, m\}} = R^k{}_{p\{\, mi} \tau_{r\}\, s}{}^p$$

donde el corchete significa la suma de las permutaciones de los indices y el punto y coma es la derivación covariante.

2-D.- Propiedades de simetría del tensor de curvatura

Definimos las componentes covariantes del tensor métrico por

$$R_{tsir} = g_{tk} R^k{}_{sir} , \tag{3.D}$$

donde el orden de los índices del tensor métrico es importante como veremos a continuación. Entonces por la definición (1.D) se encuentra que el tensor de curvatura es antisimétrico respecto a sus dos últimos índices

$$R_{tsir} = -R_{tsri} .$$

Vamos a suponer, que al igual que en las restantes teorías, se cumpla

$$D_r g_{\underset{+}{i}\underset{-}{k}} = \partial_r g_{ik} - g_{sk} \Gamma_{ir}{}^s - g_{is} \Gamma_{rk}{}^s = 0 , \tag{4.D}$$

entonces diferenciando (4.D) respecto a p y antisimetrizando respecto a r se encuentra

$$\left(g_{ik,r} - g_{sk} \Gamma_{ir}{}^s - g_{is} \Gamma_{rk}{}^s \right)_{,p} - \left(g_{ik,p} - g_{sk} \Gamma_{ip}{}^s - g_{is} \Gamma_{pk}{}^s \right)_{,r} = 0.$$

de donde resulta

$$-g_{sk,p} \Gamma_{ir}{}^s - g_{is,p} \Gamma_{rk}{}^s - g_{sk,r} \Gamma_{ip}{}^s - g_{is,r} \Gamma_{pk}{}^s - g_{sk} \left(\Gamma_{ir,p}{}^s - \Gamma_{ip,r}{}^s \right) - g_{is} \left(\Gamma_{rk,p}{}^s - \Gamma_{pk,r}{}^s \right) = 0$$

al utilizar (4.D) queda

$$-g_{sk} R^s{}_{ipr} - \tilde{g}_{si} R^s{}_{kpr} \left(\tilde{\Gamma} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{kipr} \left(g, \Gamma \right) = -R_{ikpr} \left(\tilde{g}, \tilde{\Gamma} \right), \tag{5.D}$$

donde $R_{ikpr} \left(\tilde{g}, \tilde{\Gamma} \right)$ significa que en el tensor de curvatura se ha sustituido el tensor métrico y la conexión por sus transpuestos. (5.D) viene a decirnos que el tensor de curvatura covariante es antihermítico respecto a sus dos primeros índices.

3-D.- La generalización de las identidades de Bianchi

Buscamos a continuación una generalización de estas identidades al caso de que se utilicen tanto las derivadas covariantes + como las $-$ [27].

Vamos a utilizar la siguiente notación

$$D_n A_{\underset{+}{i}\underset{-}{k}rs} = A_{\underset{+}{i}\underset{-}{k}rs;n} = \partial_n A_{ikrs} - A_{tkrs} \Gamma_{in}{}^t - A_{itrs} \Gamma_{nk}{}^t$$

y expresiones similares. Utilizando esta notación tenemos para el caso del tensor de curvatura

$$D_n R^{\overset{k}{+}}{}_{\underset{+}{s}ir} = R^{\overset{k}{+}}{}_{\underset{+}{s}ir;n} = \partial_n R^k{}_{sir} + R^t{}_{sir} \Gamma_{tn}{}^k - R^k{}_{tir} \Gamma_{sn}{}^t .$$

Por cálculo directo se comprueba que se cumple la identidad

$$R^{\overset{k}{+}}{}_{\underset{+}{s}\{ir;n\}} = 0 , \tag{6.D}$$

expresión que es válida con carácter general y que se cumple sin necesidad de exigir ninguna condición a la geometría.

Si exigimos que se cumple la condición

$$D_r g_{\underset{+}{i}\underset{-}{k}} = 0$$

entonces también se cumple

$$g_{kp} R^{\overset{k}{+}}{}_{\underset{+}{s}\{ir;n\}} = \left(g_{\underset{+}{k}\underset{-}{p}} R^{\overset{k}{+}}{}_{\underset{+}{s}\{ir} \right)_{;n\}} = R_{\underset{-}{p}\underset{+}{s}\{ir;n\}} = 0 \tag{7.D}$$

nótese ahora la razón de bajar el índice contravariente del tensor de curvatura con el orden de índices del tensor métrico, sólo como lo hemos hecho es válida la ley de derivación del producto (para más detalles véase 1-B).

Por cálculo directo se encuenta la siguiente relación

$$R_{\underset{-+-+}{ikrp};q}+R_{\underset{-+++}{ikpq};r}+R_{\underset{-+--}{ikqr};p}=$$
$$R_{\underset{-+}{ik}\{rp;q\}}-R_{iksp}\Gamma^{s}_{qr}-R_{ikrs}\Gamma^{s}_{pq}-R_{iksq}\Gamma^{s}_{pr}-R_{ikps}\Gamma^{s}_{qr}-R_{iksr}\Gamma^{s}_{pq}-R_{ikqs}\Gamma^{s}_{pr}$$

el primer sumando del segundo miembro es nulo por (7.D), mientras que los demás sumandos se anulan por la antisimetría de los dos útimos índices del tensor de curvatura, entonces nos queda

$$R_{\underset{-+-+}{ikrp};q}+R_{\underset{-+++}{ikpq};r}+R_{\underset{-+--}{ikqr};p}=0 \tag{8.D}$$

que es la generalización de las identidades de Bianchi.

4-D.- Las ecuaciones de campo deducidas de las identidades de Bianchi

La identidad (2.D) válida en la geometría de Riemann y por tanto de aplicación a la Relatividad General, se puede adaptar para el tensor de Ricci. Contrayendo (2.D) respecto a k y r

$$D_m R_{si}+D_i R_{sm}+D_r R^{r}{}_{smi}=0,$$

donde hemos tenido en cuenta la definición de tensor de Ricci: $R_{ik}=R^{s}{}_{iks}$ y la propiedad de antisimetría del tensor de curvatura respecto a sus dos últimos índices. Ahora multiplicando por g^{si} queda

$$D_r\left(R^{r}{}_{m}-\frac{1}{2}\delta^{r}_{m}R\right)=0. \tag{9.D}$$

que son las identidades de Bianchi de la geometría de Riemann. Observamos que el paréntesis de (9.D) es la ecuación del campo gravitatorio en el caso exterior

$$R^{r}{}_{m}-\frac{1}{2}\delta^{r}_{m}R=0 \quad\Rightarrow\quad R=0 \quad\Rightarrow\quad R_{rm}=0.$$

Lo que pretendemos ahora es hacer la misma deducción anterior pera aplicada a la identidad de Bianchi generalizada (8.D) que recordamos es válida para el caso en que se cumpla (4.D).

Multiplicamos la igualdad (8.D) por g^{pi}, elección que hacemos para que sea válido la regla de Leibnitz de la derivación de un producto y teniendo presente la nulidad de la derivada covariante del tensor métrico tenemos (para ver más detalles véase 1-B)

$$g^{pi}R_{\underset{-+-+}{ikrp};q}+g^{pi}R_{\underset{-+++}{ikpq};r}+g^{pi}R_{\underset{-+--}{ikqr};p}=0 \;\Rightarrow\; \left(g^{\overset{pi}{+-}}R_{\underset{-+-+}{ikrp}}\right)_{;q}-\left(g^{\overset{pi}{+-}}R_{\underset{-+++}{ikqp}}\right)_{;r}-g^{pi}\left(R_{\underset{-+--}{ikrq}}\right)_{;p}=0$$

donde una vez más hemos utilizado la propiedad de antisimetría del tensor de curvatura respecto a los dos últimos índices y la igualdad (4.D). Por definición del tensor de Ricci tenemos para la expresión anterior

$$R_{\underset{+-}{kr};q}-R_{\underset{++}{kq};r}-g^{pi}\left(R_{\underset{-+--}{ikrq}}\right)_{;p}=0\,,$$

ahora multiplicamos por g^{kr} encontrando

$$g^{kr}R_{\underset{+-}{kr};q}-g^{kr}R_{\underset{++}{kq};r}-g^{pi}\left(g^{\overset{kr}{+-}}R_{\underset{-+--}{ikrq}}\right)_{;p}=0\,,$$

definimos el tensor

$$S_{qi}=g^{kr}R_{ikrq}$$

entonces nos queda

$$g^{kr}\left(R_{\underset{+-}{kr};q}-R_{\underset{++}{kq};r}-S_{\underset{--}{qr};k}\right)=0\,. \tag{10.D}$$

Se puede relacionar el tensor de Ricci con S_{ik}. Para ello tengamos en consideración (5.D) y la antisimetría del tensor de curvatura con respecto a los últimos índices, entonces

$$R_{ikrp}\left(g,\Gamma\right)=R_{kipr}\left(\tilde{g},\tilde{\Gamma}\right)$$

multiplicando ambos miembros por g^{kr}

$$S_{pi}=R_{ip}\left(\tilde{g},\tilde{\Gamma}\right).$$

Lo que significa que si el tensor de Ricci tuviera la simetría hermítica, entonces sería idéntica al tensor S_{ik}. Aquí encuentra Einstein otro argumento para exigir que el tensor de Ricci sea hermítico.

Como se muestra en el epígrafe 2-F el tensor de Ricci se descompone en parte hermítica y antihermítica

$$R_{ik}=\bar{R}_{ik}+\bar{\bar{R}}_{ik}=\frac{1}{2}\left[R_{ik}(\Gamma)+R_{ki}(\tilde{\Gamma})\right]+\frac{1}{2}\left[R_{ik}(\Gamma)-R_{ki}(\tilde{\Gamma})\right]$$

siendo la parte antihermítica

$$\bar{\bar{R}}_{ik}=\frac{1}{2}\left[\Gamma_{(ir),k}^{\ \ r}-\Gamma_{(rk),i}^{\ \ r}\right]+\frac{1}{4}\left(D_i\tau_{\underset{-}{k}}+D_k\tau_{\underset{+}{i}}\right). \tag{11.D}$$

Habíamos definido que la derivada covariante del determinante del tensor métrico es

$$D_r g=gg^{ik}D_r g_{\underset{+-}{ik}}$$

desarrollando la expresión de la derivada covariante del tensor métrico y teniendo presente que

$$D_r g_{\underset{+-}{ik}}=0 \quad\Rightarrow\quad D_r g=0$$

nos queda

$$\Gamma_{(rs)}^{\ \ s}=\frac{1}{2}\partial_r \ln g,$$

por tanto

$$\Gamma_{(ir),k}^{\ \ r}-\Gamma_{(rk),i}^{\ \ r}=0. \tag{12.D}$$

Con carácter general se cumple

$$D_r\boldsymbol{g}^{\overset{ir}{+-}}-D_r\boldsymbol{g}^{\overset{ri}{+-}}=2\partial_r\boldsymbol{g}^{[ir]}-\boldsymbol{g}^{(ir)}\tau_r$$

como se demostró en 7-A. El primer miembro de la anterior expresión es nulo, entonces se exigimos que se cumpla

$$\partial_r\boldsymbol{g}^{[ir]}=0 \tag{13.D}$$

entonces debe ser nulo el vector de torsión, lo que unido a (12.D) y (11.D) significa que la parte antihermítica del tensor de Ricci es nulo; o dicho de otra forma, el tensor de Ricci es hermítico, siempre y cuando se cumpla (4.D) y (13.D). Por tanto

$$S_{ip}=R_{ip}.$$

Entonces (10.D) queda

$$g^{kr}\left(R_{\underset{+-}{kr};q}-R_{\underset{++}{kq};r}-R_{\underset{--}{qr};k}\right)=0 \tag{14.D}$$

que es la generalización de (9.D) y hay que entenderla como la extensión de la identidad de Bianchi (8.D) para el tensor de Ricci. Pero ahora el tensor de Ricci tiene parte simétrica y antisimétrica por lo que podemos descomponer (14.D) como

$$g^{kr}\left[R_{\left(\underset{+-}{kr}\right);q}-R_{\left(\underset{++}{kq}\right);r}-R_{\left(\underset{--}{qr}\right);k}\right]+g^{kr}\left[R_{\left[\underset{+-}{kr}\right];q}-R_{\left[\underset{++}{kq}\right];r}-R_{\left[\underset{--}{qr}\right];k}\right]=0. \tag{15.D}$$

El primer sumando es en todo análogo a la expresión equivalente de la Relatividad General; en efecto si entendemos R como la curvatura escalar calculada a partir de la parte simétrica del tensor de Ricci, tenemos

$$g^{kr}\left[R_{\left(\underset{+-}{kr}\right);q}-R_{\left(\underset{++}{kq}\right);r}-R_{\left(\underset{--}{qr}\right);k}\right]=\left[\delta_q^r R-R^{\left(\underset{-}{r}\right.}{}_{\left.\underset{+}{q}\right)}-R^{\left(\underset{-}{r}\right.}{}_{\left.\underset{-}{q}\right)}\right]_{;r}$$

entonces al igual que en Relatividad General las ecuaciones de campo son la anulación del interior del paréntesis, así lo mismo podemos hacer aquí, resultanto

$$R^{(r}{}_{q)}-1/2\,\delta_q^r R=0 \quad\Rightarrow\quad R_{(rq)}-1/2\,g_{rq}R=0 \quad\Rightarrow\quad R_{(rq)}=0$$

que es una de las ecuaciones de campo.

El segundo sumando de (15.D) se desarrolla obteniéndose

$$R_{\left[\underset{+-}{kr}\right];q}-R_{\left[\underset{++}{kq}\right];r}-R_{\left[\underset{--}{qr}\right];k}=R_{[kr],q}-R_{[sr]}\Gamma_{kq}^{\ \ s}-R_{[ks]}\Gamma_{qr}^{\ \ s}-$$

$$-R_{[kq],r}+R_{[sq]}\Gamma_{kr}^{\ \ s}+R_{[ks]}\Gamma_{qr}^{\ \ s}-R_{[qr],k}+R_{[sr]}\Gamma_{kq}^{\ \ s}+R_{[qs]}\Gamma_{rk}^{\ \ s}$$

que tras simplificar queda

$$R_{\left[\underset{+\,-}{k\,r}\right];q}-R_{\left[\underset{+\,+}{k\,q}\right];r}-R_{\left[\underset{-\,-}{q\,r}\right]};{}_{k}=R_{[kr]\,,q}+R_{[qk]\,,r}+R_{[rq]\,,k}=R_{\{[kr],q\}}$$

y según palabras de Einstein: ya que vemos que $R_{[ik]}$ entra en las ecuaciones solamente en la combinación $R_{\{[kr],q\}}$ es natural elegir las ecuaciones de campo para $R_{[ik]}$ como

$$R_{\{[kr],q\}}=0.$$

Reuniendo todos los resultados encontramos que las ecuaciones de campo son

$$D_r g_{\underset{+\,-}{i\,k}}=0$$

$$\partial_r \boldsymbol{g}^{[ir]}=0$$

$$R_{(ik)}=0$$

$$R_{\{[ik],r\}}=0$$

o sea, las ecuaciones débiles de campo.

Notamos que el razonamiento seguido en este apartado no es una verdadera deducción matemática de las ecuaciones de campo unificado, sino más bien una orientación de cuáles podrían ser esas ecuaciones.

E) EINSTEIN (1950): Las condiciones impuestas *a priori*

1-E.- Planteamiento de la teoría

En la teoría **A** de Einsteín de 1945 se obtienen las ecuaciones de campo aplicando un principio variacional y posteriormente se impone la condición $\tau_i=0$. No obstante, es igualmente posible imponer *a priori* dicha condición y luego aplicar el principio variacional. Si se sigue este método se tiene la seguridad de que las ecuaciones finales serán compatibles.

En la teoría **D** de Einstein de 1950 [28] se establece previamente las condiciones

$$\tau_i=0;\qquad \boldsymbol{g}^{[ik]}{}_{,k}=0 \tag{1.E}$$

y luego se aplica el principio de mínima acción, variando respecto al tensor métrico y respecto a la conexión; sin embargo, hay que tener en cuenta que no todas las variaciones del tensor métrico $\delta\boldsymbol{g}^{ik}$ y de la conexión $\delta\Gamma_{ik}{}^{r}$ son independientes a consecuencia de (1.E) y esto debe ser tenido en consideración cuando se haga la variación de la acción del campo.

La densidad lagrangiana usada en esta teoría es

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{g}^{ik}R_{ik}=\delta_t^r\boldsymbol{g}^{ik}R^t{}_{ikr}$$

donde R_{ik} es el tensor de Ricci

$$R_{ik}=R^r{}_{ikr}=\Gamma_{ir,k}{}^{r}-\Gamma_{ik,r}{}^{r}+\Gamma_{ir}{}^{t}\Gamma_{tk}{}^{r}-\Gamma_{ik}{}^{t}\Gamma_{tr}{}^{r},$$

y $R^t{}_{ikr}$ es el tensor de curvatura definido por

$$R^t{}_{ikr}=\Gamma_{ir,k}{}^{t}-\Gamma_{ik,r}{}^{t}+\Gamma_{ir}{}^{n}\Gamma_{nk}{}^{t}-\Gamma_{ik}{}^{n}\Gamma_{nr}{}^{t},$$

el principio de mínima acción queda formulado por

$$\delta I=\delta\int\boldsymbol{g}^{ik}R_{ik}d\,\Omega=0 \tag{2.E}$$

donde se varían las componentes de la densidad del tensor métrico y las componentes de la conexión, que como hemos dicho, no todas ellas son independientes. Debemos observar que en esta teoría no se exige que el tensor de Ricci tenga la simetría hermítica, al contrario de lo que ocurre en la mayoría de las restantes teorías que examinamos.

Einstein aplicó la identidad de Palatini al tensor de curvatura, en vez de hacerlo al tensor de Ricci como haremos nosotros más abajo, con la intención de que haya continuidad con los cálculos anteriores.

2-E.- Ecuaciones de campo

La variación de (2.E) respecto a la conexión sigue las técnicas habituales

$$\boldsymbol{g}^{ik}\delta R_{ik}=\boldsymbol{g}^{ik}\left(\delta\Gamma_{ir}{}^{r}\right)_{,k}-\boldsymbol{g}^{ik}\left(\delta\Gamma_{ik}{}^{r}\right)_{,r}+\boldsymbol{g}^{ik}\delta\Gamma_{ir}{}^{t}\Gamma_{tk}{}^{r}+$$

$$+\boldsymbol{g}^{ik}\Gamma_{ir}^{\ t}\delta\Gamma_{tk}^{\ \ r}-\boldsymbol{g}^{ik}\delta\Gamma_{ik}^{\ \ t}\Gamma_{tr}^{\ \ r}-\boldsymbol{g}^{ik}\Gamma_{ik}^{\ \ t}\delta\Gamma_{tr}^{\ \ r}$$

haciendo la integración por partes, aplicando el teorema de Gauss y reagrupando términos queda

$$\int\boldsymbol{g}^{ik}\delta R_{ik}d\Omega=\int\left(D_r\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}}-D_s\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{is}}\delta_r^k\right)\delta\Gamma_{ik}^{\ \ r}d\Omega, \qquad (3.E)$$

en cuya deducción hemos utilizado la primera de las condiciones (1.E).

Si en (3.E) las $\delta\Gamma_{ik}^{\ \ r}$ fueran independientes y dado que son variaciones arbitrarias tendríamos, como primer grupo de las ecuaciones de campo, la nulidad de la expresión entre paréntesis. Pero no todas las $\delta\Gamma_{ik}^{\ \ r}$ son independientes, puesto que debe cumplirse la primera condición (1.E), es decir las cuatro relaciones

$$\delta\Gamma_{kr}^{\ \ r}=\delta\Gamma_{rk}^{\ \ r}.$$

Si consideramos la identidad

$$D_r\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ir}}-D_r\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ri}}=2\partial_r\boldsymbol{g}^{[ir]}-\boldsymbol{g}^{(ir)}\tau_r$$

deducida con carácter general en el epígrafe 5-A, por las dos condiciones (1.E) se encuentran las cuatro igualdades

$$D_r\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ir}}=D_r\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ri}} \qquad (4.E)$$

lo que significa que $D_r\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}}$ no son 64 expresiones independientes sino sólo 60.

En su investigación original Einstein razona afirmando que al igual que hay sólo 60 expresiones independientes de $D_r\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}}$, lo mismo debe ser cierto para las cantidades que aparecen en el paréntesis de la integral (3.E), «asi podemos concluir que todos ellas se deben de anular». De esa anulación y siguiendo la misma técnica descrita en el epígrafe 5-A se concluye que $D_r\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}}=0$.

Aunque el resultado al que llega Einstein es el correcto, no lo es el procedimiento seguido. A continuación vamos aplicar una técnica que fue usada en la teoría **G** de Einstein (ver más adelante) para el caso de una teoría algo diferente.

El razonamiento consiste en definir una nueva conexión $\overset{*}{\Gamma}_{ik}^{\ \ r}$

$$\Gamma_{ik}^{\ \ r}=\overset{*}{\Gamma}_{ik}^{\ \ r}-\frac{1}{6}\left(\delta_i^r\overset{*}{\tau}_k-\delta_k^r\overset{*}{\tau}_r\right) \qquad (5.E)$$

de donde se deriva un vector de torsión $\overset{*}{\tau}_k=\overset{*}{\Gamma}_{kr}^{\ \ r}-\overset{*}{\Gamma}_{rk}^{\ \ r}$ no nulo y siendo $\Gamma_{ik}^{\ \ r}$ la conexión asociada a un vector de torsión nulo.

