Performances piecewise defined functions in analytic form, prime-counting function

Oleh Kyrhan
MITI, Ukraine
o.kyrhan@viti.edu.ua

17 февраля 2016 г.

Аннотация

The article discusses the representation of discrete functions defined in an analytic form without the use of approximations, namely the Heaviside function, identity function, the Dirac delta function and the prime-counting function.

1 Введения

В статье рассматривается вопрос представления дискретно определенных функций в аналитической форме без использования аппроксимации, а именно: функции Хевисайда, функция тождества, дельта-функция Дирака, функция распределения простых чисел и доказана теорема о представлении любой кусочно-заданной функции

$$t(x) = \begin{cases} t_0(x),\ x < x_1 \\ t_1(x),\ x_1 \le x < x_2 \\ ... \\ t_n(x),\ x_n \le x \end{cases} \tag{1}$$

где $x_1 < x_2 < ... < x_n$ точки изменения значения функции $t(x)$. Будут показаны функции из использованием несобственного и определенного интегралов. Например функция Хевисайда дискретные форы которой [1, 2, 3]:

$$H_1(x) = \begin{cases} 0,\ x < 0 \\ 1,\ x \ge 0 \end{cases} \tag{2}$$

и

$$H_2(x) = \begin{cases} 0,\ x < 0 \\ \frac{1}{2},\ x = 0 \\ 1,\ x > 0 \end{cases} \tag{3}$$

имеют аналитические формы с использования аппроксимации [1, 2, 3]:

$$H(x) = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctgk \cdot x \right)$$

$$H(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1 + e^{-2k\cdot x}}$$

$$H(x) = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} erfk \cdot x \right)$$

и интегральное представление с использованием аппроксимации и несобственного интеграла [2, 3]:

$$H(x) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tau - i\varepsilon} e^{ix\tau} d\tau$$

2 Формулировка основных результатов (функции Хевисайда, функция тождества)

Переведем в аналитическую форму без аппроксимаций функции (2), (3) и функцию тождества, с помощью которых переведем функцию распределения простых чисел в аналитическую форму без аппроксимаций.

Рассмотрим интеграл:

$$\int_0^\infty \frac{e^t}{(1+e^t)^2}dt$$

который равняется $\frac{1}{2}$. Теперь на основе этого интеграла построим функцию:

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{xe^{xt}}{(1+e^{xt})^2}dt$$

Найдем значение этой функции на числовой оси в соответствии со значениями переменой x.

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{xe^{xt}}{(1+e^{xt})^2}dt = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{1+e^{xt}}\right) - \left(-\frac{1}{1+e^{x0}}\right) = \frac{1}{2} - \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{1+e^{xt}}\right)$$

для $x > 0$

$$f(x>0) = \frac{1}{2} - \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{1+e^{xt}}\right) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

для $x < 0$

$$f(x<0) = \frac{1}{2} - \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{1+e^{xt}}\right) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

для $x = 0$

$$f(x=0) = \frac{1}{2} - \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{1+e^{0t}}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

В дискретном определении функция $f(x)$ имеет следующую форму:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2},\ x<0 \\ 0,\ x=0 \\ \frac{1}{2},\ x>0 \end{cases}$$

Теперь прибавим $\frac{1}{2}$ к функции $f(x)$ и получим функцию которая совпадает из функциею (3)

$$H_2(x) = f(x) + \frac{1}{2} = \int_0^\infty \frac{xe^{xt}}{(1+e^{xt})^2}dt + \frac{1}{2} \tag{4}$$

Чтобы получить функцию (2) рассмотрим функцию

$$u(x) = \int_0^\infty x^2 \cdot e^{-t\cdot x^2}dt$$

Найдем значения функции $u(x)$ на числовой оси

$$u(x) = \int_0^\infty x^2 \cdot e^{-t\cdot x^2}dt = \left(-e^{-t\cdot x^2}\right)\Bigg|_0^\infty = -\lim_{t\to\infty} e^{-t\cdot x^2} - \left(-e^{-0\cdot x^2}\right) = -\lim_{t\to\infty} e^{-t\cdot x^2} + 1 \tag{5}$$

у нас есть два варианты $x = 0$ и $x \neq 0$ так как в уравнения (5) входит квадрат x

$$u(x=0) = -\lim_{t\to\infty} e^{-t\cdot 0} + 1 = -1 + 1 = 0$$

$$u(x\neq 0,\ x^2) = -\lim_{t\to\infty} e^{-t\cdot k} + 1 = 0 + 1 = 1$$

Дискретная форма функции $u(x)$ имеет следующий вид

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x \neq 0 \end{cases}$$

функция $rt(x) = 1 - u(x)$ называется функция тождества.

Теперь с помощью функций (4) и $rt(x)$ построим функцию (2)

$$H_1(x) = H_2(x) + \frac{1}{2}rt(x) = \int\limits_0^\infty \frac{xe^{xt}}{(1+e^{xt})^2}dt + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - \int\limits_0^\infty x^2 e^{-tx^2}dt\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty x^2 e^{-tx^2}dt + \int\limits_0^\infty \frac{xe^{xt}}{(1+e^{xt})^2}dt$$

$$H_1(x) = 1 + \int\limits_0^\infty \left(\frac{xe^{xt}}{(1+e^{xt})^2} - \frac{1}{2}x^2 e^{-tx^2}\right)dt$$

Теперь покажем аналитические формы без аппроксимаций и несобственного интеграла функции (2) и $rt(x)$

Рассмотрим функцию $c(x)$

$$c(x) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sec^2 t e^{-x\tan t}}{(1+e^{-x\tan t})^2}dt$$