Para simplificar los cálculos vamos a definir la densidad tensorial $\boldsymbol{A}_r^{ik}$ que es la expresión entre paréntesis de (3.E)

$$\boldsymbol{A}_r^{ik}=D_r\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}}-D_s\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{is}}\delta_r^k \quad\Rightarrow\quad \int\boldsymbol{A}_r^{ik}\delta\Gamma_{ik}^{\ \ r}d\Omega=0, \qquad (6.E)$$

utilizando (5.E) el anterior integrando queda

$$\boldsymbol{A}_r^{ik}\delta\Gamma_{ik}^{\ \ r}=\boldsymbol{A}_r^{ik}\left[\delta\overset{*}{\Gamma}_{ik}^{\ \ r}-\frac{1}{6}\left(\delta_i^r\delta\overset{*}{\tau}_k-\delta_k^r\delta\overset{*}{\tau}_i\right)\right]$$

y por definición del vector de torsión

$$\boldsymbol{A}_r^{ik}\delta\Gamma_{ik}^{\ \ r}=\boldsymbol{A}_r^{ik}\delta\overset{*}{\Gamma}_{ik}^{\ \ r}+\frac{1}{3}\left(\boldsymbol{A}_p^{kp}-\boldsymbol{A}_p^{pk}\right)\delta\overset{*}{\Gamma}_{[kr]}^{\ \ r}=\boldsymbol{A}_r^{ik}\delta\overset{*}{\Gamma}_{ik}^{\ \ r}-\frac{1}{3}\left(\boldsymbol{A}_p^{kp}-\boldsymbol{A}_p^{pk}\right)\delta_r^i\delta\overset{*}{\Gamma}_{[ik]}^{\ \ r}=$$

$$=\boldsymbol{A}_r^{ik}\delta\overset{*}{\Gamma}_{ik}^{\ \ r}-\frac{1}{3}\left[\boldsymbol{A}_p^{[kp]}+\boldsymbol{A}_p^{[kp]}\right]\delta_r^i\delta\overset{*}{\Gamma}_{[ik]}^{\ \ r}=\boldsymbol{A}_r^{ik}\delta\overset{*}{\Gamma}_{ik}^{\ \ r}-\frac{1}{3}\left[\boldsymbol{A}_p^{[kp]}\delta_r^i-\boldsymbol{A}_p^{[ip]}\delta_r^k\right]\delta\overset{*}{\Gamma}_{[ik]}^{\ \ r}$$

donde hemos tenido en cuenta el carácter antisimétrico de $\delta\overset{*}{\Gamma}_{[ik]}^{\ \ r}$ y que los índices *i, k* son índices mudos. Como la expresión entre paréntesis del último miembro es antisimétrica en *i, k* la expresión anterior se puede poner

$$\boldsymbol{A}_r^{ik}\delta\Gamma_{ik}^{\ \ r}=\boldsymbol{A}_r^{ik}\delta\overset{*}{\Gamma}_{ik}^{\ \ r}-\frac{1}{3}\left[\boldsymbol{A}_p^{[kp]}\delta_r^i-\boldsymbol{A}_p^{[ip]}\delta_r^k\right]\delta\overset{*}{\Gamma}_{ik}^{\ \ r}=\left\{\boldsymbol{A}_r^{ik}-\frac{1}{3}\left[\boldsymbol{A}_p^{[kp]}\delta_r^i-\boldsymbol{A}_p^{[ip]}\delta_r^k\right]\right\}\delta\overset{*}{\Gamma}_{ik}^{\ \ r},$$

al llevar este resultado a la variación de la integral de acción y tener presente que las $\delta\overset{*}{\Gamma}_{ik}^{\ \ r}$ son arbitrarias e independientes, se encuentra

$$\boldsymbol{A}_r^{ik}-\frac{1}{3}\left[\boldsymbol{A}_p^{[kp]}\delta_r^i-\boldsymbol{A}_p^{[ip]}\delta_r^k\right]=0. \qquad (7.E)$$

Contrayendo los índices *k* y *r*

$$\mathbf{A}_r^{[ir]} = -\mathbf{A}_r^{ir}$$

que al llevarla a (7.E) queda

$$\mathbf{A}_r^{ik} + \frac{1}{3}\left[\mathbf{A}_p^{kp}\delta_r^i - \mathbf{A}_p^{ip}\delta_r^k\right] = 0. \tag{8.E}$$

De la defínción (5.E) encontramos

$$\mathbf{A}_p^{kp} = -3D_p \mathbf{g}^{\underset{+-}{kp}}$$

llevando este resultado a (8.E) queda

$$D_r \mathbf{g}^{\underset{+-}{ik}} - D_s \mathbf{g}^{\underset{+-}{ks}}\delta_r^i = 0 \tag{9.E}$$

contrayendo r e i se obtiene

$$D_s \mathbf{g}^{\underset{+-}{ks}} = 0$$

y tras sustituir en (9.E) hallamos finalmente

$$D_r \mathbf{g}^{\underset{+-}{ik}} = 0$$

que corresponde al primer conjunto de las ecuaciones de campo, que es deducido de la variación de la acción del campo respecto a la conexión.

Ahora es necesario calcular el otro conjunto de ecuaciones de campo, el que es deriva de la variación de la densidad del tensor métrico

$$\int \delta \mathbf{g}^{ik} R_{ik} d\Omega = 0 \tag{10.E}$$

pero ahora no todas $\delta \mathbf{g}^{ik}$ son independientes, pues se cumple el segundo grupo de las ecuaciones (1.E). Descomponiendo los factores del integrando de (10.E) en partes simétrica y antisimétrica resulta

$$\int \delta \mathbf{g}^{(ik)} R_{(ik)} d\Omega + \int \delta \mathbf{g}^{[ik]} R_{[ik]} d\Omega = 0$$

como las $\delta \mathbf{g}^{(ik)}$ son todas independientes, resulta como primer subgrupo de las segunda ecuación de campo

$$R_{(ik)} = 0.$$

Para abordar la variación de la segunda integral se puede hacer de la definición

$$\mathbf{g}^{[ik]} = \mathbf{g}^{iks}{}_{,s}$$

donde las $\mathbf{g}^{iks}$ son antisimetricas en todos sus índices. Entonces $\mathbf{g}^{iks}$ son las componentes que hay que variar. Integrando por partes y aplicando el teorema integral de Gauss se llega a

$$\int \delta \mathbf{g}^{iks}{}_{,s} R_{[ik]} d\Omega = \int \left(\delta \mathbf{g}^{iks} R_{[ik]}\right)_{,s} d\Omega - \int \delta \mathbf{g}^{iks} R_{[ik],s} d\Omega = -\int \delta \mathbf{g}^{iks} R_{[ik],s} d\Omega = 0.$$

Siguiendo la misma técnica que la descrita en 1-C se llega a la ecuación

$$R_{[ik],r} + R_{[ri],k} + R_{[kr],i} = 0$$

por tanto reencontramos el conjunto débil de ecuaciones de campo ya dada en (16.B) y obtenidas mediante un principio variacional.

F) EINSTEIN (1950): La generalización natural de las ecuaciones de la gravitación

1-F.- La simetría hermítica

Como hemos venido diciendo, Einstein entiende que la teoría de campo unificado tiene que ser un generalización de la teoría de la gravitación. Las ecuaciones de esta última son

$$\begin{aligned} &D_r \mathbf{g}^{ik} = 0 \\ &\tau_i = 0 \\ &R_{ik} = 0 \end{aligned} \tag{1.F}$$

con simetría del tensor métrico y de la conexión. Entonces es primero necesario generalizar el concepto de simetría y luego hallar unas ecuaciones de campo que no sean más que una generalización de (1.E) [34].

La generalización de la simetría de la Relatividad General es la llamada simetríca hermítica. Se dice que una magnitud A_{ik} tiene simetría hermítica respecto a dos índices *i, k* si al sustituir en A_{ik} el tensor métrico y la conexión por sus transpuestos, el resultado es el mismo tensor A_{ik} pero con los índices *i, k* intercambiados.

$$A_{ik}(g,\Gamma)=A_{ki}(\tilde{g},\tilde{\Gamma}).$$

Si al hacer en A_{ik} la sustitución del tensor métrico y la conexión por sus transpuestos resultara el opuesto de A_{ki} entonces decimos que el tensor es antihermítico, o sea

$$A_{ik}(\tilde{g},\tilde{\Gamma})=-A_{ki}(g,\Gamma).$$

Cualquier tensor A_{ik} se puede descomponer en la suma de un tensor hermítico y otro antihermítico

$$A_{ik}(g,\Gamma)=\overline{A}_{ik}(g,\Gamma)+\overline{\overline{A}}_{ik}(g,\Gamma)=\frac{1}{2}\left[A_{ik}(g,\Gamma)+A_{ki}(\tilde{g},\tilde{\Gamma})\right]+\frac{1}{2}\left[A_{ik}(g,\Gamma)-A_{ki}(\tilde{g},\tilde{\Gamma})\right]$$

donde el primer sumando tiene la simetría hermítica y el segundo es antihermítico.

El tensor métrico y la conexión tienen la propiedad de simetría hermítica

$$\tilde{g}_{ik}=g_{ki};\quad \tilde{\Gamma}_{ik}^{\ \ r}=\Gamma_{ki}^{\ \ r}.$$

Vemos que $D_r g^{\underset{+-}{ik}}$ tiene la simetría hermítica respecto a los índice *i, k*

$$D_r g^{\underset{+-}{ik}}(\tilde{g},\tilde{\Gamma})=D_r g^{\underset{+-}{ki}}(g,\Gamma),$$

notemos que $D_r g^{\underset{-+}{ik}}$ también tiene la misma simetría, pero no la tiene $D_r g^{\underset{++}{ik}}$ ni $D_r g^{\underset{--}{ik}}$.

2-F.- Las partes hermítica y antihermítica del tensor de Ricci

El tensor de Ricci no tiene la propiedad de hermiticidad, aunque siempre es posible descomponerlo en una parte hermítica y en otra parte antihermítica

$$R_{ik}=\overline{R}_{ik}+\overline{\overline{R}}_{ik}=\frac{1}{2}\left[R_{ik}(\Gamma)+R_{ki}(\tilde{\Gamma})\right]+\frac{1}{2}\left[R_{ik}(\Gamma)-R_{ki}(\tilde{\Gamma})\right]$$

donde $\overline{R}_{ik}$ es la parte hermítica y $\overline{\overline{R}}_{ik}$ la antihermítica. Advertimos que tanto $\overline{R}_{ik}$ como $\overline{\overline{R}}_{ik}$ son tensores; o dicho de otra forma si $R_{ik}(\Gamma)$ es un tensor también lo será $R_{ik}(\tilde{\Gamma})$. En efecto, si Γ es una conexión, tambien lo será su transpuesta, o sea, tendrán las mismas leyes de transformación, lo que originará que el tensor $R_{ik}(\Gamma)$ tenga la misma ley de transformación que $R_{ik}(\tilde{\Gamma})$, o sea que será un tensor.

De la definición de tensor de Ricci

$$R_{ik}=\Gamma_{ir,k}^{\ \ r}-\Gamma_{ik,r}^{\ \ r}+\Gamma_{ir}^{\ \ t}\Gamma_{tk}^{\ \ r}-\Gamma_{ik}^{\ \ t}\Gamma_{tr}^{\ \ r},$$

se obtiene

$$\overline{R}_{ik}=-\Gamma_{ik,r}^{\ \ r}+\Gamma_{ir}^{\ \ t}\Gamma_{tk}^{\ \ r}+\frac{1}{2}\left(\Gamma_{ir,k}^{\ \ r}+\Gamma_{rk,i}^{\ \ r}\right)-\frac{1}{2}\Gamma_{ik}^{\ \ t}\left(\Gamma_{tr}^{\ \ r}+\Gamma_{rt}^{\ \ r}\right),$$

si se descompone el tercer sumando en componentes simétricas y antisimétricas

$$\overline{R}_{ik}=-\Gamma_{ik,r}^{\ \ r}+\Gamma_{ir}^{\ \ t}\Gamma_{tk}^{\ \ r}+\frac{1}{2}\left[\Gamma_{(ir),k}^{\ \ \ r}+\Gamma_{(rk),i}^{\ \ \ r}\right]-\Gamma_{ik}^{\ \ t}\Gamma_{(tr)}^{\ \ r}+\frac{1}{2}\left[\Gamma_{[ir],k}^{\ \ \ r}+\Gamma_{[rk],i}^{\ \ \ r}\right]$$

de donde podemos obtener otro tensor

$$\overline{R}^{*}_{ik}=\overline{R}_{ik}+\frac{1}{2}\left[\Gamma_{[ir],k}^{\ \ \ r}+\Gamma_{[rk],i}^{\ \ \ r}\right]=-\Gamma_{ik,r}^{\ \ r}+\Gamma_{ir}^{\ \ t}\Gamma_{tk}^{\ \ r}+\frac{1}{2}\left[\Gamma_{(ir),k}^{\ \ \ r}+\Gamma_{(rk),i}^{\ \ \ r}\right]-\Gamma_{ik}^{\ \ t}\Gamma_{(tr)}^{\ \ r}$$

que es en efecto un tensor, puesto que $\left[\Gamma_{[ir],k}^{\ \ \ r}+\Gamma_{[rk],i}^{\ \ \ r}\right]$ se puede descomponer en suma de tensores

$$\left[\Gamma_{[ir],k}^{\ \ \ r}+\Gamma_{[rk],i}^{\ \ \ r}\right]=\frac{1}{2}\left(\tau_{i,k}-\tau_{k,i}\right)=D_k\tau_{\underset{+}{i}}-D_i\tau_{\underset{+}{k}}-\tau_s\tau_{ik}^{\ \ s}$$

donde $\tau_{ik}^{\ \ s}$ es el tensor de torsión, definido por

$$\tau_{ik}^{\ \ s}=\Gamma_{ik}^{\ \ s}-\Gamma_{ki}^{\ \ s}.$$

La parte antihermítica del tensor de Ricci es

$$\overline{\overline{R}}_{ik}=\frac{1}{2}\left[R_{ik}(\Gamma)+R_{ki}(\tilde{\Gamma})\right]=\frac{1}{2}\left(\Gamma_{ir,k}^{\ \ r}-\Gamma_{rk,i}^{\ \ r}\right)-\frac{1}{2}\Gamma_{ik}^{\ \ t}\Gamma_{tr}^{\ \ r}+\frac{1}{2}\Gamma_{ik}^{\ \ t}\Gamma_{rt}^{\ \ r},$$

descomponiendo el primer sumando en componentes simétricas y antisimétricas

$$\overline{\overline{R}}_{ik}=\frac{1}{2}\left[\Gamma_{(ir),k}^{\;r}-\Gamma_{(rk),i}^{\;r}\right]-\Gamma_{ik}^{\;t}\Gamma_{[tr]}^{\;r}+\frac{1}{2}\left[\Gamma_{[ir],k}^{\;r}-\Gamma_{[rk],i}^{\;r}\right]=\frac{1}{2}\left[\Gamma_{(ir),k}^{\;r}-\Gamma_{(rk),i}^{\;r}\right]-\frac{1}{2}\tau_t\Gamma_{ik}^{\;t}+\frac{1}{4}\left(\tau_{i,k}+\tau_{k,r}\right)$$

ahora bien, como

$$D_i\tau_{\underset{-}{k}}+D_k\tau_{\underset{+}{i}}=\partial_i\tau_k+\partial_k\tau_i-\Gamma_{ik}^{\;t}\Gamma_{[tr]}^{\;r}=\partial_i\tau_k+\partial_k\tau_i-2\tau_t\Gamma_{ik}^{\;t}$$

entonces encontramos finalmente para la parte antihermítica del tensor de Ricci

$$\overline{\overline{R}}_{ik}=\frac{1}{2}\left[\Gamma_{(ir),k}^{\;r}-\Gamma_{(rk),i}^{\;r}\right]+\frac{1}{4}\left(D_i\tau_{\underset{-}{k}}+D_k\tau_{\underset{+}{i}}\right).$$

3-F.- La curvatura homotética

Existen dos contracciones diferentes del tensor de curvatura, una da el tensor de Ricci y a la otra contracción se le llama curvatura homotética

$$V_{ik}=R^r_{\;rik}=\Gamma_{rk,i}^{\;r}-\Gamma_{ri,k}^{\;r}+\Gamma_{rk}^{\;n}\Gamma_{ni}^{\;r}-\Gamma_{ri}^{\;n}\Gamma_{nk}^{\;r}=\Gamma_{rk,i}^{\;r}-\Gamma_{ri,k}^{\;r},$$

que no tiene la propiedad de hermiticidad, no obstante se puede descomponer en parte hermítica y antihermítica

$$V_{ik}=\overline{V}_{ik}+\overline{\overline{V}}_{ik}=\frac{1}{2}\left[V_{ik}(\Gamma)+V_{ki}(\tilde{\Gamma})\right]+\frac{1}{2}\left[V_{ik}(\Gamma)-V_{ki}(\tilde{\Gamma})\right],$$

siendo la hermítica

$$\overline{V}_{ik}=\frac{1}{2}\left[V_{ik}(\Gamma)+V_{ki}(\tilde{\Gamma})\right]=\frac{1}{2}\left[\Gamma_{rk,i}^{\;r}-\Gamma_{kr,i}^{\;r}+\Gamma_{ir,k}^{\;r}-\Gamma_{ri,k}^{\;r}\right]=\frac{1}{2}\left(\tau_{i,k}-\tau_{k,i}\right).$$

Y la antihermítica

$$\overline{\overline{V}}_{ik}=\frac{1}{2}\left[V_{ik}(\Gamma)-V_{ki}(\tilde{\Gamma})\right]=\Gamma_{(rk),i}^{\;r}-\Gamma_{(ri),k}^{\;r}.$$

Notemos que ambas partes son tensores. En efecto, de

$$D_k\tau_{\underset{+}{i}}-D_i\tau_{\underset{+}{k}}=\tau_{i,k}-\tau_{k,i}-\tau_s\tau_{ik}^{\;s}=\overline{V}_{ik}-\tau_s\tau_{ik}^{\;s}$$

se encuentra que $\overline{V}_{ik}$ es un tensor por serlo todos los demás sumandos de la anterior igualdad y como también V_{ik} es un tensor, así debe serlo $\overline{\overline{V}}_{ik}$.

4-F.- La condición simétrica y la generalización natural de las ecuaciones de la gravitación

En la teoría **F** de Einstein de 1953 no se obtienen las ecuaciones de campo por mediación de un principio variacional, sino haciendo una generalización de las ecuaciones de la gravitación [28]. Esta generalización se consigue, primero tomando tanto al tensor métrico como a la conexión como cantidades asimétricas. Luego extendiendo el concepto de simetría caracteristico de la geometría de Riemann hasta llegar a la idea de simetría hermítica.

En esta teoría Einstein introduce la condición de simetría, según la cual cuando en una ley física intercambiamos el tensor métrico y la conexión por sus transpuestos, la ley permanece inalterable. Démonos cuenta que este concepto es diferente de la simetría hermítica. Si una ecuación tiene la simetría hermítica tiene también la condición de simétría, pero el inverso no es cierto. Por ejemplo, supongamos un tensor A_{ik} que dependiendo del tensor métrico y de la conexión tenga simetría hermítica, es decir

$$A_{ik}(g,\Gamma)=A_{ki}(\tilde{g},\tilde{\Gamma})$$

entonces si la ley física viene dada por la expresión

$$A_{ik}(g,\Gamma)=0$$

se cumpliría

$$A_{ki}(\tilde{g},\tilde{\Gamma})=0\quad\Rightarrow\quad A_{ik}(\tilde{g},\tilde{\Gamma})=0.$$

Mientras que la condición de simetría exige que si

$$A_{ik}(g,\Gamma)=0$$

entonces

$$A_{ik}(\tilde{g},\tilde{\Gamma})=0$$

lo que no significa que

$$A_{ik}\left(g,\Gamma\right)=A_{ki}\left(\tilde{g},\tilde{\Gamma}\right).$$

Por lo tanto la condición de simetría es más estricta que la simetría hermítica.

Como ya hemos mostrado, la generalización de la ecuación $D_r \boldsymbol{g}^{ik}=0$ de la Relatividad General es $D_r \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}}=0$ que cumple la condición de simetría, además $D_r \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}}$ tiene simetría hermítica respecto a los índices *i, k*. Notemos que si $D_r \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}}=0$ entonces $D_r\sqrt{g}=0$ y por tanto $D_r g^{\underset{+-}{ik}}=0$.

El otro conjunto de ecuaciones del campo gravitatorio es $R_{ik}=0$ al que le podemos añadir la nulidad de la curvatura homotética $V_{ik}=0$. En la generalización de la gravitación conservamos estas dos ecuaciones, añadiendo de que también se cumpla la condición de simetria, es decir

$$R_{ik}\left(g,\Gamma\right)=0;\;\; V_{ik}\left(g,\Gamma\right)=0 \quad\Rightarrow\quad R_{ik}\left(\tilde{g},\tilde{\Gamma}\right)=0;\;\; V_{ik}\left(\tilde{g},\tilde{\Gamma}\right)=0.$$

Entonces por una parte tenemos

$$\begin{aligned}R_{ik}\left(g,\Gamma\right)&=\bar{R}_{ik}\left(g,\Gamma\right)+\bar{\bar{R}}_{ik}\left(g,\Gamma\right)=0\\ V_{ik}\left(g,\Gamma\right)&=\bar{V}_{ik}\left(g,\Gamma\right)+\bar{\bar{V}}_{ik}\left(g,\Gamma\right)=0\end{aligned}$$

y por otra parte

$$\begin{aligned}R_{ik}\left(\tilde{g},\tilde{\Gamma}\right)&=\bar{R}_{ik}\left(\tilde{g},\tilde{\Gamma}\right)+\bar{\bar{R}}_{ik}\left(\tilde{g},\tilde{\Gamma}\right)=\bar{R}_{ki}\left(g,\Gamma\right)-\bar{\bar{R}}_{ki}\left(g,\Gamma\right)=0 \quad\Rightarrow\quad \bar{R}_{ik}\left(g,\Gamma\right)-\bar{\bar{R}}_{ik}\left(g,\Gamma\right)=0\\ V_{ik}\left(\tilde{g},\tilde{\Gamma}\right)&=\bar{V}_{ik}\left(\tilde{g},\tilde{\Gamma}\right)+\bar{\bar{V}}_{ik}\left(\tilde{g},\tilde{\Gamma}\right)=\bar{V}_{ki}\left(g,\Gamma\right)-\bar{\bar{V}}_{ki}\left(g,\Gamma\right)=0 \quad\Rightarrow\quad \bar{V}_{ik}\left(g,\Gamma\right)-\bar{\bar{V}}_{ik}\left(g,\Gamma\right)=0\end{aligned}$$

de estas cuatro ecuaciones se deriva

$$\bar{R}_{ik}\left(g,\Gamma\right)=0;\;\; \bar{\bar{R}}_{ik}\left(g,\Gamma\right)=0;\;\; \bar{V}_{ki}\left(g,\Gamma\right)=0;\;\; \bar{\bar{V}}_{ki}\left(g,\Gamma\right)=0$$

todas estas cantidades han sido calculadas anteriormente

$$\begin{aligned}\bar{R}_{ik}&=\bar{R}^*_{ik}-\frac{1}{2}\left[\Gamma^{\;r}_{[ir],k}+\Gamma^{\;r}_{[rk],i}\right]=\bar{R}^*_{ik}-\frac{1}{2}\left[\tau_{i,k}-\tau_{k,i}\right]=0\\ \bar{\bar{R}}_{ik}&=\frac{1}{2}\left[\Gamma^{\;r}_{(ir),k}-\Gamma^{\;r}_{(rk),i}\right]+\frac{1}{4}\left(D_i\tau_{\underset{-}{k}}+D_k\tau_{\underset{+}{i}}\right)=0\\ \bar{V}_{ik}&=\frac{1}{2}\left(\tau_{i,k}-\tau_{k,i}\right)=0\\ \bar{\bar{V}}_{ik}&=\Gamma^{\;r}_{(rk),i}-\Gamma^{\;r}_{(ri),k}=0\end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned}&\bar{R}_{ik}=0\\ &\tau_{i,k}-\tau_{k,i}=0\\ &\Gamma^{\;r}_{(rk),i}-\Gamma^{\;r}_{(ri),k}=0\\ &D_i\tau_{\underset{-}{k}}+D_k\tau_{\underset{+}{i}}=0.\end{aligned}\qquad (2.F)$$

Las anteriores ecuaciones se pueden simplificar. Por la definición de derivada del determinante del tensor métrico se tiene

$$D_r\sqrt{g}=\frac{1}{2}\sqrt{g}g^{ik}D_r g_{\underset{+-}{ik}}=\frac{1}{2}\sqrt{g}\left(g^{ik}\partial_r g_{ik}-\Gamma^{\;s}_{sr}-\Gamma^{\;s}_{rs}\right)=\sqrt{g}\left(\partial_r\ln\sqrt{g}-\Gamma^{\;s}_{(sr)}\right)$$

de donde se deduce

$$\left(\frac{D_r\sqrt{g}}{\sqrt{g}}\right)_{,t}-\left(\frac{D_t\sqrt{g}}{\sqrt{g}}\right)_{,r}=\Gamma^{\;s}_{(ts),r}-\Gamma^{\;s}_{(sr),t},$$

ahora bien, como la derivada covariante del tensor métrico es nula por cumplirse $D_r g_{\underset{+-}{ik}}=0$, entonces por la expresión anterior se concluye

$$\Gamma^{\;s}_{(ts),r}-\Gamma^{\;s}_{(sr),t}=0$$

que es la tercera ecuación (2.F) que, por tanto, no es una de las ecuaciones de campo, sino una consecuencia de $D_r g_{\underset{+-}{ik}}=0$.

Por cálculo directo se obtiene que en general

$$D_i\tau_{\underset{-}{k}}-D_k\tau_{\underset{+}{i}}=\tau_{k,i}-\tau_{i.k}$$

entonces por la segunda y la cuarta de las ecuaciones (2-F)

$$D_i \tau_{\underset{-}{k}} = 0; \qquad D_k \tau_{\underset{+}{i}} = 0.$$

Por otra parte tenemos que

$$D_i \tau_{\underset{+}{k}} = \partial_i \tau_k - \tau_s \Gamma_{ki}{}^s = 0$$

$$D_i \tau_{\underset{-}{k}} = \partial_i \tau_k - \tau_s \Gamma_{ik}{}^s = 0$$

restando ambas expresiones y teniendo en cuenta la segunda ecuación (2.F) llegamos a

$$\tau_s \Gamma_{[ik]}^{\ s} = 0 \tag{3.F}$$

que se trata de un sistema de 6 ecuaciones con cuatro incógnitas. La ecuación (3.F) tiene carácter tensorial y por tanto es válida en cualquier sistema de coordenadas. Si τ_k es cero en algún sistema de coordenadas tiene que anularse también en cualquier otro sistema y viceversa, si τ_k es distinta de cero en un sistema de coordenadas seguirá siendo no nula en cualquier otro sistema de coordenadas. Basta que en algún punto y respecto a algún sistema de coordenadas se anule τ_s para que, de la anulación de $D_r \tau_s = 0$ y derivadas superiores, se cumpla que τ_s se anula en todo punto. Con lo que podemos concluir que (3.F) implica $\tau_s = 0$.

Finalmente veamos que la parte hermítica del tensor de Ricci

$$\overline{R}_{ik} = -\Gamma_{ik,r}^{\ \ r} + \Gamma_{ir}^{\ \ t}\Gamma_{tk}^{\ \ r} + \frac{1}{2}\left[\Gamma_{(ir),k}^{\ \ r} + \Gamma_{(rk),i}^{\ \ r}\right] - \Gamma_{ik}^{\ \ t}\Gamma_{(tr)}^{\ \ r} + \frac{1}{2}\left[\Gamma_{[ir],k}^{\ \ r} + \Gamma_{[rk],i}^{\ \ r}\right]$$

se simplifica, en el sentido de que el último sumando es nulo, por serlo el vector de torsión, mientras que el tercer sumando se transforma por la tercera ecuación (2.F) y como $\Gamma_{ir}^{\ \ r}$ sólo tiene parte simétrica encontramos que $\overline{R}_{ik}$ es idéntica al tensor de Ricci R_{ik}

Por tanto las ecuaciones de campo encontradas son

$$D_r g_{\underset{+}{i}\underset{-}{k}} = 0$$

$$\tau_i = 0$$

$$R_{ik} = 0$$

que coinciden con las ecuaciones fuertes de la teoría de campo.

G) EINSTEIN (1950): La condición de simetría

1-G.- La densidad lagrangiana

En la teoría **G** que Einstein dedujo en el año 1953 a partir de un principio variacional [28] la acción es

$$I = \int \boldsymbol{g}^{ik} R_{ik} d\Omega \tag{1.G}$$

donde R_{ik} es el tensor de Ricci

$$R_{ik} = \Gamma_{ir,k}^{\ \ r} - \Gamma_{ik,r}^{\ \ r} + \Gamma_{ir}^{\ \ t}\Gamma_{tk}^{\ \ r} - \Gamma_{ik}^{\ \ t}\Gamma_{tr}^{\ \ r},$$

que como ya hemos visto no es hermítico.

La variación de (1.G) se hace para el tensor métrico y la conexión, de la que no se impone previamente ninguna condición. De la variación con respecto al tensor métrico se obtiene

$$R_{ik} = 0.$$

2-G.- La variación respecto a la conexión

Al variar (1.G) respecto a la conexión tenemos

$$\delta I = \int \boldsymbol{g}^{ik} \delta R_{ik} d\Omega = 0.$$

Integrando por partes, aplicando el teorema de Gauss y sacando factor común a $\delta\Gamma_{ik}^{\ \ r}$ el integrando queda

$$\left(-\partial_s \boldsymbol{g}^{is}\delta_r^k + \partial_r \boldsymbol{g}^{ik} + \boldsymbol{g}^{sk}\Gamma_{sr}^{\ \ i} + \boldsymbol{g}^{is}\Gamma_{rs}^{\ \ k} - \boldsymbol{g}^{st}\Gamma_{st}^{\ \ i}\delta_r^k - \boldsymbol{g}^{ik}\Gamma_{rs}^{\ \ s}\right)\delta\Gamma_{ik}^{\ \ r},$$

como las variaciones de la conexión son todas arbitrarias e independientes se obtiene del principio variacional la ecuación

$$-\partial_s \boldsymbol{g}^{is}\delta_r^k + \partial_r \boldsymbol{g}^{ik} + \boldsymbol{g}^{sk}\Gamma_{sr}^{\ \ i} + \boldsymbol{g}^{is}\Gamma_{rs}^{\ \ k} - \boldsymbol{g}^{st}\Gamma_{st}^{\ \ i}\delta_r^k - \boldsymbol{g}^{ik}\Gamma_{rs}^{\ \ s} = 0$$

o bien

$$D_r \mathbf{g}^{\underset{+-}{ik}} - D_s \mathbf{g}^{\underset{+-}{is}} \delta_r^k - 2\tau_r \mathbf{g}^{ik} - 2\tau_s \mathbf{g}^{is} \delta_r^k = 0. \tag{2.G}$$

Ahora aplicamos la condición de simetría, es decir si (2.G) es una ecuación de campo, también lo sería la ecuación resultante de cambiar en (2.G) el tensor métrico y la conexión por sus transpuestas. Si además intercambiamos los índices *i* y *k* nos queda

$$D_r \mathbf{g}^{\underset{+-}{ik}} - D_s \mathbf{g}^{\underset{+-}{sk}} \delta_r^i + 2\tau_r \mathbf{g}^{ik} + 2\tau_s \mathbf{g}^{sk} \delta_r^i = 0, \tag{3.G}$$

donde hemos tenido en cuenta que al intercambiar la conexión por su transpuesta cambia el signo del vector de torsión. Restando (2.G) y (3.G) queda

$$D_s \mathbf{g}^{\underset{+-}{sk}} \delta_r^i - D_s \mathbf{g}^{\underset{+-}{is}} \delta_r^k - 4\tau_r \mathbf{g}^{ik} - 2\tau_s \mathbf{g}^{sk} \delta_r^i - 2\tau_s \mathbf{g}^{is} \delta_r^k = 0. \tag{4.G}$$

Si suponemos que $i \neq r$ y $k \neq r$ entonces de (4.G) se deduce que $\tau_r = 0$. Si ahora en (4.G) suponemos que $i = r$ pero $k \neq r$ entonces se deduce que

$$D_s \mathbf{g}^{\underset{+-}{sk}} = 0.$$

Al llevar estos dos resultados a (50) o a (51) se obtiene

$$D_r \mathbf{g}^{\underset{+-}{ik}} = 0.$$

Resumiendo, las ecuaciones de campo son

$$D_r \mathbf{g}^{\underset{+-}{ik}} = 0$$
$$\tau_i = 0$$
$$R_{ik} = 0$$

es decir, el sistema débil de ecuaciones de campo.

H) EINSTEIN (1950): Las ecuaciones fuertes generalizadas

1-H.- La densidad lagrangiana

En la teoría **H** de Einstein publicada en el año 1953 [28] las ecuaciones de campo unificado son obtenidas a partir de un principio de mínima acción, exigiéndose que la densidad lagrangiana cumpla el «principio de simetría», es decir que tenga simetría hermítica, entendiendo con ello que debe permanecer invariante cuando se hace el cambio del tensor métrico y de la conexión por sus transpuestos. Einstein toma en esta teoría la acción

$$\delta I = \delta \int \mathbf{g}^{ik} \overline{R}^*_{ik} \, d\Omega = 0,$$

donde

$$\overline{R}^*_{ik} = \overline{R}_{ik} - \frac{1}{2}\left[\Gamma^{\ \ r}_{[ir],k} + \Gamma^{\ \ r}_{[rk],i}\right] = -\Gamma_{ik,r}^{\ \ r} + \Gamma_{ir}^{\ \ t}\Gamma_{tk}^{\ \ r} + \frac{1}{2}\left[\Gamma^{\ \ r}_{(ir),k} + \Gamma^{\ \ r}_{(rk),i}\right] - \Gamma_{ik}^{\ \ t}\Gamma^{\ \ r}_{(tr)}$$

tal como fue definida en el epígrafe 2-F, siendo $\overline{R}_{ik}$ el tensor hermítico derivado del tensor de Ricci R_{ik}. Además se impone la condición *a priori* de que el vector de torsión es nulo $\tau_i = 0$. En este caso, el tensor $\overline{R}^*_{ik}$ coincide con $\overline{R}_{ik}$.

2-H.- Las ecuaciones de campo

Se hace la variación del tensor métrico y de la conexión. Como todas las variaciones del tensor métrico son independientes y arbitrarias, entonces del principio de mínima acción se encuentra

$$\overline{R}^*_{ik} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{R}_{ik} = 0.$$

La variación de la acción con respecto a la conexión se hace siguiendo la misma técnica que la utilizada anteriormente, no obstante ahora no todas las componentes de la conexión son independientes. Se puede utilizar la identidad de Palatini o bien hacer la variación directamente, como haremos a continuación. El integrando de la variación de la acción resulta ser

$$\mathbf{g}^{ik}\delta\overline{R}^*_{ik} = -\mathbf{g}^{ik}\delta\Gamma_{ik,r}^{\ \ r} + \mathbf{g}^{ik}\Gamma_{ir}^{\ \ t}\delta\Gamma_{tk}^{\ \ r} + \mathbf{g}^{ik}\Gamma_{tk}^{\ \ r}\delta\Gamma_{ir}^{\ \ t} + \frac{1}{2}\mathbf{g}^{ik}\delta\Gamma^{\ \ r}_{(ir),k} +$$
$$+\frac{1}{2}\mathbf{g}^{ik}\delta\Gamma^{\ \ r}_{(rk),i} - \mathbf{g}^{ik}\Gamma_{ik}^{\ \ t}\delta\Gamma^{\ \ r}_{(tr)} - \mathbf{g}^{ik}\Gamma^{\ \ r}_{(tr)}\delta\Gamma_{ik}^{\ \ t},$$

haciendo la integración por partes y aplicando el teorema de Gauss obtenemos para el integrando de la variación de la acción

$$\boldsymbol{g}^{ik}\delta\bar{R}^*_{ik} = \partial_r \boldsymbol{g}^{ik}\delta\Gamma_{ik}{}^{r} + \boldsymbol{g}^{ik}\Gamma_{ir}{}^{t}\delta\Gamma_{tk}{}^{r} + \boldsymbol{g}^{ik}\Gamma_{tk}{}^{r}\delta\Gamma_{ir}{}^{t} - \frac{1}{2}\partial_k \boldsymbol{g}^{ik}\delta\Gamma_{(ir)}{}^{r} +$$
$$-\frac{1}{2}\partial_i \boldsymbol{g}^{ik}\delta\Gamma_{(rk)}{}^{r} - \boldsymbol{g}^{ik}\Gamma_{ik}{}^{t}\delta\Gamma_{(tr)}{}^{r} - \boldsymbol{g}^{ik}\Gamma_{(tr)}{}^{r}\delta\Gamma_{ik}{}^{t},$$

el sexto sumando se descompone en

$$\boldsymbol{g}^{ik}\Gamma_{ik}{}^{t}\delta\Gamma_{(tr)}{}^{r} = \frac{1}{2}\boldsymbol{g}^{pq}\Gamma_{pq}{}^{i}\delta\Gamma_{(ir)}{}^{r} + \frac{1}{2}\boldsymbol{g}^{pq}\Gamma_{pq}{}^{k}\delta\Gamma_{(kr)}{}^{r}$$

si ahora sacamos factor común se tiene

$$\boldsymbol{g}^{ik}\delta\bar{R}^*_{ik} = \left[\partial_r \boldsymbol{g}^{ik} + \boldsymbol{g}^{tk}\Gamma_{tr}{}^{i} + \boldsymbol{g}^{it}\Gamma_{rt}{}^{k} - \boldsymbol{g}^{ik}\Gamma_{(rt)}{}^{t}\right]\delta\Gamma_{ik}{}^{r} -$$
$$-\frac{1}{2}\left[\partial_t \boldsymbol{g}^{it} + \boldsymbol{g}^{pq}\Gamma_{pq}{}^{i}\right]\delta\Gamma_{(ir)}{}^{r} - \frac{1}{2}\left[\partial_t \boldsymbol{g}^{tk} + \boldsymbol{g}^{pq}\Gamma_{pq}{}^{k}\right]\delta\Gamma_{(kr)}{}^{r}$$

el primer paréntesis del segundo miembro no es más que $D_r\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{i\,k}}$. Para simplificar el segundo y tercer sumando tenemos en cuenta que

$$D_t\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{i\,t}} = \partial_t \boldsymbol{g}^{it} + \boldsymbol{g}^{pt}\Gamma_{pt}{}^{i} + \boldsymbol{g}^{ip}\Gamma_{tp}{}^{t} - \boldsymbol{g}^{it}\Gamma_{(rt)}{}^{r} = \partial_t \boldsymbol{g}^{it} + \boldsymbol{g}^{pt}\Gamma_{pt}{}^{i}$$

puesto que los dos últimos sumandos de la anterior derivada covariante se anulan por ser nulo el vector de torsión. Por tanto el integrando de la variación de la acción se transforma en

$$\boldsymbol{g}^{ik}\delta\bar{R}^*_{ik} = D_r\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{i\,k}}\delta\Gamma_{ik}{}^{r} - \frac{1}{2}D_t\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{i\,t}}\delta\Gamma_{(ir)}{}^{r} - \frac{1}{2}D_t\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{t\,k}}\delta\Gamma_{(kr)}{}^{r}.$$

Desarrollando las variaciones de la conexión de los dos últimos sumandos y sacando factor común llegamos a

$$\boldsymbol{g}^{ik}\delta\bar{R}^*_{ik} = \left[D_r\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{i\,k}} - \frac{1}{2}\boldsymbol{N}^{i}\delta^{k}_{r} - \frac{1}{2}\boldsymbol{N}^{k}\delta^{i}_{r}\right]\delta\Gamma_{ik}{}^{r} \tag{1.H}$$

donde hemos definido

$$\boldsymbol{N}^{i} = \frac{1}{2}\left(D_t\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{i\,t}} + D_t\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{t\,i}}\right)$$

Si todas las componentes de la conexión fueran independientes entonces de (1.H) se derivarían las ecuaciones de campo igualando a cero la expresión entre paréntesis. Pero la anulación del vector de torsión hace que no todas las componentes de la conexión sean independientes, impidiendo que se pueda igualar a cero la expresión entre paréntesis de (1.H).

Para resolver este problema se procede a definir una nueva conexión

$$\Gamma_{ik}{}^{r} = \Gamma^{*}_{ik}{}^{r} - \frac{1}{6}\left(\tau^*_i\delta^r_k - \tau^*_k\delta^k_i\right)$$

que tiene la propiedad de que tiene asociada un vector de torsión nulo $\tau_i = 0$, siendo diferente de cero τ^*_i, en efecto

$$\tau_i = \Gamma_{ir}{}^{r} - \Gamma_{ri}{}^{r} = \tau^*_i - \frac{1}{6}\left(4\tau^*_i - \tau^*_i - \tau^*_i + 4\tau^*_i\right) = 0.$$

De (1.H) hacemos la definición

$$\boldsymbol{M}^{ik}_{r} = D_r\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{i\,k}} - \frac{1}{2}\boldsymbol{N}^{i}\delta^{k}_{r} - \frac{1}{2}\boldsymbol{N}^{k}\delta^{i}_{r} \tag{2.H}$$

ahora hacemos el cambio de conexión

$$\boldsymbol{g}^{ik}\delta\bar{R}^*_{ik} = \boldsymbol{M}^{ik}_{r}\delta\Gamma_{ik}{}^{r} = \boldsymbol{M}^{ik}_{r}\delta\Gamma^{*}_{ik}{}^{r} - \frac{1}{6}\boldsymbol{M}^{ik}_{r}\left(\delta\tau^*_i\delta^r_k - \delta\tau^*_k\delta^r_i\right)$$

al desarrollar las variaciones del vector de torsión y ponerlo en función de la variación de la conexión queda

$$\boldsymbol{g}^{ik}\delta\bar{R}^*_{ik} = \boldsymbol{M}^{ik}_{r}\delta\Gamma_{ik}{}^{r} = \left\{\boldsymbol{M}^{ik}_{r} - \frac{1}{3}\left[\boldsymbol{M}^{[it]}_{t}\delta^{k}_{r} - \boldsymbol{M}^{[kt]}_{t}\delta^{i}_{r}\right]\right\}\delta\Gamma^{*}_{ik}{}^{r},$$

las componentes de la conexión con asterisco son independientes, ya que el vector de torsión asociado no es nulo. Por tanto la anulación de la variación de la acción exige que

$$\boldsymbol{M}_r^{ik} - \frac{1}{3}\left[\boldsymbol{M}_t^{[it]}\delta_r^k - \boldsymbol{M}_t^{[kt]}\delta_r^i\right] = 0. \tag{3.H}$$

De (2.H) se obtiene que

$$\boldsymbol{M}_t^{[it]} = \frac{1}{2}\left(D_t\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{i\,t}} - D_t\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{t\,i}}\right); \quad \boldsymbol{M}_t^{[kt]} = \frac{1}{2}\left(D_t\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{k\,t}} - D_t\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{t\,k}}\right)$$

si hacemos la definición

$$\boldsymbol{M}^i = \frac{1}{2}\left(D_t\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{i\,t}} - D_t\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{t\,i}}\right) = g^{[it]}{}_{,t}$$

nos queda para la ecuación de campo (3.H)

$$D_r\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{i\,k}} - \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{N}^i\delta_r^k + \boldsymbol{N}^k\delta_r^i\right) - \frac{1}{3}\left(\boldsymbol{M}^i\delta_r^k - \boldsymbol{M}^k\delta_r^i\right) = 0,$$

al contraer la anterior ecuación respecto a los índices r y k se encuentra después de alguna simplificación

$$D_t\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{i\,t}} = -D_t\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{t\,i}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{N}^i = 0$$

con lo que la ecuación de campo (3.H) queda

$$D_r\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{i\,k}} - \frac{1}{3}\left(\boldsymbol{M}^i\delta_r^k - \boldsymbol{M}^k\delta_r^i\right) = 0. \tag{4.H}$$

Resumiendo, la teoría **H** tiene por ecuaciones

$$\begin{aligned} &D_r\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{i\,k}} - \frac{1}{3}\left(\boldsymbol{M}^i\delta_r^k - \boldsymbol{M}^k\delta_r^i\right) = 0 \\ &\tau_i = 0 \\ &\overline{R}^*_{ik} = 0 \end{aligned} \tag{5.H}$$

ecuaciones ligeramente diferentes a las del sistema fuerte, pero son coincidentes cuando $\boldsymbol{M}^i = \boldsymbol{g}^{[it]}{}_{,t} = 0$. Si se cumple esta igualdad, entonces

$$\Gamma^{\;\;r}_{(ir),k} = \Gamma^{\;\;r}_{(rk),i}$$

como ya hemos visto anteriormente y como $\tau_i = 0$ entonces el tensor $\overline{R}^*_{ik}$ coincide con el tensor de Ricci R_{ik}. Naturalmente en este caso las ecuaciones no se derivan completamente de un principio variacional.

I) EINSTEIN (1950): Las ecuaciones débiles obtenidas de un sólo multiplicador de Lagrange

1-I.- La densidad lagraniana y las ecuaciones de campo

Esta deducción, que llamamos **I** y que también fue formulada en el año 1953 [28], es una continuación de la anteriormente expuesta, que consigue convertir las ecuaciones (5.H) en el sistema débil de campo siguiendo exclusivamente un principio variacional.

El tratamiento es utilizar la misma densidad lagrangiana que en la teoría **H** pero con el añadido de un único multiplicador de Lagrange

$$\delta I = \delta\int\left(\boldsymbol{g}^{ik}\overline{R}^*_{ik} + b_i\,\boldsymbol{g}^{[it]}{}_{,t}\right)d\Omega = 0,$$

donde b_i es el multiplicador de Lagrange. La variación es realizada respecto al tensor métrico, a la conexión y a b_i. Añadamos que en esta deducción, al igual que en la **H**, se impone la condición *a priori* de la anulación del vector de torsión.

De la variación con respecto a la conexión obtenemos de nuevo la ecuación (4.H). Al variar respecto a b_i y dado que todas sus componentes son independientes hallamos

$$\boldsymbol{g}^{[it]}{}_{,t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{M}^i = 0,$$

finalmente es necesario hallar la variación respecto a las componentes del tensor métrico

$$\int\left\{\overline{R}^*_{ik}\delta\boldsymbol{g}^{ik} + b_i\,\delta\boldsymbol{g}^{[it]}{}_{,t}\right\}d\Omega = 0, \tag{1.I}$$

donde todas las componentes del tensor métrico son independientes. Siguiendo la técnica ya desarrollada en la deducción **B** se encuentra para el integrando de la variación de la acción

$$\overline{R}^{*}_{ik}\delta\boldsymbol{g}^{ik}+\frac{1}{2}b_i\left(\delta\boldsymbol{g}^{it}{}_{,t}-\delta\boldsymbol{g}^{ti}{}_{,t}\right)$$

integrando por partes y utilizando el teorema de Gauss nos queda

$$\overline{R}^{*}_{ik}\delta\boldsymbol{g}^{ik}-\frac{1}{2}\partial_t b_i\,\delta\boldsymbol{g}^{it}+\frac{1}{2}\partial_t b_i\,\delta\boldsymbol{g}^{ti}=\overline{R}^{*}_{ik}\delta\boldsymbol{g}^{ik}-\frac{1}{2}\partial_k b_i\,\delta\boldsymbol{g}^{ik}+\frac{1}{2}\partial_i b_k\,\delta\boldsymbol{g}^{ik}$$

entonces el principio de mínima acción es

$$\int\left[\overline{R}^{*}_{ik}+\frac{1}{2}\left(\partial_i b_k-\partial_k b_i\right)\right]\delta\boldsymbol{g}^{ik}\,d\Omega=0$$

y las ecuaciones de campo

$$\overline{R}^{*}_{ik}+\frac{1}{2}\left(\partial_i b_k-\partial_k b_i\right)=0$$

que como hemos hecho en otras ocasiones se descompone en parte simétrica y antisimétrica

$$\begin{aligned}&\overline{R}^{*}_{(ik)}=0\\&\overline{R}^{*}_{[ik],r}+\overline{R}^{*}_{[kr],i}+\overline{R}^{*}_{[ri],k}=0.\end{aligned}$$

Como se cumple (1.I) y además el vector de torsión es nulo, entonces el tensor $\overline{R}^{*}_{ik}$ coincide con el tensor de Ricci. Resumiendo, las ecuaciones de campo son

$$\begin{aligned}&D_r\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}}=0\\&\tau_i=0\\&R_{(ik)}=0\\&R_{[ik],r}+R_{[kr],i}+R_{[ri],k}=0,\end{aligned}$$

o sea, el sistema débil de ecuaciones. Hay que recordar que la segunda ecuación es equivalente a (1.I), siempre y cuando se cumpla la primera de las ecuaciones anteriores.

J) EINSTEIN (1953): La conexión de Schrödinger

1-J.- La densidad lagrangiana y el principìo variacional

En el método desarrollado en la teoría **J** de Einstein del año 1953 se formula la densidad lagrangiana a partir del tensor de Ricci, sin adaptarlo para que sea hermítico y no supone *a priori* ninguna condición de la conexión ni de la métrica. Esta deducción aprovecha la idea de Schrödinger de transformar la conexión, para que de una conexión genérica obtener otra que tenga asociada un vector de torsión nulo.

Como hemos dicho, la teoría **J** parte del tensor de Ricci

$$R_{ik}=\Gamma_{ir,k}^{\ r}-\Gamma_{ik,r}^{\ r}+\Gamma_{ir}^{\ t}\Gamma_{tk}^{\ r}-\Gamma_{ik}^{\ t}\Gamma_{tr}^{\ r},$$

siendo el principio variacional

$$\delta I=\delta\int\boldsymbol{g}^{ik}R_{ik}=0\;d\Omega=0,\tag{1.J}$$

variándose respecto al tensor métrico y a la conexión, cuyas componentes son todas independientes.

2-J.- Las ecuaciones de campo

La variación de las componentes de la densidad del tensor métrico en el principio variacional (1.J) da la ecuación

$$R_{ik}=0,$$

puesto que todas las $\boldsymbol{g}^{ik}$ son independientes y arbitrarias. Mientras que al hacer la variación de las componentes de la conexión se obtiene para el integrando de la acción

$$\boldsymbol{g}^{ik}\delta R_{ik}=\boldsymbol{g}^{ik}\delta\Gamma_{ir,k}^{\ r}-\boldsymbol{g}^{ik}\delta\Gamma_{ik,r}^{\ r}+\boldsymbol{g}^{ik}\Gamma_{ir}^{\ t}\delta\Gamma_{tk}^{\ r}+\boldsymbol{g}^{ik}\Gamma_{tk}^{\ r}\delta\Gamma_{ir}^{\ t}-\boldsymbol{g}^{ik}\Gamma_{ik}^{\ t}\delta\Gamma_{tr}^{\ r}-\boldsymbol{g}^{ik}\Gamma_{tr}^{\ r}\delta\Gamma_{ik}^{\ t},$$

cuando se hace la integración por partes y se aplica el teorema de Gauss obtenemos para el integrando de la acción

$$\boldsymbol{g}^{ik}\delta R_{ik}=-\partial_k \boldsymbol{g}^{ik}\delta\Gamma_{ir}{}^{r}+\partial_r \boldsymbol{g}^{ik}\delta\Gamma_{ik}{}^{r}+\boldsymbol{g}^{ik}\Gamma_{ir}{}^{t}\delta\Gamma_{tk}{}^{r}+\boldsymbol{g}^{ik}\Gamma_{tk}{}^{r}\delta\Gamma_{ir}{}^{t}-\boldsymbol{g}^{ik}\Gamma_{ik}{}^{t}\delta\Gamma_{tr}{}^{r}-\boldsymbol{g}^{ik}\Gamma_{tr}{}^{r}\delta\Gamma_{ik}{}^{t}$$

y al sacar factor común la variación de la conexión se llega a

$$\boldsymbol{g}^{ik}\delta R_{ik}=\left(-\partial_t \boldsymbol{g}^{it}\delta_r^k+\partial_r \boldsymbol{g}^{ik}+\boldsymbol{g}^{tk}\Gamma_{tr}{}^{i}+\boldsymbol{g}^{it}\Gamma_{rt}{}^{k}-\boldsymbol{g}^{tp}\Gamma_{tp}{}^{i}\delta_r^k-\boldsymbol{g}^{ik}\Gamma_{rt}{}^{t}\right)\delta\Gamma_{ik}{}^{r}.$$

Entonces como todas las componentes de la conexión son independientes y también arbitrarias se encuentra al aplicar el principio de mínima acción

$$-\partial_t \boldsymbol{g}^{it}\delta_r^k+\partial_r \boldsymbol{g}^{ik}+\boldsymbol{g}^{tk}\Gamma_{tr}{}^{i}+\boldsymbol{g}^{it}\Gamma_{rt}{}^{k}-\boldsymbol{g}^{tp}\Gamma_{tp}{}^{i}\delta_r^k-\boldsymbol{g}^{ik}\Gamma_{rt}{}^{t}=0, \tag{2.J}$$

como deducimos en 3-A la derivada covariante de la densidad del tensor métrico es

$$D_r \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}}=\partial_r \boldsymbol{g}^{ik}+\boldsymbol{g}^{sk}\Gamma_{sr}{}^{i}+\boldsymbol{g}^{is}\Gamma_{rs}{}^{k}-\frac{1}{2}\boldsymbol{g}^{ik}\left(\Gamma_{sr}{}^{s}+\Gamma_{rs}{}^{s}\right)$$

utilizando este resultado la ecuación (2.J) se transforma en

$$D_r \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}}-D_t \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{it}}\delta_r^k-\frac{1}{2}\boldsymbol{g}^{ik}\tau_r-\frac{1}{2}\boldsymbol{g}^{it}\tau_t\delta_r^k=0 \tag{3.J}$$

donde hemos utilizado la descomposición

$$\Gamma_{ik}{}^{r}=\Gamma_{(ik)}{}^{r}+\Gamma_{[ik]}{}^{r}$$

e introducido el vector de torsión por

$$\tau_i=\Gamma_{ir}{}^{r}-\Gamma_{ri}{}^{r}=2\Gamma_{[ir]}{}^{r}.$$

Contrayendo los índices k y r de la ecuación (3.J)

$$D_t \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{it}}-4D_t \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{it}}-\frac{1}{2}\boldsymbol{g}^{it}\tau_t-2\boldsymbol{g}^{it}\tau_t=0 \quad\Rightarrow\quad D_t \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{it}}=-\frac{5}{6}\boldsymbol{g}^{it}\tau_t,$$

y llevando este resultado a (3.J) queda

$$D_r \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}}-\frac{1}{2}\boldsymbol{g}^{ik}\tau_r+\frac{1}{3}\boldsymbol{g}^{it}\tau_t\delta_r^k=0, \tag{4.J}$$

que es la ecuación de campo, donde admitimos que la conexión es general y no sometida a ninguna limitación.

Pero la ecuación (4.J) no representa la natural generalización de la correspondiente ecuación de la Relatividad General, en donde la derivada covariante del tensor métrico es nula. Para que se alcance esta generalización sería necesario que el vector de torsión fuera nulo, si se impusiera esta condición no haríamos más que reencontar las ecuaciones fuertes de campo, que como ya sabemos no se derivan de un principio variacional y por tanto no tiene asegurada su compatibilidad.

El procedimiento seguido por Einstein en la teoría **J** consiste en introducir una nueva conexión, la cual tiene asociado un vector de torsión nulo, siguiendo con ello una idea de Schrödinger. La nueva conexión es

$$\overset{*}{\Gamma}_{ik}{}^{r}=\Gamma_{ik}{}^{r}+\frac{1}{3}\delta_i^r\tau_k$$

cuyo vector de torsión es

$$\tau_i^*=\overset{*}{\Gamma}_{ir}{}^{r}-\overset{*}{\Gamma}_{ri}{}^{r}=\tau_i+\frac{1}{3}\tau_i-\frac{4}{3}\tau_i=0.$$

Si calculamos $D_r^* \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}}$, que es la derivada covariante pero con la conexión estrellada, obtenemos

$$D_r^* \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}}=D_r \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}}-\frac{1}{2}\boldsymbol{g}^{ik}\tau_r+\frac{1}{3}\boldsymbol{g}^{it}\tau_t\delta_r^k$$

de acuerdo con (4.J) encontramos

$$D_r^* \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}}=0$$

De la ecuación

$$D_r^* \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ir}}-D_r^* \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ri}}=2\partial_r \boldsymbol{g}^{[ir]}-\boldsymbol{g}^{(ir)}\tau_r^*$$

deducida en 7-A con carácter general encontramos que se debe cumplir $\partial_r \boldsymbol{g}^{[ir]}=0$.

Resumiendo, las ecuaciones de campo encontradas son

$$D_r^* \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}}=0$$

$$\begin{aligned} \tau_i^* &= 0 \\ R_{ik} &= 0 \end{aligned} \tag{5.J}$$

nótese que la primera de ellas son 64 ecuaciones, pero por la identidad $\partial_r \boldsymbol{g}^{[ir]} = 0$ quedan reducidas a 60 ecuaciones independientes, tantas como componentes independientes existen de la conexión.

Mientras que las dos primeras ecuaciones (5.J) vienen dadas en función de la conexión estrellada, la última de las ecuaciones sigue estando en función de la conexión primitiva, debemos por tanto expresar el tensor de Ricci en función de la conexión afín estrellada, encontrándose

$$R_{ik} = R^*_{ik} + \frac{1}{3}\left(\tau_{k,i} - \tau_{i,k}\right) \tag{6.J}$$

donde R^*_{ik} es el tensor de Ricci calculado con la conexión $\Gamma^{*\ r}_{ik}$. Entonces la tercera ecuación (5.J) queda tras descomponerla en parte simétrica y antisimétrica

$$\begin{aligned} R^*_{(ik)} &= 0 \\ R^*_{[ik]} &= \frac{1}{3}\left(\tau_{i,k} - \tau_{k,i}\right) \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} &R^*_{(ik)} = 0 \\ &R^*_{[ik],r} + R^*_{[kr],i} + R^*_{[r,i],k} = 0 \end{aligned}$$

si ahora quitamos los asteriscos, las ecuaciones de campo quedan

$$\begin{aligned} &D_r \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}} = 0 \\ &\tau_i = 0 \\ &R_{(ik)} = 0 \\ &R_{[ik],r} + R_{[kr],i} + R_{[r,i],k} = 0 \end{aligned}$$

o sea, lo que hemos llamado sistema débil y que son obtenidas por un principio variacional sin necesidad de establecer condiciones *a priori.* Esta deducción que acabamos de desarrollar es la misma que aparece en la teoría de Einstein de 1925 [19].

K) EINSTEIN (1953): El tensor de Ricci modificado

1-K.- La modificación del tensor de Ricci

Una vez más Einstein propone otra deducción de las ecuaciones de campo [34], para ello modifica el tensor de Ricci tras imponer la condición de que de las ecuaciones de campo debe derivarse «la más simple relación entre el tensor métrico y la conexión», es decir

$$D_r \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}} = 0.$$

Se parte del tensor de Ricci

$$R_{ik} = \Gamma_{ir,k}^{\ \ r} - \Gamma_{ik,r}^{\ \ r} + \Gamma_{ir}^{\ \ t}\Gamma_{tk}^{\ \ r} - \Gamma_{ik}^{\ \ t}\Gamma_{tr}^{\ \ r},$$

al que se le resta el tensor

$$D_k \Gamma_{\left[\underset{+}{i}\, r\right]}^{\ \ r} = \Gamma_{[ir],k}^{\ \ r} - \Gamma_{[tr]}^{\ \ r}\Gamma_{ik}^{\ \ t} \tag{1.K}$$

obteniéndose

$$R^*_{ik} = R_{ik} - D_k\Gamma_{[ir]}^{\ \ r} = -\Gamma_{ik,r}^{\ \ r} + \Gamma_{ir}^{\ \ t}\Gamma_{tk}^{\ \ r} + \Gamma_{(ir),k}^{\ \ r} - \Gamma_{ik}^{\ \ t}\Gamma_{(tr)}^{\ \ r}, \tag{2.K}$$

que es un tensor puesto que (1.K) es un tensor por serlo la parte antimétrica de la conexión. De la definición de derivada covariante del determinante del tensor métrico tenemos

$$D_r\sqrt{g} = \frac{1}{2\sqrt{g}} D_r g = \frac{1}{2}\sqrt{g}\, g^{pq} D_r g_{\underset{+-}{pq}} \tag{3.K}$$

que es una densidad vectorial por serlo el miembro derecho. Desarrollando la derivada covariante del tensor métrico se encuentra

$$D_r\sqrt{g}=\partial_r\sqrt{g}-\sqrt{g}\Gamma_{(rs)}^{\;\;s},$$

despejando la conexión afín

$$\Gamma_{(rs)}^{\;\;s}=\frac{\partial_r\sqrt{g}}{\sqrt{g}}-\frac{D_r\sqrt{g}}{\sqrt{g}}$$

al sustituir en (2.K) encontramos

$$R^{*}_{ik}=\left[-\Gamma_{ik,r}^{\;\;r}+\Gamma_{ir}^{\;\;t}\Gamma_{tk}^{\;\;r}\right]+\left[\partial_k\left(\frac{\partial_i\sqrt{g}}{\sqrt{g}}\right)-\left(\frac{\partial_t\sqrt{g}}{\sqrt{g}}\right)\Gamma_{ik}^{\;\;t}\right]-\left[\partial_k\left(\frac{D_i\sqrt{g}}{\sqrt{g}}\right)-\left(\frac{D_t\sqrt{g}}{\sqrt{g}}\right)\Gamma_{ik}^{\;\;t}\right] \quad (4.K)$$

el último paréntesis es un tensor; en efecto, por (3.K) sabemos que la derivada covariante de la raíz cuadrada del determinante del tensor métrico es una densidad vectorial, por tanto si dividimos ese determinante por $\sqrt{g}$ encontramos un vector, por esta razón podemos aplicar la regla de derivación covariante de un vector a la expresión

$$D_k\left(\frac{D_i\sqrt{g}}{\sqrt{g}}\right)=\partial_k\left(\frac{D_i\sqrt{g}}{\sqrt{g}}\right)-\frac{D_t\sqrt{g}}{\sqrt{g}}\Gamma_{ik}^{\;\;t}$$

que resulta ser el último sumando de (4.K). Entonces

$$\begin{aligned}R^{**}_{ik}=R^{*}_{ik}+D_k\left(\frac{D_i\sqrt{g}}{\sqrt{g}}\right)&=\left[-\Gamma_{ik,r}^{\;\;r}+\Gamma_{ir}^{\;\;t}\Gamma_{tk}^{\;\;r}\right]+\left[\partial_k\left(\frac{\partial_i\sqrt{g}}{\sqrt{g}}\right)-\left(\frac{\partial_t\sqrt{g}}{\sqrt{g}}\right)\Gamma_{ik}^{\;\;t}\right]=\\&=\left[-\Gamma_{ik,r}^{\;\;r}+\Gamma_{ir}^{\;\;t}\Gamma_{tk}^{\;\;r}\right]+\partial_k\partial_i\ln\sqrt{g}-\partial_t\ln\sqrt{g}\Gamma_{ik}^{\;\;t},\end{aligned} \quad (5.K)$$

que resulta ser un tensor por ser la suma de dos tensores, el cual nos servirá para formar la densidad lagrangiana. Notemos que (5.K) es idéntico al tensor (5.A), aunque obtenido por procedimientos distintos.

2-K.- La densidad lagrangiana y el principio variacional

La deducción **K** de Einstein toma *a priori* la condición

$$\boldsymbol{g}^{[is]}_{\;\;,s}=0$$

pero para obtener ecuaciones de campo compatibles es necesario que esta condición sea deducida de un principio variacional, utilizándose para ello los multiplicadores de Lagrange. La acción elegida es

$$I=\int\left(\boldsymbol{g}^{ik}R^{**}_{ik}+b_i\,\boldsymbol{g}^{[is]}_{\;\;,s}\right)d\Omega$$

donde b_i son los multiplicadores de Lagrange y R^{**}_{ik} es definida en (5.K). Se aplica el principio de mínima acción

$$\delta I=\delta\int\left(\boldsymbol{g}^{ik}R^{**}_{ik}+b_i\,\boldsymbol{g}^{[is]}_{\;\;,s}\right)d\Omega=0$$

de donde se obtienen tres conjuntos de ecuaciones, los correspondientes a las variaciones de la conexión, del tensor afín y de las cantidades b_i .

Al variar las b_i consideradas todas independientes se encuentra

$$\boldsymbol{g}^{[is]}_{\;\;,s}=0. \quad (6.K)$$

Al variar la acción con respecto a la conexión seguimos la misma técnica expuesta en el epígrafe 7.A llegando, por tanto, al mismo resultado

$$D_r\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}}=0. \quad (7.K)$$

Por la ecuación

$$D_r\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ir}}-D_r\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ri}}=2\partial_r\boldsymbol{g}^{[ir]}-\boldsymbol{g}^{(ir)}\tau_r$$

deducida en 7.A y teniendo en cuenta (6.K) y (7.K), se llega a la conclusión

$$\tau_i=0. \quad (8.K)$$

Al variar la acción con respecto a la conexión seguimos, igualmente, lo ya expuesto en el epígrafe 7.A, donde resulta que el integrando de la variación de la acción es

$$R_{ik}^{**}\delta\mathfrak{g}^{ik},$$

pero nuestra acción difiere de la adoptada en la deducción **A**, puesto que tiene un segundo sumando con el multiplicador de Lagrange b_i . Entonces el integrando de la variación de la acción queda

$$R_{ik}^{**}\delta\mathfrak{g}^{ik}+b_i\,\delta\mathfrak{g}^{[is]}{}_{,s}=R_{ik}^{**}\delta\mathfrak{g}^{ik}+\frac{1}{2}b_i\,\delta\mathfrak{g}^{is}{}_{,s}-\frac{1}{2}b_i\,\delta\mathfrak{g}^{si}{}_{,s}$$

integrando por partes y aplicando el teorema de Gauss nos queda

$$R_{ik}^{**}\delta\mathfrak{g}^{ik}-\frac{1}{2}b_{i,s}\,\delta\mathfrak{g}^{is}+\frac{1}{2}b_{i,s}\,\delta\mathfrak{g}^{si}=\left[R_{ik}^{**}-\frac{1}{2}\left(b_{i,k}-b_{k,i}\right)\right]\delta\mathfrak{g}^{ik}$$

y al aplicar el principio de mínima acción encontramos

$$R_{ik}^{**}-\frac{1}{2}\left(b_{i,k}-b_{k,i}\right)=0,$$

que, al igual que hemos hecho antes, se descompone en parte simétrica y antisimétrica

$$R_{(ik)}^{**}=0$$
$$R_{[ik],r}^{**}+R_{[kr],i}^{**}+R_{[ri],k}^{**}=0.$$

Ahora bien, como

$$R_{ik}^{**}=R_{ik}-D_k\Gamma_{[ir]}^{\ \ r}+D_k\left(\frac{D_i\sqrt{g}}{\sqrt{g}}\right)$$

al cumplirse (7.K) y (8.K) y por tanto ser nula la derivada covariante del determinante del tensor métrico, encontramos que R_{ik}^{**} es idéntico al tensor de Ricci R_{ik} . Por tanto, las ecuaciones de campo son

$$D_r\mathfrak{g}^{\underset{+-}{ik}}=0$$
$$\tau_i=0$$
$$R_{(ik)}=0$$
$$R_{[ik],r}+R_{[kr],i}+R_{[ri],k}=0,$$

o sea, el sistema débil de ecuaciones de campo, derivadas íntegramente de un principio variacional. Anotar que la segunda ecuación es eiquivalente a (8.K).

L) EINSTEIN-KAUFMAN (1955): Ecuaciones de campo con vector de torsión no nulo

1-L.- La invariancia por transposición y la condición de simetría

En esta deducción como en las anteriores, Einstein y Kaufmann entienden que la teoría unificada de campo debe ser una generalización de la teoría relativista de la gravitación [33]. En este sentido se debe buscar una generalización de la propiedad simétrica que poseen en Relatividad General tanto el tensor métrico como la conexión y el tensor de Ricci.

Einstein considera que una expresión con índices (sea o no tensorial) tiene la propiedad de transposición invariante (o tener simetría hermítica) con respecto a dos índices *i*, *k* si al cambiar las componentes del tensor métrico y de la conexión por sus transpuestas y luego cambiar el índice *i* por el *k*, la expresión permanece inalterable. En palabras de Einstein «en la teoría no simétrica, el requerimiento de transposición invariante sirve para restringir considerablemente la variedad de construcciones adecuadas. Desde el punto de vista del significado físico, el requirimiento de transposición invariante se supone que expresa la invariancia de las leyes de campo con respecto al signo de la electricidad».

Otro concepto algo diferente del anterior, pero que también pretende ser una generalización de la simetría que aparece en la Relatividad General, es la condición de simetría, que afirma que al cambiar en una ley física el tensor métrico y la conexión por sus transpuestas la ley permanece inalterable. Supongamos la ecuación

$$H_{pq}\left(g_{ik},\Gamma_{ik}^{\ r}\right)=0$$

donde H_{pq} es una función del tensor métrico y de la conexión; se dice que tiene la condición de simetría si también se cumple

$$H_{pq}\left(\tilde{g}_{ik},\tilde{\Gamma}_{ik}^{\ \ r}\right)=0 \tag{1.L}$$

o bien

$$H_{qp}\left(\tilde{g}_{ik},\tilde{\Gamma}_{ik}^{\ \ r}\right)=0 \tag{2.L}$$

el orden de los índices de H_{pq} no es importante, puesto que tanto (1.L) como (2.L) representan la misma ecuación.

El concepto de condición de simetría se extiende al caso de un escalar: si al sustituir el tensor métrico y la conexión por sus transpuestas la función escalar permanece inalterable, se dice que tiene la condición de simetría.

2-L.- La densidad lagrangiana

En la mayoría de las deducciones hasta ahora presentadas, Einstein procura que la densidad lagrangiana sea invariante por transposición, esto asegura que las ecuaciones de campo que sean derivadas también tengan igual propiedad. No obstante, en la deducción que ahora presentamos la densidad lagrangiana no tiene esa propiedad. Las ecuaciones de campo van a ser obtenidas del siguiente principio variacional

$$\delta I=\delta\int \boldsymbol{g}^{ik}R_{ik}d\Omega=0 \tag{3.L}$$

donde R_{ik} es el tensor de Ricci, que no es invariante por transposición, por tanto la densidad lagrangiana no tiene la condición de simetría, como tampoco la tendrán las ecuaciones que de ella derivemos.

La variación de (3.L) es realizada como en las anteriores deducciones, tanto respecto al tensor métrico como respecto a la conexión, cuyas componentes no están sometidas a ninguna limitación, es decir todas ellas son independientes. Al variar respecto al tensor métrico obtenemos

$$R_{ik}=0. \tag{4.L}$$

Al variar con respecto a la conexión seguimos el mismo procedimiento que en la sección **J**, llegando a (2.J)

$$\partial_r\boldsymbol{g}^{ik}+\boldsymbol{g}^{tk}\Gamma_{tr}^{\ \ i}+\boldsymbol{g}^{it}\Gamma_{rt}^{\ \ k}-\boldsymbol{g}^{ik}\Gamma_{rt}^{\ \ t}-\left(\partial_t\boldsymbol{g}^{it}+\boldsymbol{g}^{tp}\Gamma_{tp}^{\ \ i}\right)\delta_r^k=0,$$

o bien

$$D_r\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}}-\boldsymbol{g}^{ik}\Gamma_{[rt]}^{\ \ \ t}-D_t\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{it}}\delta_r^k-\boldsymbol{g}^{ip}\Gamma_{[pt]}^{\ \ \ t}\delta_r^k=0, \tag{5.L}$$

donde se ha hecho la descomposición de la conexión en partes simétrica y antisimétrica.

Al contraer los índices *r* y *k* en (5.L) obtenemos

$$D_t\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{it}}=-\frac{5}{3}\boldsymbol{g}^{it}\Gamma_{[tr]}^{\ \ \ r}$$

al insertar la anterior expresión en (5.L) se llega a

$$D_r\boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}}=\frac{1}{2}\boldsymbol{g}^{ik}\tau_r-\frac{1}{3}\delta_r^k\boldsymbol{g}^{it}\tau_t. \tag{6.L}$$

Si los índices que contraemos son el *r* y el *i*

$$\boldsymbol{g}^{[it]}_{\ \ \ ,t}=0. \tag{7.L}$$

La ecuación (6.L) no es invariante por transposición como era previsible, al derivarse de una acción que tampoco tiene esa propiedad. No obstante, (4.L), (6.L) y (7.L) representan un sistema matemáticamente correcto de ecuaciones de campo, pero desde el punto de vista físico no son satisfactorias pues (6.L) no se entiende como una generalización de la correspondiente ecuación de la Relatividad General.

M) EINSTEIN-KAUFMAN (1955): El campo auxiliar y la normalización

1-M.- El campo auxiliar

En el apartado anterior hemos deducido unas ecuaciones de campo caracterizadas por no ser nulo el vector de torsión, que aunque insatisfactoria dentro de los planteamientos seguidos por Einstein son, no obstante, unas ecuaciones matemáticamente viables.

Si el vector de torsión fuera nulo, entonces (6.L) tendría la forma deseada, pero al imponer esta condición ya no estaríamos siguiendo estrictamente el principio variacional, sino un método mixto, el cual no garantiza la campatibilidad de las ecuaciones resultantes.

Para no destruir la compatibilidad y seguir exclusivamente con el principio variacional podemos definir una nueva conexión [36]

$$\Gamma_{ik}^{\ \ r} = \Gamma_{ik}^{*\ r} + \delta_i^r \Lambda_k$$

donde Λ_k es un campo auxiliar con carácter vectorial. Notemos que $\Gamma_{ik}^{*\ r}$ es una conexión por ser la diferencia de una conexión y del tensor $\delta_i^r \Lambda_k$.

Ahora vamos a expresar la acción en función de la nueva conexión y haremos la variación, además de respecto al tensor métrico y la conexión, también respecto al vector Λ_k. Tenemos

$$R_{ik} = R_{ik}^* + \left(\Lambda_{i,k} - \Lambda_{k,i}\right),$$

donde R_{ik}^* es el tensor de Ricci en función de las conexión $\Gamma_{ik}^{*\ r}$. Entonces el principio variacional quedará

$$\delta I = \delta \int \boldsymbol{g}^{ik} R_{ik} d\Omega = \delta \int \left[\boldsymbol{g}^{ik} R_{ik}^* + \left(\Lambda_{i,k} - \Lambda_{k,i}\right) \right] d\Omega.$$

Al variar con respecto al tensor métrico tenemos

$$R_{ik}^* + \left(\Lambda_{i,k} - \Lambda_{k,i}\right) = 0. \tag{1.M}$$

Al variar con respecto a la conexión volvemos a encontrar (5.L), pero ahora en esta expresión estará la conexión $\Gamma_{ik}^{*\ r}$ en vez de $\Gamma_{ik}^{\ \ r}$. Finalmente al variar respecto al campo auxiliar nos queda en el integrando de la variación de la acción

$$\boldsymbol{g}^{ik}\left(\delta\Lambda_{i,k} - \delta\Lambda_{k,i}\right) \ \Rightarrow\ -\partial_k \boldsymbol{g}^{ik} \delta\Lambda_i + \partial_i \boldsymbol{g}^{ik} \delta\Lambda_k = -\boldsymbol{g}^{[it]}{}_{,t} \delta\Lambda_i$$

y como todas las componentes del campo auxiliar son independientes, nos queda

$$\boldsymbol{g}^{[it]}{}_{,t} = 0$$

lo cual no es más que la expresión (7.L) ya obtenida.

Ahora a las cuatro componentes del campo auxiliar se le puede dar cualquier valor, adoptándose aquellos que hagan $\tau_i^* = 0$, es decir hacemos

$$\Lambda_i = \frac{1}{3} \tau_i .$$

Llevando este último resultado a (6.L), descomponiendo (1.M) en parte simétrica y antisimétrica como se ha hecho en otras ocasiones, se obtiene finalmente

$$\begin{aligned} &D_r^* \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}} = 0 \\ &\tau_i^* = 0 \\ &R_{(ik)}^* = 0 \\ &R_{[ik],r}^* + R_{[kr],i}^* + R_{[ri],k}^* = 0 \end{aligned}$$

o sea, el sistema débil de las ecuaciones de campo.

N) EINSTEIN-KAUFMAN (1955): La transformación lambda

1-N.- El pseudotensor $U_{ik}^{\ \ r}$

El tensor con el que se forma la densidad lagrangiana en las anteriores teorías peca de ser poco natural. En unas ocasiones se ha procedido a modificar el tensor de Ricci, con el propósito de obtener a partir de un principio variacional la anulación de la derivada covariante de la densidad del tensor métrico. En otras ocasiones hemos utilizado, artificiosamente, los multiplicadores de Lagrange, para alcanzar por el principio de mínima acción identidades complementarias. En fin, en otras ocasiones se han introducido campos auxiliares a los que se le ha exigido una normalización *a posteriori*. Añadir que también hemos expuesto métodos que no siguen un principio variacional o bien utilizan un método mixto.

En la mayoría de las deducciones expuestas anteriormente se ha pretendido que los tensores utilizados tengan la propiedad de invariancia de transposición (o simetría hermítica). En cualquier caso la búsqueda de esta simetría se establecía para obtener ecuaciones que cumplieran con la que hemos llamado condición de simetría, o sea, que las ecuaciones fueran invariantes frente al cambio del tensor métrico y la conexión por sus transpuestas.

El tensor de Ricci

$$R_{ik} = \Gamma_{ir,k}^{\ \ r} - \Gamma_{ik,r}^{\ \ r} + \Gamma_{ir}^{\ \ t}\Gamma_{tk}^{\ \ r} - \Gamma_{ik}^{\ \ t}\Gamma_{tr}^{\ \ r},$$

no tiene la propiedad de invariancia por transposicion, por esta razón buscamos un procedimiento que de forma natural transforme el anterior tensor en otro que goce de la simetría por transposición.

Para conseguir este propósito se definen las cantidades [36]

$$U_{ik}^{\ \ r} = \Gamma_{ik}^{\ \ r} - \Gamma_{is}^{\ \ s}\delta_k^r, \tag{1.N}$$

que son llamadas un pseudo tensor, que según la definición de Einstein y Kaufman significa unas cantidades que se transforman como un vector frente a transformaciones de coordenadas lineales, y cuya ley de transformación difiere de la de un tensor en términos que no contienen a la propia cantidad.

Se puede invertir (1.N), para ello notemos que

$$U_{is}^{\ \ s} = \Gamma_{is}^{\ \ s} - 4\Gamma_{is}^{\ \ s} = -3\Gamma_{is}^{\ \ s} \quad \Rightarrow \quad \Gamma_{is}^{\ \ s} = -\frac{1}{3}U_{is}^{\ \ s}$$

aplicando este resultado en (1.N) se encuentra

$$\Gamma_{ik}^{\ \ r} = U_{ik}^{\ \ r} - \frac{1}{3}U_{is}^{\ \ s}\delta_k^r .$$

Se puede expresar el tensor de Ricci en función del pseudo tensor $U_{ik}^{\ \ r}$ quedando

$$R_{ik} = -U_{ik,r}^{\ \ r} + U_{ir}^{\ \ t}U_{tk}^{\ \ r} - \frac{1}{3}U_{ir}^{\ \ r}U_{tk}^{\ \ t} \tag{2.N}$$

que se puede comprobar fácilmente que tiene la propiedad de invariancia por transposición, es decir que si en la ecuación anterior se sustituyen las U por sus transpuestas y luego se intercambia los índice i y k, volvemos a encontrar el tensor de Ricci.

Por lo tanto hemos encontrado sin excesivos artificios una expresión para el tensor de Ricci que tiene la propiedad de invariancia por transposición y que nos sirve para construir una densidad lagragiana adecuada para obtener la acción del campo.

2-N.- Transformación de $U_{ik}^{\ \ r}$ en un cambio del sistema de coordenadas

Ante una transformación de coordenadas la conexión afín se transforma según la ley [95]

$$\Gamma'^{\ \ r}_{ik} = B_k^q B_i^s A_p^r \Gamma_{sq}^{\ \ p} + B_{ik}^s A_s^r \ ; \qquad \Gamma'^{\ \ t}_{it} = B_t^q B_i^s A_p^t \Gamma_{sq}^{\ \ p} + B_{it}^s A_s^t$$

lo que nos permite determinar la transformación del pseudo tensor

$$U'^{\ \ r}_{ik} = \Gamma'^{\ \ r}_{ik} - \Gamma'^{\ \ s}_{is}\delta_k^r ,$$

entonces

$$U'^{\ \ r}_{ik} = B_k^q B_i^s A_p^r \Gamma_{sq}^{\ \ p} + B_{ik}^s A_s^r - \left(B_t^q B_i^s A_p^t \Gamma_{sq}^{\ \ p} + B_{it}^s A_s^t\right)\delta_k^r ,$$

ahora bien el primer sumando del paréntesis se transforma según

$$B_t^q B_i^s A_p^t \Gamma_{sq}^{\ \ p}\delta_k^r = B_i^s \Gamma_{st}^{\ \ t}\delta_k^r = B_i^s \Gamma_{st}^{\ \ t} B_k^q A_p^r \delta_q^p$$

entonces

$$U'^{\ \ r}_{ik} = B_k^q B_i^s A_p^r U_{sq}^{\ \ p} + B_{ik}^s A_s^r - B_{it}^s A_s^t \delta_k^r \tag{3.N}$$

que es la ley de transformación del pseudo tensor frente a transformaciones de coordenadas y que nos muestra que, en efecto, $U_{ik}^{\ \ r}$ es un pseudo tensor porque se comporta como un tensor cuando la transformación de coordenadas es lineal (es decir cuando $B_{ik}^s = 0$) y los dos últimos sumandos de (3.M) no continenen a $U_{ik}^{\ \ r}$.

3-N.- La transformación lambda

Definimos la transformación lambda como aquella que deja invariante las componentes del tensor métrico pero transforma las componentes del pseudo tensor según la ley

$$U_{ik}^{*\ r} = U_{ik}^{\ \ r} + \left(\delta_i^r \lambda_{,k} - \delta_k^r \lambda_{,i}\right)(4.\text{N}) \tag{4.N}$$

donde λ es un escalar y por tanto $\lambda_{,k}$ es un vector covariante. Debemos notar que esta transformación, a diferencia de otras establecidas en otras deducciones anteriores, está en función de la derivada de un escalar $\partial\lambda/\partial x^i$. Una transformación diferente sería si en vez de $\lambda_{,i}$ apareciera un vector λ_i.

Por cálculo directo se comprueba que el tensor de Ricci es invariante frente a un cambio de transformación lambda, por tanto la acción del campo también es invariante frente a la misma transformación.

Al hacer una transformación lambda, no solo cambia el pseudo tensor, sino también la conexión afín, según la ley

$$\overset{*}{\Gamma}{}_{ik}^{\ r} = \Gamma_{ik}^{\ r} + \delta_i^r \lambda_{,k}\,. \tag{5.N}$$

4-N.- Ecuaciones de campo

El principio de mínima acción se define como

$$\delta I = \delta \int \boldsymbol{g}^{ik} R_{ik} = 0$$

donde las variaciones se hacen respecto al tensor métrico y respecto al pseudo tensor. Al variar respecto al tensor métrico obtenemos la primera ecuación de campo

$$R_{ik} = -U_{ik,\mathrm{r}}^{\ r} + U_{ir}^{\ t} U_{tk}^{\ r} - \frac{1}{3} U_{ir}^{\ r} U_{tk}^{\ t} = 0. \tag{6.N}$$

Al variar respecto a $U_{ik}^{\ r}$ tenemos para el integrando de la variación de la acción

$$\boldsymbol{g}^{ik}\delta R_{ik} = -\boldsymbol{g}^{ik}\delta U_{ik,r}^{\ r} + \boldsymbol{g}^{ik} U_{ir}^{\ t}\delta U_{tk}^{\ r} + \boldsymbol{g}^{ik} U_{tk}^{\ r}\delta U_{ir}^{\ t} U_{tk}^{\ r} - \frac{1}{3}\boldsymbol{g}^{ik} U_{ir}^{\ r}\delta U_{tk}^{\ t} - \frac{1}{3}\boldsymbol{g}^{ik} U_{tk}^{\ t}\delta U_{ir}^{\ r}$$

al integrar por partes, aplicar el teorema de Gauss y sacar factor común encontramos

$$\boldsymbol{g}^{ik}\delta R_{ik} = \left(\partial_r \boldsymbol{g}^{ik} + \boldsymbol{g}^{tk} U_{tr}^{\ i} + \boldsymbol{g}^{it} U_{rt}^{\ k} - \frac{1}{3}\boldsymbol{g}^{pk} U_{pt}^{\ t}\delta_r^i - \frac{1}{3}\boldsymbol{g}^{ip} U_{tp}^{\ t}\delta_r^k\right)\delta U_{ik}^{\ r}$$

como todas las componentes de $U_{ik}^{\ r}$ son independientes, resulta del principio de mínima acción

$$\partial_r \boldsymbol{g}^{ik} + \boldsymbol{g}^{pk}\left(U_{pr}^{\ i} - \frac{1}{3} U_{pt}^{\ t}\delta_r^i\right) + \boldsymbol{g}^{ip}\left(U_{rp}^{\ k} - \frac{1}{3} U_{tp}^{\ t}\delta_r^k\right) = 0 \tag{7.N}$$

que es el otro grupo de ecuaciones de campo.

Démonos cuenta que las ecuaciones de campo (5.N) y (7.N) son invariantes frente a transformación lambda, además de ser invariantes frente a transposición, o más concretamente cumplen la condición de simetría, ya que se derivan de una densidad lagrangiana que tiene esas propiedades, como también se puede demostrar por cálculo directo. (7N) se pueden expresar en función de la conexión afín, en vez de respecto al pseudo tensor $U_{ik}^{\ r}$. Llevando la definición (1.N) a (7.N) se encuentra que el sistema de ecuaciones de campo invariantes lambda son

$$\begin{aligned} &D_r \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}} - \frac{1}{2}\boldsymbol{g}^{ik}\tau_r + \frac{1}{3}\boldsymbol{g}^{ip}\tau_p \delta_r^k = 0 \\ &R_{ik} = 0 \end{aligned} \tag{8.N}$$

donde el tensor de Ricci está en función de la conexión afín.

O) EINSTEIN (1955): La equivalencia entre las ecuaciones débiles de campo y las ecuaciones invariantes lambda

1-O.- La normalización

El sistema de ecuaciones de campo (8.N) tiene la propiedad añadida respecto a las restantes sistemas examinados, de que tiene la invariancia ante transformaciones lambda definidas por (4.N). Por tanto de (8.N) no podemos obtener una solución única para la conexión afín, sino sólo una familia de soluciones relacionadas por la expresión (5.N), donde λ es una constante indeterminada.

Pero la constante lambda puede ser normalizada, en el sentido de que se puede elegir un determinado valor para λ, o sea, elegir una de las infinitas soluciones de (8.N) [30]. Se prefiere elegir λ de tal forma que el vector de torsión sea nulo. La nueva conexión afín deberá cumplir la condición

$$\overset{*}{\tau}_i = \overset{*}{\Gamma}{}_{it}^{\ t} - \overset{*}{\Gamma}{}_{ti}^{\ t} = 0$$

entonces utilizando (5.N)

$$\overset{*}{\tau}_i = \tau_i - 3\lambda_{,i} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{,i} = 1/3\,\tau_i\,, \tag{1.O}$$

por tanto dada una conexión afín genérica, decimos que se ha hecho una normalización del escalar lambda si hacemos la transformación definida por la relación

$$\Gamma^{*\ r}_{ik} = \Gamma_{ik}^{\ r} + \frac{1}{3}\delta_i^r \tau_k . \tag{2.O}$$

Ante la normalización de lambda $U_{ik}^{\ r}$ se transforma según

$$U^{*\ r}_{ik} = U_{ik}^{\ r} + \frac{1}{3}\left(\delta_i^r \tau_k - \delta_k^r \tau_i\right). \tag{3.O}$$

Cuando se hace la transformación lambda (2.O) el tensor de Ricci se transforma según la ley

$$R_{ik} = R^*_{ik} + \frac{1}{3}\left(\tau_{i,k} - \tau_{k,i}\right) \tag{4.O}$$

donde R^*_{ik} es el tensor de Ricci en función de la conexión afín definida en (2.O).

2-O.- Ecuaciones de campo resultantes de la normalización lambda

Si ahora las ecuaciones (8.N) la particularizamos para el caso de una conexión afín de vector de torsión nulo como (2.O) obtenemos nuevas ecuaciones que ya no serán invariantes frente a transformaciones lambda. La primera ecuación (8.N) la abreviamos con la notación

$$\boldsymbol{M}_r^{ik} = 0$$

nos proponemos encontrar $\boldsymbol{M}_r^{*ik}$ resultado de evaluar (8.N) con (2.O), es decir

$$\boldsymbol{M}_r^{*ik} = D_r^* \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}} - \frac{1}{2}\boldsymbol{g}^{ik}\tau_r^* + \frac{1}{3}\boldsymbol{g}^{ip}\tau_p^*\delta_r^k , \tag{5.O}$$

donde D^* es la derivada covariante frente a la conexión afín $\Gamma^{*\ r}_{ik}$ definida por (2.O).

Ahora bien, como $\boldsymbol{M}_r^{ik}$ es invariante frente a cualquier transformación lambda se debe de cumplir

$$\boldsymbol{M}_r^{ik} = \boldsymbol{M}_r^{*ik} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{M}_r^{*ik} = 0,$$

pero como el vector de torsión es nulo para la nueva conexión $\Gamma^{*\ r}_{ik}$, de (5.O) se encuentra

$$D_r^* \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}} = 0.$$

La segunda ecuación de (8.N) cuando se normaliza la función lambda es según (4.O)

$$R^*_{ik} + \frac{1}{3}\left(\tau_{i,k} - \tau_{k,i}\right) = 0,$$

que podemos descomponer en parte simétrica y antisimétrica

$$R^*_{(ik)} = 0$$
$$R^*_{[ik],r} + R^*_{[kr],i} + R^*_{[ri],k} = 0.$$

Resumiendo, las ecuaciones de campo derivadas de (8.N) cuando se normaliza la transformación lambda son

$$D_r^* \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}} = 0$$
$$\tau_i^* = 0$$
$$R^*_{(ik)} = 0$$
$$R^*_{[ik],r} + R^*_{[kr],i} + R^*_{[ri],k} = 0,$$

es decir, de nuevo el sistema débil de ecuaciones de campo. Nótese que estas ecuaciones no poseen la propiedad de invariancia frente a transformaciones lambda, lo que sí ocurre con las ecuaciones (8.N).

P) TONNELAT: Las ecuaciones de Euler-Lagrange

1-P.- Las varias contracciones del tensor de curvatura

Tonnelat en su monografía sobre la teoría de campo unificado de Einstein [113] [114] muestra que a partir del tensor de curvatura y por contracción se pueden obtener una variedad de tensores de segundo orden adecuados para formar la densidad lagrangiana, es decir, tensores que dependen de la conexión y sus derivadas.

Anteriormente hemos indicado que además del tensor de Ricci definido por

$$R_{ik} = R^r{}_{ikr} = \Gamma_{ir,k}^{\ \ r} - \Gamma_{ik,r}^{\ \ r} + \Gamma_{ir}^{\ \ t}\Gamma_{tk}^{\ \ r} - \Gamma_{ik}^{\ \ t}\Gamma_{tr}^{\ \ r},$$

se puede obtener la curvatura homotética, definida mediante

$$V_{ir} = R^k{}_{kir} = \Gamma_{kr,i}^{\ \ k} - \Gamma_{ki,r}^{\ \ k} + \Gamma_{kr}^{\ \ n}\Gamma_{ni}^{\ \ k} - \Gamma_{ki}^{\ \ n}\Gamma_{nr}^{\ \ k} = \Gamma_{kr,i}^{\ \ k} - \Gamma_{ki,r}^{\ \ k}.$$

Teniendo en cuenta que la transpuesta de una conexión $\tilde{\Gamma}_{ik}^{\ \ r} = \Gamma_{ki}^{\ \ r}$ es una nueva conexión, ya que tiene la misma ley de transformación ante cambios de coordenadas, se puede obtener un nuevo tensor de curvatura del que derivar por contracción un nuevo tensor de Ricci y una nueva curvatura homotética, definidas por

$$R_{ik}\left(\tilde{\Gamma}\right) = R^r{}_{ikr}\left(\tilde{\Gamma}\right) = \tilde{\Gamma}_{ir,k}^{\ \ r} - \tilde{\Gamma}_{ik,r}^{\ \ r} + \tilde{\Gamma}_{ir}^{\ \ t}\tilde{\Gamma}_{tk}^{\ \ r} - \tilde{\Gamma}_{ik}^{\ \ t}\tilde{\Gamma}_{tr}^{\ \ r} = \Gamma_{ri,k}^{\ \ r} - \Gamma_{ki,r}^{\ \ r} + \Gamma_{ri}^{\ \ t}\Gamma_{kt}^{\ \ r} - \Gamma_{ki}^{\ \ t}\Gamma_{rt}^{\ \ r}$$

$$V_{ir}\left(\tilde{\Gamma}\right) = R^k{}_{kir}\left(\tilde{\Gamma}\right) = \tilde{\Gamma}_{kr,i}^{\ \ k} - \tilde{\Gamma}_{ki,r}^{\ \ k} + \tilde{\Gamma}_{kr}^{\ \ n}\tilde{\Gamma}_{ni}^{\ \ k} - \tilde{\Gamma}_{ki}^{\ \ n}\tilde{\Gamma}_{nr}^{\ \ k} = \tilde{\Gamma}_{kr,i}^{\ \ k} - \tilde{\Gamma}_{ki,r}^{\ \ k} = \Gamma_{rk,i}^{\ \ k} - \Gamma_{ik,r}^{\ \ k}.$$

Estos tensores que hemos definido anteriormente no tienen la propiedad hermítica. Pero de cada uno de ellos podemos deducir tensores hermíticos; así por ejemplo, de los dos tensores de Ricci anteriores podemos formar el tensor

$$\frac{1}{2}\left[R_{ik}(\Gamma) + R_{ki}\left(\tilde{\Gamma}\right)\right]$$

que tiene la propiedad de hermiticidad.

De la variedad de tensores de segundo orden hermítico que se pueden formar, Tonnelat destaca los siguientes

$$U_{ik} = \frac{1}{2}\left[R_{ik}(\Gamma) + R_{ki}\left(\tilde{\Gamma}\right)\right] - \frac{1}{4}\left[V_{ik}(\Gamma) + V_{ki}\left(\tilde{\Gamma}\right)\right]$$

$$H_{ik} = \frac{1}{2}\left[V_{ik}(\Gamma) + V_{ki}\left(\tilde{\Gamma}\right)\right]$$

$$\Gamma_{ik} = \tau_i \tau_k.$$

Como ya hemos visto en deducciones anteriores, es conveniente hacer una transformación de conexión afín con el propósito de que el vector de torsión asociado sea nulo. Partiendo de una conexión genérica $\Gamma_{ik}^{\ \ r}$ se puede obtener dos nuevas conexiones cuyos vectores de torsión son nulos

$$\Gamma_{ik}^{*\,r} = \Gamma_{ik}^{\ \ r} + \frac{1}{3}\delta_i^r \tau_k$$

$$\Gamma_{ik}^{**\,r} = \Gamma_{ik}^{\ \ r} + \frac{1}{6}\left(\delta_i^r \tau_k - \delta_k^r \tau_i\right),$$

que pueden servir para formar nuevos tensores de Ricci que nos sirvan para formar la densidad lagrangiana.

2-P.- Aplicación de las ecuaciones de Euler-Lagrange

La densidad lagrangiana es definida como

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{g}^{pq} R_{pq},$$

como se varía respecto al tensor métrico y respecto a la conexión, debe de haber dos conjuntos de ecuaciones de Euler-Lagrange. Teniendo en cuenta que la densidad lagrangiana depende como máximo de las derivadas primeras de la conexión, el primer conjunto de ecuaciones de campo se derivarán de

$$\frac{\partial}{\partial x^t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial \Gamma_{ik,t}^{\ \ r}}\right) - \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial \boldsymbol{g}^{ik}} = 0. \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x^t}\left(\boldsymbol{g}^{pq}\frac{\partial R_{pq}}{\partial \Gamma_{ik,t}^{\ \ r}}\right) - \boldsymbol{g}^{pq}\frac{\partial R_{pq}}{\partial \Gamma_{ik}^{\ \ r}} = 0. \tag{1.P}$$

Como la densidad lagrangiana depende del tensor métrico pero no de sus derivadas, tenemos como el otro conjunto de ecuaciones de campo

$$\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial \boldsymbol{g}^{ik}} = 0. \tag{2.P}$$

Para aplicar (1.P) hay que calcular

$$\frac{\partial R_{pq}}{\partial \Gamma_{ik,t}^{\ \ r}} = \delta_r^s \delta_p^i \delta_s^k \delta_q^t - \delta_r^s \delta_p^i \delta_q^k \delta_i^t = \delta_r^k \delta_p^i \delta_q^t - \delta_r^t \delta_p^i \delta_q^k$$

entonces

$$\frac{\partial}{\partial x^t}\left(\boldsymbol{g}^{pq}\frac{\partial R_{pq}}{\partial \Gamma_{ik,t}^{\ \ r}}\right) = \boldsymbol{g}^{it}{}_{,t}\delta_r^k - \boldsymbol{g}^{ik}{}_{,r}.$$

El segundo sumando de (1.P) es

$$\mathfrak{g}^{pq}\frac{\partial R_{pq}}{\partial \Gamma_{ik}^{\ \ r}}=\mathfrak{g}^{pq}\left(\delta_p^i\Gamma_{rq}^{\ \ k}+\delta_q^k\Gamma_{pr}^{\ \ i}-\delta_p^i\delta_q^k\Gamma_{rm}^{\ \ m}-\delta_r^k\Gamma_{pq}^{\ \ i}\right)=$$
$$=\mathfrak{g}^{iq}\Gamma_{rq}^{\ \ k}+\mathfrak{g}^{pk}\Gamma_{pr}^{\ \ i}-\mathfrak{g}^{ik}\Gamma_{rm}^{\ \ m}-\mathfrak{g}^{pq}\Gamma_{pq}^{\ \ i}\delta_r^k,$$

entonces la ecuación (1.P) es

$$\mathfrak{g}^{ik}_{\ \ ,r}-\mathfrak{g}^{it}_{\ \ ,t}\delta_r^k+\mathfrak{g}^{iq}\Gamma_{rq}^{\ \ k}+\mathfrak{g}^{pk}\Gamma_{pr}^{\ \ i}-\mathfrak{g}^{ik}\Gamma_{rm}^{\ \ m}-\mathfrak{g}^{pq}\Gamma_{pq}^{\ \ i}\delta_r^k=0, \tag{3.P}$$

contrayendo respecto a k y r

$$-3\mathfrak{g}^{ir}_{\ \ ,r}-3\mathfrak{g}^{pq}\Gamma_{pq}^{\ \ i}-2\mathfrak{g}^{ir}\Gamma_{[rm]}^{\ \ \ m}=0,$$

despejando $\mathfrak{g}^{pq}\Gamma_{pq}^{\ \ i}$ y sustituyendo en (3.P) queda

$$D_r\mathfrak{g}^{\underset{+-}{ik}}=-\frac{2}{3}\mathfrak{g}^{it}\Gamma_{[tm]}^{\ \ \ m}\delta_r^k+\mathfrak{g}^{ik}\Gamma_{[rm]}^{\ \ \ m}=0$$

o utilizando el vector de torsión

$$D_r\mathfrak{g}^{\underset{+-}{ik}}=-\frac{1}{3}\mathfrak{g}^{it}\tau_t\delta_r^k+\frac{1}{2}\mathfrak{g}^{ik}\tau_r=0 \tag{4.P}$$

que es el primer conjunto de ecuaciones de campo.

Si contraemos (3.P) respecto a i y r encontramos

$$\mathfrak{g}^{[rk]}_{\ \ \ ,r}=0. \tag{5.P}$$

Para obtener el ultimo grupo de ecuaciones de campo aplicamos (2.P), obteniéndose

$$R_{ik}=0.$$

Reuniendo los resultados encontramos que las ecuaciones de campo son

$$\begin{aligned}&D_r\mathfrak{g}^{\underset{+-}{ik}}=-\frac{1}{3}\mathfrak{g}^{it}\tau_t\delta_r^k+\frac{1}{2}\mathfrak{g}^{ik}\tau_r=0\\&\mathfrak{g}^{[rk]}_{\ \ \ ,r}=0\\&R_{ik}=0\end{aligned} \tag{6.P}$$

3-P.- El sistema fuerte de ecuaciones de campo

El sistema (6.P) es satisfactorio desde el punto de vista matemático, pero no cumple con los requisitos impuestos por Einstein, a saber, que exista similitud con las ecuaciones de campo gravitatorio. Más concretamente, que la primera de las ecuaciones (6.P) no debe contener el miembro de la derecha. Para conseguir este objetivo es establece la condición de que el vector de torsión sea nulo, entonces nos queda el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}&D_r\mathfrak{g}^{\underset{+-}{ik}}=0\\&\tau_i=0 \quad\Rightarrow\quad \mathfrak{g}^{[rk]}_{\ \ \ ,r}=0\\&R_{ik}=0\end{aligned}$$

o sea, el sistema fuerte de ecuaciones de campo, que no es deducible enteramente de un principio variacional como ya sabemos, sino que utiliza un sistema mixto: un principio variacional completado por una condición *ad hoc*.

4-P.- El sistema débil de ecuaciones de campo

Para obtener el sistema débil de ecuaciones de campo, Tonnelat sigue el procedimiento ideado inicialmente por Schrödinger y utilizado en varias demostraciones por Einstein: hacer una transformación de conexión afín para conseguir, de este modo, tener un vector de torsión nulo. La nueva conexión afín está relacionada con la antigua por

$$\overset{*}{\Gamma}{}_{ik}^{\ \ r}=\Gamma_{ik}^{\ \ r}+\frac{1}{3}\delta_i^r\tau_k$$

de donde se deriva que el nuevo vector de torsión es nulo $\overset{*}{\tau}_k=0$.

Si la primera ecuación de (6.P) se pone en función de la nueva conexión resulta

$$\overset{*}{D}_r\mathfrak{g}^{\underset{+-}{ik}}=0$$

donde D^* es la derivada covariante utilizando la conexión con asterisco. Mientras que el tensor de Ricci en función de la nueva conexión es

$$R^*_{ik} = R_{ik} + \frac{1}{3}\left(\tau_{i,k} - \tau_{k,i}\right)$$

entonces la ecuación de campo queda

$$R^*_{ik} = \frac{1}{3}\left(\tau_{i,k} - \tau_{k,i}\right),$$

reuniendo todos los resultados y descomponiendo el tensor de Ricci en parte simétrica y antisimétrica encontramos el sistema fuerte de ecuaciones de campo

$$\begin{aligned} &D^*_r \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}} = 0 \\ &\tau^*_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{g}^{[rk]}{}_{,r} = 0 \\ &R^*_{(ik)} = 0 \\ &R^*_{[ik],r} + R^*_{[kr],i} + R^*_{[ri],k} = 0. \end{aligned} \tag{7.P}$$

5-P.- Caso especial de tensor métrico simétrico

A continuación vamos a adaptar el sistema (7.P) para el caso particular en que el tensor métrico sea simétrico, conservando asimétrica la conexión afín. Por cálculo directo se encuentra que

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}\left(D^*_r \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}} + D^+_r \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ki}}\right) = \partial_r \boldsymbol{g}^{ik} + \boldsymbol{g}^{sk}\Gamma^{*\ i}_{(sr)} + \boldsymbol{g}^{is}\Gamma^{*\ k}_{(rs)} - \boldsymbol{g}^{ik}\Gamma^{*\ s}_{(rs)} = 0 \\ \frac{1}{2}\left(D^*_r \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}} - D^*_r \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ki}}\right) = \boldsymbol{g}^{sk}\Gamma^{*\ i}_{[sr]} - \boldsymbol{g}^{is}\Gamma^{*\ k}_{[sr]} = 0, \end{gathered} \tag{8.P}$$

estas ecuaciones admiten como solución $\Gamma^{*\ i}_{[sr]} = 0$, entonces de la primera de las ecuaciones (8.P)

$$\Gamma^{*\ i}_{(sr)} = L_{sr}^{\ i}$$

donde $L_{sr}^{\ i}$ son los símbolos de Christoffel. Entonces como

$$\Gamma_{ik}^{\ r} = \Gamma^{*\ r}_{ik} - \frac{1}{3}\delta^r_i \tau_k$$

resulta

$$\Gamma^{\ r}_{[ik]} = -\frac{1}{6}\left(\delta^r_i \tau_k - \delta^r_k \tau_i\right); \quad \Gamma^{\ r}_{(ik)} = L_{ik}^{\ r} - \frac{1}{6}\left(\delta^r_i \tau_k + \delta^r_k \tau_i\right), \tag{9.P}$$

entonces

$$D_r \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}} = \bar{D}_r \boldsymbol{g}^{ik} - \frac{1}{3}\boldsymbol{g}^{it}\tau_t \delta^k_r + \frac{1}{2}\boldsymbol{g}^{ik}\tau_r \tag{10.P}$$

donde $\bar{D}$ es la derivada covariante respecto a los símbolos de Christoffel. Por (10.P) la primera de las ecuaciones (6.P) queda

$$\bar{D}_r \boldsymbol{g}^{ik} = 0, \tag{11.P}$$

entonces las ecuaciones de campo del campo considerado de tensor métrico simétrico y conexión asimétrica estará formada por (11.P), la tercera ecuación de (6.P), con las definiciones de la conexión afín dada por (9.P). Estas ecuaciones, por tanto, corresponden a una generalización de la Relatividad General, en la que se considera no nulo el vector de torsión.

Q) SCHRÖDINGER: La conexión estrellada

1-Q.- La densidad lagrangiana

La teoría que presentó Schrödinger en el año 1947 es puramente afín [80], en el sentido de que el único potencial considerado es la conexión afín, apareciendo el tensor métrico como una magnitud derivada.

La densidad lagrangiana debe depender de las componentes de la conexión y sus primeras derivadas. Hay dos tensores de segundo orden que son formados por la conexión y sus primeras derivadas: el tensor de Ricci y la curvatura homotética, y que por tanto sirven para formar la densidad lagrangiana. La más simple de estas expresiones propuesta primeramente por Eddington [12] es

$$\boldsymbol{L}=\frac{2}{\lambda}\sqrt{-\det R_{ik}}=\frac{2}{\lambda}\sqrt{-|R|} \tag{1.Q}$$

donde λ es una constante y con $|R|$ representamos el determinante de la matriz formada por las componentes covariantes del tensor de Ricci . Ponemos como condición de que el determinante de R_{ik} es negativo en todo punto del espacio, por esta condición aparece el signo menos en el radicando de (1.Q)

Schrödinger notó que aún siendo (1.Q) la densidad lagrangiana más simple, probablemente era la correcta y por ello es la que usa para construir su teoría.

El plan de trabajo de Schrödinger en esta nueva teoría cuyos ragos principales aparecen en un artículo de 1947 titulado «The final affine field laws I» [80] y [96], es diferente de las técnicas aplicadas en las investigaciones anteriores del mismo autor [70], [73] y [77]. En estos trabajos Schrödinger obtuvo unas relaciones auxiliares a partir exclusivamente de la dependencia funcional de la densidad lagrangiana, sin necesidad de especificarla explíticamente. Sin embargo, en el trabajo que ahora examinamos, Schrödinger siguiendo las «técnicas maestras de Einstein» inicia su investigación con la densidad lagrangiana (1.Q). Si bien sus resultados dejan de ser generales, resultan más simples. Además en la teoría que exponemos se elude descomponer las entidades geométricas prematuramente, como veremos en el siguiente epígrafe, siguiendo también en este asunto a Einstein.

2-Q.- La derivada de un determinante

Consideremos un tensor covariante de segundo orden a_{ik}. Lo podemos entender como los elementos de una matriz de orden dos $A=(a_{ik})$. Su determinante a se calcula por

$$a=\varepsilon^{pqrs}a_{1p}a_{2q}a_{3r}a_{4s}. \tag{2.Q}$$

La matriz inversa de A la representamos por elementos que no se corresponden con las componentes del tensor en forma contravariante $A^{-1}=\left(\hat{a}^{ik}\right)$, cumpliéndose la relación

$$a_{ik}\hat{a}^{kr}=\hat{a}^{rk}a_{ki}=\delta_i^r \quad\Leftrightarrow\quad A\cdot A^{-1}=A^{-1}A=I$$

I es la matriz unidad. El determinante (2.Q) se puede desarrollar por los menores adjuntos. Por ejemplo, se puede desarrollar (2.Q) por los menores adjuntos de la primera fila de la matriz A

$$a=a_{1p}\left(\varepsilon^{pqrs}a_{2q}a_{3r}a_{4s}\right)=a_{1p}\alpha^{1p} \tag{3.Q}$$

donde α^{1p} es el menor adjunto del elemento 1, p de la matriz A. De (3.Q) se comprueba que se cumple

$$a_{ip}\alpha^{kp}=a\delta_i^k$$

entonces

$$a_{ip}\left(\frac{1}{a}\alpha^{kp}\right)=\delta_i^k \quad\Rightarrow\quad \hat{a}^{pk}=\frac{1}{a}\alpha^{kp}. \tag{4.Q}$$

La derivada de un determinante se calcula a partir de (2.Q)

$$da=a_{1p}\left(\varepsilon^{pqrs}a_{2q}a_{3r}a_{4s}\right)+da_{2q}\left(\varepsilon^{pqrs}a_{1p}a_{3r}a_{4s}\right)+da_{3r}\left(\varepsilon^{pqrs}a_{1p}a_{2q}a_{4s}\right)+da_{4s}\left(\varepsilon^{pqrs}a_{1p}a_{2q}a_{3r}\right)$$

o bien

$$da=da_{ik}\alpha^{ik}$$

que por (4.Q) queda

$$da=a\hat{a}^{ki}da_{ik} \quad\Rightarrow\quad d\sqrt{a}=\frac{1}{2}\sqrt{a}\,\hat{a}^{ki}da_{ik}. \tag{5.Q}$$

3-Q.- La densidad del tensor métrico

Las teorías de campo unificado que Schrödinger fue estudiando durante los años cuarenta del siglo pasado son puramente afín, lo que significa que las magnitudes geométricas primarias son las componentes de la conexión, que son los potenciales del campo. El tensor métrico no es definido previamente, sino que se deriva de la conexión y sus primeras derivadas, convirtiéndose en una magnitud secundaria a diferencia de lo que ocurre en la formulación métrica de la teoría de campo.

Schrödinger considera una conexión asimétrica, lo que significa que igual propiedad tiene el tensor de Ricci, entonces la densidad del tensor métrico definido por

$$\boldsymbol{g}^{ik} = \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial R_{ik}}$$

también es asimétrico y cabe descomponerlo en parte simétrica y antisimétrica.

Aplicando (1.Q) en la definición de $\boldsymbol{g}^{ik}$ y teniendo en cuenta (5.Q) se obtiene

$$\boldsymbol{g}^{ik} = \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial R_{ik}} = \frac{2}{\lambda}\frac{-1}{2\sqrt{-|R|}}\frac{\partial |R|}{\partial R_{ik}} = \frac{1}{\lambda}\frac{-|R|}{\sqrt{-|R|}}\hat{R}^{ki} = \frac{1}{\lambda}\sqrt{-|R|}\,\hat{R}^{ki} \tag{6.Q}$$

$\hat{R}^{ki}$ representa los elementos de la matriz inversa de la matriz de elementos (R_{ik}). Si $|\hat{R}|$ es el determinante de la matriz de elementos $\hat{R}^{ik}$, entonces

$$|\hat{R}| = \frac{1}{|R|}$$

y de (6.Q) se deduce

$$\boldsymbol{g} = \frac{1}{\lambda^4}|R|$$

donde $\boldsymbol{g}$ es el determinante de la matriz formada por los $\boldsymbol{g}^{ik}$.

Cabe preguntarse en (1.Q) cuál es el tensor cuya raíz cuadrada se utiliza para definir la densidad escalar de la lagrangiana. Este tensor está indefinido, vamos a elegirlo arbitrariamente como R_{ik}/λ , entonces la raíz cuadrada de su determinante que define a las densidades es $\sqrt{-|R|}/\lambda^2$.

Multipliquemos los dos miembros de (6.Q) por $R_{ip}\, g_{rk}$

$$\lambda R_{ip} g_{rk} \boldsymbol{g}^{ik} = R_{ip} g_{rk}\sqrt{-|R|}\,\hat{R}^{ki} \quad \Rightarrow \quad \lambda\frac{1}{\lambda^2}R_{rp}\sqrt{-|R|} = \sqrt{-|R|}\,g_{rp} \quad \Rightarrow \quad R_{rp} = \lambda g_{rp}\,. \tag{7.Q}$$

Al multiplicar (7.Q) por $g^{ip}\hat{R}^{kr}$

$$g^{ip}\hat{R}^{kr}R_{rp} = \lambda g_{rp}\, g^{ip}\hat{R}^{kr} \quad \Rightarrow \quad g^{ik} = \lambda\hat{R}^{ki}\,. \tag{8.Q}$$

Ahora podemos explicar la elección hecha anteriormente. De (7.Q) deducimos que

$$\sqrt{g} = \frac{1}{\lambda^2}\sqrt{-|R|} \tag{9.Q}$$

o sea, que la elección que hicimos es para que las densidades se calculen con la raíz cuadrada del tensor métrico.

4-Q.- Ecuaciones de campo en función del tensor métrico y de la conexión

El principio de mínima acción afirma que cuando se varían arbitrariamente las componentes de la conexión la variación de la acción del campo se anula

$$\delta I = \delta\int \boldsymbol{L}\, d\,\Omega = 0$$

ahora bien por (6.Q)

$$\delta I = \delta\int \boldsymbol{L}\, d\,\Omega = \int \delta\boldsymbol{L}\, d\,\Omega = \int \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial R_{ik}}\delta R_{ik}\, d\Omega = \int \boldsymbol{g}^{ik}\delta R_{ik}\, d\,\Omega = 0 \tag{10.Q}$$

resultado que podemos reencontrar aplicando (5.Q)

$$\delta\boldsymbol{L} = \delta\left(\frac{2}{\lambda}\sqrt{-|R|}\right) = \frac{1}{\lambda}\sqrt{-|R|}\hat{R}^{ki}\delta R_{ik} = \boldsymbol{g}^{ik}\delta R_{ik}$$

habiendo utilizado en el último paso (6.Q).

Para hacer la variación (10.Q) usamos la identidad de Palatini

$$\delta R_{ik} = D_k\,\delta\Gamma_{is}{}^{s} - D_s\delta\Gamma_{ik}{}^{s} + \tau_{mk}^{\;s}\,\delta\Gamma_{is}{}^{m}$$

que se deduce por cálculo directo. $\tau_{mk}^{\;s}$ es el tensor de torsión definido por

$$\tau_{ik}{}^{s} = \Gamma_{ik}{}^{s} - \Gamma_{ki}{}^{s} = 2\Gamma_{[ik]}{}^{s}\,.$$

Indiquemos que la variación de (10.Q) también se puede calcular directamente, sin necesidad de utilizar la identidad de Palatini, como hemos hecho en demostraciones anteriores.

Para el posterior cálculo es necesario tener presente que el teorema de Gauss debe ser modificado cuando existe torsión, de tal forma que queda [95]

$$\int_V D_k \boldsymbol{A}^k d\Omega = \int_\Sigma A^k dS_k + \int_V \boldsymbol{A}^k \tau_k \, d\Omega$$

donde τ_k es el vector de torsión definido por $\tau_k = \tau_{ks}{}^s = \Gamma_{ks}{}^s - \Gamma_{sk}{}^s = 2\Gamma_{[ik]}{}^s$.

Aplicando la identidad de Palatini a (10.Q) queda

$$\delta I = \int \boldsymbol{g}^{ik} \delta R_{ik} \, d\Omega = \int \boldsymbol{g}^{ik} D_k \, \delta\Gamma_{is}{}^s d\Omega - \int \boldsymbol{g}^{ik} D_s \delta\Gamma_{ik}{}^s d\Omega + \int \boldsymbol{g}^{ik} \tau^s_{mk} \, \delta\Gamma_{is}{}^m \, d\Omega \qquad (11.Q)$$

ahora hay que integrar por partes y aplicar el teorema de Gauss, así para la primera integral del último miembro de (11.Q) se tiene

$$\int \boldsymbol{g}^{ik} D_k \, \delta\Gamma_{is}{}^s d\Omega = \int D_k \left(\boldsymbol{g}^{ik} \delta\Gamma_{is}{}^s \right) d\Omega - \int D_k \boldsymbol{g}^{ik} \delta\Gamma_{is}{}^s d\Omega =$$
$$= \int g^{ik} \delta\Gamma_{is}{}^s dS_k + \int \boldsymbol{g}^{ik} \delta\Gamma_{is}{}^s \tau_k d\Omega - \int D_k \boldsymbol{g}^{ik} \delta\Gamma_{is}{}^s d\Omega$$

si ahora suponemos que las variaciones de las componentes de la conexión se anulan en superficie de integración entonces

$$\int \boldsymbol{g}^{ik} D_k \, \delta\Gamma_{is}{}^s d\Omega = \int \boldsymbol{g}^{ik} \tau_k \, \delta\Gamma_{is}{}^s d\Omega - \int D_k \boldsymbol{g}^{ik} \delta\Gamma_{is}{}^s d\Omega = \int \delta^k_s \left(\boldsymbol{g}^{ir} \tau_r - D_r \boldsymbol{g}^{ir} \right) \delta\Gamma_{ik}{}^s d\Omega,$$

haciendo el mismo razonamiento con la segunda integral del último miembro de (11.Q) se encuentra

$$\delta I = \int \left[\delta^k_s \boldsymbol{g}^{ir} \tau_r - \delta^k_s D_r \boldsymbol{g}^{ir} - \boldsymbol{g}^{ik} \tau_s + D_s \boldsymbol{g}^{ik} + \boldsymbol{g}^{ir} \tau^k_{sr} \right] \delta\Gamma_{ik}{}^s \, d\Omega = 0$$

y como las $\delta\Gamma_{ik}{}^s$ son independientes y arbitrarias, nos queda las ecuaciones de campo

$$\delta^k_s \boldsymbol{g}^{ir} \tau_r - \delta^k_s D_r \boldsymbol{g}^{ir} - \boldsymbol{g}^{ik} \tau_s + D_s \boldsymbol{g}^{ik} + \boldsymbol{g}^{ir} \tau^k_{sr} = 0. \qquad (12.Q)$$

Observemos que la derivada covariante que estamos utilizando es $D_s g^{ik} = D_s g^{\underset{++}{ik}}$.

Al contraer (12.Q) respecto a k y s

$$D_r \boldsymbol{g}^{ir} = \frac{2}{3} \boldsymbol{g}^{ir} \tau_r$$

que al sustituir en (12.Q) queda

$$D_s \boldsymbol{g}^{ik} - \boldsymbol{g}^{ik} \tau_s + \frac{1}{3} \delta^k_s \boldsymbol{g}^{ir} \tau_r + \boldsymbol{g}^{ir} \tau_{sr}{}^k = 0 \qquad (13.Q)$$

que en unión de (7.Q) son las ecuaciones de campo, que representan 80 ecuaciones diferenciales [se obtienen 16 ecuaciones de (7.Q) y 64 de (13.Q)] en donde existen 80 variables (16 correspondientes a $\boldsymbol{g}^{ik}$ y 64 a $\Gamma_{ik}{}^s$). Con un poco de cálculo es fácil encontrar que (13.Q) es igual que la primera ecuación (6.P).

5-Q.- La conexión afín estrellada

Se define la conexión estrellada por

$$\overset{*}{\Gamma}_{ik}{}^r = \Gamma_{ik}{}^r + \frac{1}{3} \delta^r_i \tau_k$$

que es una conexión puesto que es la suma de una conexión y un tensor. La conexión estrellada tiene la propiedad

$$\overset{*}{\Gamma}_{rk}{}^r = \overset{*}{\Gamma}_{kr}{}^r,$$

lo que significa que el vector de torsión $\overset{*}{\tau}_k$ que tiene asociado es nulo.

6-Q.- Ecuaciones de campo en función de la conexión

Es posible expresar (13.Q) en función de la conexión estrellada. Para ello recordamos que la derivada covariante de la densidad del tensor métrico es

$$D_s \boldsymbol{g}^{ik} = \partial_s \boldsymbol{g}^{ik} + \boldsymbol{g}^{rk} \Gamma_{rs}{}^i + \boldsymbol{g}^{ir} \Gamma_{rs}{}^k - \boldsymbol{g}^{ik} \Gamma_{rs}{}^r,$$

como se deduce de cálculo directo; entonces de (13.Q) tenemos

$$\overset{*}{D}_s \boldsymbol{g}^{ik} + \boldsymbol{g}^{ir} \overset{*}{\tau}_{sr}{}^k = 0. \qquad (14.Q)$$

si se tiene en cuenta que $\overset{*}{\tau}_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \overset{*}{\Gamma}_{ks}{}^s = \overset{*}{\Gamma}_{sk}{}^s$ entonces (14.Q) es idéntica a

$$D_s \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}} = 0. \qquad (15.Q)$$

El tensor de Ricci puede ponerse en función de la conexión afín estrellada, obteniéndose

$$R_{ik} = R^*_{ik} + F_{ik}$$

donde R^*_{ik} es el tensor de Ricci calculado respecto a $\Gamma^{*\,r}_{ik}$ y el tensor antisimétrico F_{ik} es definido por

$$F_{ik} = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial \tau_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \tau_k}{\partial x^i}\right),$$

entonces por (7.Q) tenemos

$$R^*_{ik} + F_{ik} = \lambda g_{ik}\,, \tag{16.Q}$$

Descomponiendo (16.Q) en parte simétrica y antisimétrica nos permite replantear las ecuaciones de campo sin que aparezca F_{ik} es decir sin τ_k

$$R^*_{(ik)} - \lambda g_{(ik)} = 0$$
$$R^*_{[ik]} - \lambda g_{[ik]} = -F_{ik}$$

hallando la derivada parcial de la segunda ecuación y permutándola cíclicamente conseguimos que desaparezca F_{ik}

$$\partial_r\left[R^*_{[ik]} - \lambda g_{[ik]}\right] + \partial_k\left[R^*_{[ri]} - \lambda g_{[ri]}\right] + \partial_i\left[R^*_{[kr]} - \lambda g_{[kr]}\right] = 0. \tag{17.Q}$$

Reuniendo todos los resultados, las ecuaciones de campo unificado de Schrödinger son

$$\begin{aligned}
&D_s \boldsymbol{g}^{\underset{+-}{ik}} = 0\\
&\tau_k = 0\\
&R_{(ik)} = \lambda g_{(ik)}\\
&R_{[ik],r} + R_{[kr],i} + R_{[ri],k} = \lambda\left[g_{[ik],r} + g_{[ri],k} + g_{[kr],i}\right]
\end{aligned} \tag{18.Q}$$

o sea, las ecuaciones débiles de campo con la constante λ a la que identificamos con el término cosmológico. Debemos notar que las ecuaciones (18.Q) pueden ser obtenidas de todas las formulaciones que hemos planteado con anterioridad, con tal de modificar la densidad lagrangiana, en el sentido de que se le añada el término

$$\boldsymbol{L}' = 2\lambda\sqrt{g} \tag{19.Q}$$

entonces al hacer la variación de la acción completa respecto al tensor métrico resulta

$$R_{ik} - \lambda g_{ik} = 0$$

tal como deseábamos.

La superioridad del método puramente afín de Schrödinger con relación al método métrico-afín de las deducciones de Einstein, es que la constante cosmológica surge necesariamente en Schröginder, mientras que en las teorías métrico-afín es necesario introducir (19.Q) como un término *ad hoc*.

R) LICHNEROWICZ: El método de Schrödinger

1-R.- La variación con respecto a la conexión afín y respecto al tensor métrico

El método usado por Lichnerowicz utiliza el procedimiento de Schrödinger [59], consistente en realizar una transformación de la conexión afín para conseguir la nulidad del vector de torsión. Se diferencia de los restantes métodos presentados anteriormente, en que los cálculos se efectúan con el tensor métrico en vez de con su densidad tensorial, realizando la variación de la conexión afín en el principio variacional con la identidad de Palatini.

El principio de mínima acción es aplicado a la acción

$$I = \int \sqrt{g}\, g^{ik} R_{ik}\, d\Omega$$

variándose tanto el tensor métrico como la conexión. La variación del tensor de Ricci respecto a la conexión afín se calcula por la identidad de Palatini

$$\delta R_{ik} = D_k\, \delta\Gamma_{is}{}^{s} - D_s \delta\Gamma_{ik}{}^{s} + \tau^{\,s}_{mk}\, \delta\Gamma_{is}{}^{m}$$

que se deduce por cálculo directo. Entonces tendremos

$$g^{ik}\delta R_{ik} = D_k\left(g^{ik}\delta\Gamma_{is}{}^{s}\right) - D_s\left(g^{ik}\delta\Gamma_{ik}{}^{s}\right) - D_k g^{ik}\delta\Gamma_{is}{}^{s} + D_s g^{ik}\delta\Gamma_{ik}{}^{s} + g^{ik}\tau^{s}_{mk}\delta\Gamma_{is}{}^{m}, \quad (1.\text{R})$$

donde el tensor de torsión definido por $\tau^{s}_{mk} = \Gamma_{mk}{}^{s} - \Gamma_{km}{}^{s}$. Definimos el vector

$$A^k = g^{ik}\delta\Gamma_{is}{}^{s} - g^{it}\delta\Gamma_{it}{}^{k}$$

entonces (1.R) se pondrá como

$$g^{ik}\delta R_{ik} = D_k A^k - D_k g^{ik}\delta\Gamma_{is}{}^{s} + D_s g^{ik}\delta\Gamma_{ik}{}^{s} + g^{ik}\tau^{s}_{mk}\delta\Gamma_{is}{}^{m}.$$

La variación de la acción del campo respecto a la conexión se descompondrá en varios sumandos, vamos a evaluar el primero de ellos

$$I_1 = \int\sqrt{g}D_k A^k d\Omega = \int\partial_k\left(\sqrt{g}A^k\right)d\Omega + \int\sqrt{g}A^k\left(\Gamma_{ks}^{\ s} - \partial_k\sqrt{g}\right)d\Omega$$

anulándose el primer término por el teorema de Gauss y porque A^k se anula en el límite de la integral. Con este resultado encontramos

$$g^{ik}\delta R_{ik} = -D_k g^{ik}\delta\Gamma_{is}{}^{s} + D_s g^{ik}\delta\Gamma_{ik}{}^{s} + A^k\left(\Gamma_{ks}^{\ s} - \partial_k\sqrt{g}\right) + g^{ik}\tau^{s}_{mk}\delta\Gamma_{is}{}^{m}.$$

y sacando factor común

$$g^{ik}\delta R_{ik} = \left[-D_r g^{ir}\delta^k_s + D_s g^{ik} + \delta^k_s g^{im}\left(\Gamma_{mt}^{\ t} - \partial_m\sqrt{g}\right) - g^{ik}\left(\Gamma_{sm}^{\ m} - \partial_s\sqrt{g}\right) + g^{it}\tau^{k}_{st}\right]\delta\Gamma_{ik}{}^{s}.$$

En su demostración Lichnerowicz define un tensor $G^{ik}_s(\theta)$ en función de un parámetro θ indefinido de momento

$$G^{ik}_s(\theta) = D_s g^{ik} - g^{ik}\left(\Gamma_{sm}^{\ m} - \partial_s\sqrt{g}\right) + g^{it}\tau^{k}_{st} + \theta\delta^k_s g^{it}\tau_t,$$

contrayendo respecto a k y s

$$G^{ik}_k(\theta) = D_k g^{ik} - g^{ik}\left(\Gamma_{km}^{\ m} - \partial_k\sqrt{g}\right) + (4\theta - 1)g^{it}\tau_t,$$

de donde obtenemos

$$\left[G^{ik}_s(\theta) - \delta^k_s G^{ir}_r(\theta)\right]\delta\Gamma_{ik}{}^{s} = g^{ik}\delta R_{ik} + (\theta - 4\theta + 1)\delta^k_s g^{it}\tau_t \quad (2.\text{R})$$

si ahora tomamos $\theta = 1/3$ entonces queda

$$G^{ik}_s = D_s g^{ik} - g^{ik}\left(\Gamma_{sm}^{\ m} - \partial_s\sqrt{g}\right) + g^{it}\tau^{k}_{st} + \frac{1}{3}\delta^k_s g^{it}\tau_t.$$

De (2.R) tenemos que

$$g^{ik}\delta R_{ik} = G^{ik}_s - \delta^k_s G^{ir}_r$$

por tanto al aplicar el principio de mínima acción obtenemos como ecuaciones de campo

$$G^{ik}_s - \delta^k_s G^{ir}_r = 0$$

de la contracción de k y s se deduce que

$$G^{ir}_r = 0,$$

por tanto la ecuación de campo es

$$G^{ik}_s = 0 \quad \Rightarrow \quad D_s g^{ik} - g^{ik}\left(\Gamma_{sm}^{\ m} - \partial_s\sqrt{g}\right) + g^{it}\tau^{k}_{st} + \frac{1}{3}\delta^k_s g^{it}\tau_t = 0. \quad (3.\text{R})$$

(3.R) se puede simplificar al desarrollar el tensor de torsión y la derivada covariante del tensor métrico, resultando

$$\partial_s g^{ik} + g^{tk}\Gamma_{ts}^{\ i} + g^{it}\Gamma_{st}^{\ k} - g^{ik}\left(\Gamma_{sm}^{\ m} - \partial_s\sqrt{g}\right) + \frac{1}{3}\delta^k_s g^{it}\tau_t = 0. \quad (4.\text{R})$$

Para obtener el otro conjunto de ecuaciones de campo variamos la acción respecto a la densidad del tensor métrico, resultando

$$R_{ik} = 0. \quad (5.\text{R})$$

2-R.- La transformación de la conexión y el primer conjunto de ecuaciones de campo

Las ecuaciones (4.R) y (5.R) admiten expresiones diferentes cuando se hace una transformación de la conexión, tal que el vector de torsión asociado a la nueva conexión sea nulo. La nueva conexión es

$$\Gamma^{*\,r}_{ik} = \Gamma_{ik}^{\ r} + 1/3\,\delta^r_i\tau_r$$

que hemos demostrado en otras ocasiones que tiene un vector de torsión τ^*_r nulo. Expresando (4.R) con la nueva conexión resulta

$$\partial_s g^{ik} + g^{tk}\Gamma^{*\,i}_{ts} + g^{it}\Gamma^{*\,k}_{st} - g^{ik}\left(\Gamma^{*\,m}_{sm} - \partial_s\sqrt{g}\right) = 0, \tag{6.R}$$

multiplicando la anterior expresión por g_{ik}

$$-2\partial_s\sqrt{g} + \Gamma^{*\,i}_{is} + \Gamma^{*\,i}_{si} - 4\left(\Gamma^{*\,m}_{sm} - \partial_s\sqrt{g}\right) = 0 \quad\Rightarrow\quad \partial_s\sqrt{g} = \Gamma^{*\,i}_{si}$$

donde hemos utilizado $\tau^*_r = 0$. Llevando este resultado a (6.R) queda finalmente

$$\partial_s g^{ik} + g^{tk}\Gamma^{*\,i}_{ts} + g^{it}\Gamma^{*\,k}_{st} = 0 \tag{7.R}$$

que es el primer grupo de ecuaciones de campo. Nótese que (7.R) es la ecuación $D^*_s g^{\underset{+\,-}{i\,k}} = 0$.

3-R.- La transformación de la conexión y el segundo grupo de ecuaciones de campo

Contrayendo (7.R) respecto a s y k y luego respecto a s e i y después restando ambos resultados llegamos a

$$\partial_r g^{ri} - \partial_r g^{ir} + g^{ti}\Gamma^{*\,r}_{tr} - g^{it}\Gamma^{*\,r}_{rt} = 0. \tag{8.R}$$

Al descomponer el tensor métrico en parte simétrica y antisimétrica nos queda para los dos últimos sumandos de (8.R)

$$g^{ti}\Gamma^{*\,r}_{tr} - g^{it}\Gamma^{*\,r}_{rt} = g^{(ti)}\tau^*_t + 2g^{[ti]}\partial_s\sqrt{g}$$

al llevar este resultado a (8.R) y tener en cuenta que $\tau^*_t = 0$ encontramos

$$\partial_r g^{[ri]} + g^{[ri]}\partial_r\sqrt{g} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \partial_r \boldsymbol{g}^{[ri]} = 0, \tag{9.R}$$

por tanto (9.R) es una consecuencia de la anulación del tensor métrico y de la ecuación (7.R).

Nos queda adaptar la ecuación (5.R), puesto que R_{ik} está en función de $\Gamma_{ik}^{\;r}$ y hay que ponerla en función de la nueva conexión afín $\Gamma^{*\,r}_{ik}$. Como hemos demostrado en otras deducciones (por ejemplo la del epígrafe 4-P)

$$R^*_{ik} = R_{ik} + \frac{1}{3}\left(\tau_{i,k} - \tau_{k,i}\right)$$

donde R^*_{ik} es el tensor de Ricci en función de la conexión $\Gamma^{*\,r}_{ik}$. Como R_{ik} es nulo entonces la ecuación (5.R) queda

$$R^*_{ik} = \frac{1}{3}\left(\tau_{i,k} - \tau_{k,i}\right)$$

que se puede descomponer en parte simétrica y antisimétrica, de donde se deriva

$$R^*_{(ik)} = 0$$

$$R^*_{[ik],r} + R^*_{[kr],i} + R^*_{[ri],k} = 0$$

que conjuntamente con (7.R) y (9.R) forman el sistema débil de ecuaciones de campo.

Conclusiones

En esta investigación hemos reunido todas las deducciones que hizo Einstein de las ecuaciones de campo unificado asimétrico, la que es más ampliamente conocida como teoría de Einstein. La entendemos como la última fase de la teoría de la Relatividad, en su empeño de geometrización global del Universo, al entender que tanto los campos como la materia son manifiestaciones de la geometría espacio-temporal.

Catorce fueron las deducciones realizadas por Einstein en un periodo que va desde el año 1945 al 1955. La mayoría de ellas (doce) utilizan un principio variacional, a veces de forma mixta; es decir añadiéndole a las ecuaciones resultantes alguna condición extra, lo que debilita la compatibilidad de las ecuaciones, las cuales están aseguradas si son derivadas exclusivamente de un principio de mínima acción. También Einstein obtuvo las ecuaciones de campo mediante un procedimiento físico, sin necesidad de usar una densidad lagrangiana. Para completar la investigación hemos añadido las demostraciones de Tonnelat, Schrödinger y Lichnerowicz.

Hemos establecido los argumentos que le sirvieron a Einstein de guía para obtener sus ecuaciones, entre otros la búsqueda de unas ecuaciones que, no sólo generalizaran la teoría de a Relatividad, sino que fueran similares a las de la Relatividad General, que tuvieran carácter covariante, utilizándose el principio de mínima simplicidad lógica posible. Estos, y otros, argumentos sirven para obtener las ecuaciones de campo, pero no está asegurado que las ecuaciones así obtenidas sean a las que se ajusta la Naturaleza.

No hemos entrado ni en el estudio de la compatiblidad de las ecuaciones, asunto que preocupó a Einstein, ni en el desarrollo de la teoría, donde se encuentran enmarañados problemas matemáticos, con los que difícilmente se puede encontrar alguna prueba experimental de la teoría.

Señalamos que una de las razones por las que Einstein abordó de catorce manera diferentes las ecuaciones de campo, fue la de carácter estético. Es decir, buscaba un procedimiento que, a la vez de ser elegante, tuviera suficiente fuerza para garantizar la corrección de los resultados.

Referencias y Bibliografía

En la relación que sigue, que no intenta ser completa, no solamente hemos puesto las referencias que aparecen en las páginas anteriores, sino que hemos recogido una selección de las contribuciones más importantes en la teoría de campo unificado de Einstein.

(1) Bonnor, W. B.: «Static, spherically symmetric solutions in Einstein's unified field theory», *Proceedings of the Royal Society of London A* **209** (1951) 353-368.
(2) Bonnor, W. B.: «The general static, spherically symmetric solution in Einstin's unified field theory», *Proceedings of the Royal Society of London A* **210** (1952) 427-434.
(3) Bonnor, W. B.: «Nonsymmetric Unified Field theories», *Physical Review* **92** (1953) 1067-1078.
(4) Bonnor, W. B.: «The equation of motio in the non-symmetric solution in Einstein's unified field theory», *Proceedings of the Royal Society of London A* **226** (1954) 366-377.
(5) Bose, S. N.: «Les identités de divergence dans la nouvelle théorie unitarire», *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences* **236** (1953) 1333-1335.
(6) Bose, S. N.: «The Affine Connection in Einstein's New Unitary Field Theory», *Annals of Mathematics* **59-1** (1954)171-176.
(7) Callaway, J.: «The equations of motion in Einstein's new unified field theory», *Physical Review* **92** (1953) 1567-1570.
(8) Callaway, J.: «Mach's principle and unified field theory», *Physical Review* **96** (1954) 778-780.
(9) Damour, T.; Deser, S. and McCarthy, J.: «Nonsymmetric gravity theories: Inconsistencies and a cure», *Physical Review D* **47** (1993) 1541-1556.
(10) De Simoni, F.: «Sulle equazioni di campo della teoria relativistica unitaria», *Atti della Accademia Nazionale des Linces Rendiconti Classe di Scienze Fisiche Matematische e Naturals* **VIII-18** (1955) 298-304.
(11) Dyson, F. J.: «Field Theory», *Scientific American* **188** (4) (1953) 57-64.
(12) Eddington, A. S.: «A Generalisation of Weyl's Theory of the Electromagnetic and Gravitational Fields», *Proceedings of the Royal Society of London; Philosophical Transactions of the Royal Society* **99** (1921) 104-122.
(13) Eddington, A. S.: *The mathematical theory of Relativity*, Chelsea Publishing, 1975, pp. 213-240.
(14) Einstein, A.: «Hamiltonsches Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie», *Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte* (1916) 1111–1116. Traducción al inglés con el título «Hamilton's principle and the General Theory of Relativity» en *The Principle of Relativity*, Dover, 1952, pp. 165-173.
(15) Einstein, A.: «Zür allgemeinen Relativitätstheorie», *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften su Berlin. Physikalisch-Matematische Klasse* (1923) 32-38.
(16) Einstein, A.: «Zür allgemeinen Relativitätstheorie», *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften su Berlin. Physikalisch-Matematische Klasse* (1923) 76–77.
(17) Einstein, A.: «Bemerkung zu meiner Arbeit 'Zur allegemeinen Relativitätstheorie», *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften su Berlin. Physikalisch-Matematische Klasse* (1923) 137-140.
(18) Einstein, A.: «The Theory of the Affine Field», *Nature* **112** (1923) 448-449.
(19) Einstein, A.: «Einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elekctrizität», *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften su Berlin. Physikalisch-Matematische Klasse* **XXII** (1925) 414-419. Traducción al inglés de A. Unzicker and T. Case con el título «Unified Field Theory of Gravitation and Electricity», descarga de www.alexander-unzicker.de/rep0.pdf.

(20) Einstein, A.: « Eddington's Theorie und Hamiltonsches Prinzip» en Eddington, A. S.: *Relativitätstheorie in Mathematischer Behandlung*, Springer, 1925, pp. 367-371.
(21) Einstein, A.: «Neue Möglichkeit für eine einsheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektrizität», *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, pp. 224-227, sesión del 14 junio 1928.
(22) Einstein, A.: «Demostración de la no existencia de campos gravitacionales sin singularidades de masa total no nula», *Revista Universidad Nacional de Tucumán, Serie A* **2** (1941) 5-10.
(23) Einstein, Albert: «A generalization of the relativistic theory of gravitation», *Annals of Mathematics* **46-4** (1945) 578-584.
(24) Einstein A.; Straus E. G.: «A generalization of the reltivistic theory of gravitation, II», *Annals of Mathematics* **47-4** (1946) 731-741.
(25) Einstein, Albert: «A generalized theory of gravitation», *Reviews of Modern Physics* **20-1** (1948) 35-39.
(26) Einstein, A.: *Notas autobiográficas*, Alianza Editorial, 1979, pp. 84-87, publicado originalmene en 1949.
(27) Einstein, A.: «The Bianchi identities in the Generalized Theory of Gravitation», *Canadian Journal of Mathematics* **2** (1950) 120-128.
(28) Einstein, A.: «The Generalized Theory of Gravitation» in *The Meaning of Relativity*, Princeton, 1950, 3° edición, pp. 133-162.
(29) Einstein, A.: «On the Generalized Theory of Gravitation», *Scientific American* **182-4** (1950) 13-17.
(30) Einstein, Albert: *El significado de la Relatividad*, Espasa-Calpe, 1971, pp. 166-195.
(31) Einstein, A.: *The meaning of Relavivity,* Pinceton, 1950, 3 edición revisada, pp. 133-162.
(32) Einstein, A.: «A Comment on a Criticism of Unified Field Theory», *Physical Review* **89-1** (1953) 321.
(33) Einstein, A.; Kaufman, B.: «Sur l'état de la théorie générale de la gravitation», en *Louis de Broglie: physicien et penseur*, Albin Michel, 1953, pp. 321-342.
(34) Einstein, A.: *The Meaning of Relativity*, Princeton, 1953, 4 edición revisada, pp. 133-165.
(35) Einstein, A.; Kaufman, B.: «Algebraic Properties of the Field in the Reativistic Theory of Asimmetric Field», *Annals of Mathematics* **59-2** (1954) 230-244.
(36) Einstein, A.; Kaufman, B.: «A New form of the General Relativistic Field Equations», *Annals of Mathematics* **62** (1955) 128-138.
(37) Einstein, A.: «Generalized Theory of Gravitation» en *The Meaning of Relativity*, Princeton, 1950, pp. 133-162.
(38) Einstein, A.: «*The Meaning of Relativity*, Princeton, 1955, 5ª edición revisada.
(39) Ferraris, M.; Francavigllia, M.: «Variational Formulation of General Relativity from 1915 to 1925 'Palatini's Method' Discovered by Einstein in 1925», *General Relativity and Gravitation* **14-3** (1982) 243-254.
(40) Filippov, A. T. : «On Einstein-Weyl unified model of dark energy and dark matter», arXiv:0812.2616v2, 2009.
(41) Finzi, B.: «La récente théorie relatistic unitaire d'Einstein», *Rendiconti Di Matematica e Delle Sue Applicazioni* **(5), 11 (1)** (1952) 75-87.
(42) Goenner, Hubert: «Unified field theories: from Eddington and Einstein up to now» en *Proceedings of the Sir Arthur Eddington Centenary Simposium*, World Scientific, 1984, vol. I, pp. 46-5 y pp. 176-196.
(43) Goenner, Hubert: «On the History of Unified Field Theories. Part. II (ca. 1930-ca. 1955)», *Living Review Relativity* **17** (2014) 1-241.
(44) Hilbert, David: «Die Grundlagen der Physik. (Erste Mitteilung)», *Nachirchten von der Köiglichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* **8** (1916) 395-407. Traducción al inglés con el título «The Foundations of Physics (firts communication)», en *The Genesis of General Relativity*, Jürgen Renn (editor), *Gravitation in the Twilight of Classical Physics: Them Promise of Mathematics*, Vol. 4, Springer, 2007, pp. 1003-1015.
(45) Hittmar, O.: «Schrödinger's Unified Field Theory Seen 40 Years Later», en Kilmister, C. W. ed. *Schrödinger: Centenary Celebration of a Plymath,* Cambridge University Press, 1987, pp. 165-175.
(46) Hlavaty, V.: «The Elementary Basic Principles of the Unified Theory of Relativity. A», *Indiana University mathematics journal* **1(4)** (1952) 539-562.
(47) Hlavaty, V.: «The Schrödinger Final Affine Field Laws», *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* **38 (12)** (1952) 1052-1058.
(48) Hlavaty, V.: «Report on the recent Einstein unified field theory», *Seminario Matematico Universita di Padova* **23** (1954) 316-332.
(49) Hlavaty, V.: «The Elementary Basic Principles of the Unified Theory of Relativity. B», *Indiana University*

Mathematics Journal **2(1)** (1953) 1-52.
(50) Hlavaty, Vaclav: *Geometry of Einstein's Unified Field Theory*, Noor dhofff, 1957.
(50) Infeld, L.: «The New Einstein Theory and the Equations of Motion», *Nature* **166** (1950) 1075.
(51) Infeld, L.: «The New Einstein Theory and de Equations of Motion», *Acta Physica Polonica* **10** (1950) 284-293.
(52) Ingraham, R. L.: «Contributions to the Schrödinger Non-Symmetric Affine Unified Field Rheory», *Annals of Mathematics* **52** (1950) 743-752.
(52) Johnson, C. P.: «A Criticism of a Recent Unified Field Theory», *Physical Review* **89** (1956) 320-321.
(53) Johnson, C. R.: «Equivalence of Einstein's 1925 unified field theory and his relativistic theory of the nonsymmetric field», *American Journal Physics* **47** (1979) 425.
(54) Kaufmann, B.: «Mathematical Structure of the Non-symmetric Field Theory», in Mercier A. and Kervaire, M. eds., *Fünfzig Jahre Relativitätstheorie-Cinquantenaire de la Théorie de la Relativité-Jubilee of Relativity Theory, Helvetica physica acta*, 1955, pp. 227-238.
(54) Kaufman, B.: «Mathematical Structure of the Non-Symmetric Field Theory», en A. Mercier and M. Kervaire (editores,) *Jubilee of Relativity Theory, Proceedings of the conference held in Bern*, Birkhäuser, 1956, pp. 227-238.
(55) Kursunoglu, B.: «On Einstein's Unified Field Theory», *Physcial Review* **82** (1951) 289-290.
(56) Kursunoglu, B.: «Gravittion and Electrodynamics», *Reviews of Modern Physics* **88** (1952) 1369-1379.
(57) Lenoir, M.: «Théorème de régularité dans la dernièr théorie d'Einstein», *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* **237** (1953) 424-425.
(58) Lichnerowicz, A.: «Compatibilité des Èquations de la théorie unitaire d'Einstein-Schödinger», *Journal of rational mechanics and analysis* **3** (1954) 487-521.
(59) Lichnerowicz, A.: *Théories Relativistes de la Gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson, 1955, pp. 235-274.
(60) Mishra, R. S. and Abrol, M. L.: «Equations of motion in unified field theory I», *Tensor. New Series* **10** (1960) 151-160.
(61) Moore, W.: *Schrödinger: Life and Thought,* Cambridge University Press, 1990.
(62) Palatini, Attilio: «Deduzione invariantiva delle equazioni gravitazionali dal principio di Hamilton», *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* **43-1** (1919) 203-212. Traducción al inglés con el título «Invariant Deduction of the Gravitational Equations from the Principle of Hamilton» en *Cosmology and Gravitation*, P. G. Bergmann and De Sabbata (editores), Plenum, 1980, pp. 477-488.
(63) Papapetrou, A.: «Static Shperically Symmetric Solutions in the Unitary Field Theory», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **52** (1948) 69-86.
(64) Papapetrou, A.: «The Question of Non-Singular Solutions in the Generalized Theory of Gravitation», *Physical Review* **73** (1948) 1105-1108.
(65) Papapetrou, A.; Schrödinger, E.: «The Point-Charge in the Non-symmetric Field Theory», *Nature* **168** (1951) 40-41.
(66) Papapetrou, A.: «Le problème du mouvement dans la Relativité générale et dans la théorie du champ unifié d'Einstein», *Annales de l'Institut Henri Poincaré* **15** (1957) 173-203.
(67) Pauli, W.: *Theory of Relativity*, Dover, 1981, pp. 224-227.
(68) Sarkar, R.: «Rigorous Static Solution Corresponding to a Particular Form of the Fundamental Tensor in Schrödinger Unified Field Theory», *Journal of Mathematics and Mehanics* **14** (1965) 183-193.
(69) Schrödinger, Erwin: «Sur la théorie du monde d'Eddington», *Il Nuovo Cimento* **15-4** (1938) 246-254.
(70) Schrödinger, E.: «The General Unitary Theory of the Physical Fields», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **49** (1943) 43-58.
(71) Schrödinger, Erwin: «The Earth's and the Sun's Permanent Magnetic Fields in the Unitary Field Theory», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **49** (1943) 135-148.
(72) Schrödinger, Erwin: «The Point Charge in the Unitary Field Theory», *Procedings of the Royal Irish Academy A* **49** (1943-1944) 225-235.
(73) Schrödinger, E.: «The Union of the three Fundamental Fields (Gravitation, Meson, Electromagnetism)», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **49** (1944) 275-287.
(74) Schrödinger, E.: «The Affine Connexion in Physical Field Theories», *Nature* **153** (1944) 572-575.
(75) Schröginer, Erwin: «Unitary Field Theory: Conservation Identities and Relation to Weyl and Eddington», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **49** (1944) 237-244.

(76) Schrödinger, Erwin: «On Distant Affine Connection», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **50** (1944/1945) 143-154.
(77) Schrödinger, E.: «The general affine field laws», *Proceedings of the Royal Irish Academy Section A Mathematical and physical sciences* **51** (1946) 41-50.
(78) Schrödinger, Erwin: «Affine Feldtheorie und Meson», *Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft* **126** (1946) 53-61.
(79) Schrödinger, Erwin: «The relation between Metric and Affinity», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **51** (1947) 147-150.
(80) Schrödinger, Erwin: «The Final Affine Field Laws I», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **51** (1947) 163-171.
(81) Schrödinger, Erwin: «The Final Affine Field Laws II», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **51** (1948) 205-216.
(82) Schrödinger, Erwin: «The Final Affine Field Laws III», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **52** (1948) 1-9.
(83) Schrödinger, E.: «Studies in the Non-Symmetric Generalization of the Theory of Gravitation», *Communications of the Dublin Institute for Advanced Studies, Series A,* 1951, vol. 6.
(84) Schrödinger, Erwin: «On the Differential Identities of an Affinity», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **51** (1951) 79-85.
(85) Schrödinger, E.; Hittmair, O.: «Studies in the Non-symmetric Generalization of the Theory of Gravitation II: The Velocity of Light», *Communications of the Dublin Institute for Advanced Studies A*, 1951, vol. 8.
(86) Schrödinger, Erwin y Papapetrou A.: «The Point-Charge in the Non-symmetric Field Theory», *Nature* **168** (1951) 40-41.
(87) Schrödinger, E.: «The Relation between metric and affinity», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **51** (1945-1948) 147-150.
(88) Schrödinger, E.: «On the differential identities of an affinity», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **54** (1951-1952) 79-85.
(89) Schrödinger, Erwin: «Electric Charge and Current Engendered by Combined Maxwell-Einstein Fields», *Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A* **56** (1953/1954) 13-21.
(90) Schrödinger, Erwin: *Space-Time Structure*, Cambridge University Press, 1991, pp. 106-119, (primera edición del año 1950).
(91) Sciama, D. W.: «On a non-symmetric theory of the pure gravitational field», *Proceedings Cambridge Philosofical Society* **54** (1958) 72-80.
(92) Segura González, Wenceslao: *Teoría de campo relativista*, eWT, 2014, pp. 147-150, descarga en http://vixra.org/abs/1409.0117.
(93) Segura González, Wenceslao: «La primera teoría métrico-afín de Einstein», viXra: 1506.0017, 2015.
(94) Segura González, Wenceslao: «La teoría hermítica de campo unificado de Einstein-Straus», viXra: 1508.0012, 2015.
(95) Segura González, Wenceslao: *La conexión afín. Aplicación a la teoría clásica de campos*, eWT, 2015.
(96) Segura González, Wenceslao: «La teoría afín de la gravedad y del electromagnetismo de Schrödinger (IV)», viXra: 1503.0040, 2015.
(97) Soh, H. P.: «A Theory of Gravitation and Electricity», *Journal of Mathematics and Physics* **12** (1932) 298-305.
(98) Straus, E. G.: «Some results in Einstein's Unified Field Theory», *Reviews of Modern Physics* **21-3** (1949) 414-420.
(99) Sué, M.: «Involutive systems of differential equations: Einstein's strength versus Cartan's degré d'arbitraire», *Journal of Mathematical Physics* **32** (1989) 392-399.
(100) Sué, M.and Mielke, E. W.: «Strength of the Poincaré gauge field equations in first order formalism», *Physics Letters A* **139** (1990) 21-26.
(101) Takeno, H.; Ikeda, M.; and Abe, A.: «On solutions of new field equations of Einstein and those of Schrödinger», *Progress of Theoretical Physics* **6** (1951) 837-848.
(102) Tolman, Richard C.: *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*, Dover, 1987, pp. 165-174.
(103) Tonnelat, M. A.: «Théorie unitaire du champ physique I. Les tenseurs fondamentaux et la connexion affine», *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences* **228** (1949) 368-370.
(104) Tonnelat, M. A.: «Théorie unitaire affine 2. Résolution rigoureuse de l'equantion fondamentales», *Comptes*

rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences **231** (1950) 487-489.
(105) Tonnelat, M. A.: «Théorie unitaire affine 3. Les équations du champ», *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* **231** (1950) 512-514.
(106) Tonnelat, M. A.: «Résolution des équations fondamentales d'une théorie unitaire purament affine», *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* **230** (1950) 182-184.
(107) Tonnelat. M. A.: «Théorie unitaire affine du champ physique», *Journal de Physique et le Radium* **12** (1951) 81-88.
(108) Tonnelat, M. A.: «Application de la solution générale des equations $g_{\underset{+}{\mu}\underset{-}{\nu};\rho}=0$ á la détermination de'une conexion affine particulière», *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* **239** (1954) 231-233.
(109) Tonnelat, M. A.: «Validité de la solution générales des équations d'Einstein $g_{\underset{+}{\mu}\underset{-}{\nu};\rho}=0$ dans le cas $\varphi=0$ », *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* **239** (1954) 1468-1470.
(110) Tonnelat, M. A.: «La solution générale des équations d'Einstein», *Journal de Physique et le Radium* **16-1** (1955) 21-38.
(111) Tonnelat, M. A.: «Sur les équations approchées de la théorie d'Einstein-Schrödinger», *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* **241** (1955) 168-170.
(112) Tonnelat, M. A.: *La théorie du champ unifié d'Einstein et quelques-uns de sus développements*, Gauthier-Villars, 1955.
(113) Tonnelat, M. A.: *Les théories unitaires de l'electromagnétism et de la gravitation*, Gauthier-Villars, 1965, pp. 266-273 y pp. 296-349.
(114) Tonnelat, M. A.: *Einstein's theory of unified fields*, Gordon and Breach, 1982.
(115) Vizgin, Vladimir P.: *Unified Field Theories*, Birkhäuser, 1994, pp. 188-197 y pp. 204-218.
(116) Weyl, Hermann: «Gravitation und Elektrizität», *Sitzungsbericte der Preussischen Akad. d.Wissenschaften* (1918) 465-480. Traducción al inglés con el título «Gravitation and Electricity», en *The Principle of Relativity*, Dover, 1952, pp. 201-216.
(117) Weyl, Hermann: *Raum, Zeit, Materie*, Springer, 5th edition, 1923, Apéndice 4.
(118) Weyl, Hermann: *Space-Time-Matter*, Dover, 1952, pp. 121-138 y pp. 282-312.
(119) Winogradzki, J: «Sur les équations du champ généralisé d'Einstein-Schródinger», *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences* **240** (1955) 945-947.
(120) Winogradzki, J: «Le Groupe Relativistic de la Théorie Unitaire d'Einstein-Schródinger», *Le Journal de Physique et le Radium* **16** (1955) 438-443.
(121) Winogradzki, J: «Sur les identitées de Bianchi de la théorie unitaire d'Einstein-Schrödinger», *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences* **242** (1956) 74-76.
(122) Wyman, M.: «Unified Field Theory», *Canadian Journal of Mathematics* **2** (1950) 427-439.