Вычислим значение функции $c(x)$ при разных x

$$c(x) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sec^2 t e^{-x\tan t}}{(1+e^{-x\tan t})^2}dt = -\frac{1}{1+\mathrm{e}^{x\tan t}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{1+\mathrm{e}^{x\tan\frac{\pi}{2}}} - \left(-\frac{1}{1+\mathrm{e}^{x\tan 0}}\right)$$

так как $\tan\frac{\pi}{2} = \infty$ и $\tan 0 = 0$ то функция $c(x)$ принимает те самые значения что и функция $f(x)$.

$$c(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \frac{1}{2}, & x > 0 \end{cases}$$

Заменим $f(x)$ на $c(x)$ в (4), тем самим получим аналитическую форму без аппроксимаций и несобственного интеграла функцию (3):

$$H_2(x) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sec^2 t e^{-x\tan t}}{(1+e^{-x\tan t})^2}dt + \frac{1}{2} \tag{6}$$

Теперь найдем аналитическую форму без аппроксимаций и несобственного интеграла функции $rt(x)$, рассмотрим функцию

$$q(x) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-x^2\tan t} x^2 \sec^2 t\ dt$$

Вычислим значение функции $q(x)$ при разных x

$$q(x) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-x^2\tan t} x^2\sec^2 t dt = \left(-\mathrm{e}^{-x^2\tan t}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \lim_{t\to\infty}\left(-\mathrm{e}^{-x^2\tan t}\right) - \left(-\mathrm{e}^{-x^2\tan 0}\right) =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(-\mathrm{e}^{-x^2\tan t}\right) + 1$$

у нас есть два варианты $x = 0$ и $x \neq 0$ так как в функцию $q(x)$ входит квадрат x

$$q(x = 0) = \lim_{t \to \frac{\pi}{2}} \left(-\mathrm{e}^{-0 \tan t}\right) + 1 = -1 + 1 = 0$$

$$q(x \neq 0,\ k = x^2) = \lim_{t \to \frac{\pi}{2}} \left(-\mathrm{e}^{-k \tan t}\right) + 1 = 0 + 1 = 1$$

как видно функция $q(x)$ совпадает с $u(x)$. Функция тождества в таком случаи имеет вид

$$rt(x) = 1 - q(x) = 1 - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-x^2 \tan t} x^2 \sec^2 t \; dt \tag{7}$$

Теперь определим функцию $H_1(x)$ с помощью функций (6) и (7)

$$H_1(x) = H_2(x) + \frac{1}{2} rt(x) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sec^2 t e^{-x \tan t}}{\left(1 + e^{-x \tan t}\right)^2} dt + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-x^2 \tan t} x^2 \sec^2 t dt\right) =$$

$$= 1 + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x \sec^2 t e^{-x \tan t}}{\left(1 + e^{-x \tan t}\right)^2} - \frac{1}{2} \mathrm{e}^{-x^2 \tan t} x^2 \sec^2 t\right) dt$$

$$H_1(x) = 1 + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x \sec^2 t e^{-x \tan t}}{\left(1 + e^{-x \tan t}\right)^2} - \frac{1}{2} \mathrm{e}^{-x^2 \tan t} x^2 \sec^2 t\right) dt \tag{8}$$

Теперь у нас есть все чтобы доказать теорему о представлении любой кусочно-заданной функции в аналитической форме без использования аппроксимации.

3 Кусочно-задание функции

Теорема 1. *Всякую кусочно-заданную функцию (1) можно представить в аналитической форме без аппроксимации, если функции $t_0(x),\ t_1(x),\ t_2(x) ...\ t_n(x)$ имеют аналитическую форму без аппроксимаций.*

Доказательство. Используем функцию (8). Возьмем два числа $a < b$ и построим функцию единичного импульса

$$I(x,\ a,\ b) = H_1(x - a) - H_1(x - b)$$

которая равняется 1 когда $a \leq x < b$ и 0 в остальных случаях. Составим функцию (1) используя $I(x)$ и функции $t_0(x),\ t_1(x),\ t_2(x) ...\ t_n(x)$

$$t(x) = \left(1 - H_1(x - x_1)\right) t_0(x) + \sum_{i=2}^{n-1} I(x, x_{i-1}, x_i) t_{i-1}(x) + H_1(x - x_n) t_n(x)$$

исходя из построения функции $t(x)$, теорема 1 доказана. □

4 Дельта-функция Дирака

Представим дельта-функцию Дирака [4, 5] в аналитической форме без аппроксимации через производную функции (8) по переменой x

$$\frac{dH^*(x)}{dx} = \frac{d\left(\int\limits_0^{\infty} \left(e^{-t} - x^2 \cdot e^{-t \cdot x^2} + \frac{x \cdot e^{t \cdot x}}{(1 + e^{t \cdot x})^2}\right) dt\right)}{dx} = \int\limits_0^{\infty} \frac{d\left(e^{-t} - x^2 \cdot e^{-t \cdot x^2} + \frac{x \cdot e^{t \cdot}}{(1 + e^{t \cdot})^2}\right)}{dx} dt =$$

$$= \int\limits_0^{\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{t \cdot x}}{\left(1 + \mathrm{e}^{t \cdot x}\right)^2} - 2\mathrm{e}^{-t \cdot x^2} x\right) dt - \int\limits_0^{\infty} \left(\frac{2\mathrm{e}^{2t \cdot x} t \cdot x}{\left(1 + \mathrm{e}^{t \cdot x}\right)^3}\right) dt + \int\limits_0^{\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{t \cdot x} t \cdot x}{\left(1 + \mathrm{e}^{t \cdot x}\right)^2} + 2\mathrm{e}^{-t \cdot x^2} t \cdot x^3\right) dt$$

$$\frac{dH^*(x)}{dx}=\int\limits_0^\infty\left(\frac{e^{t\cdot x}+e^{t\cdot x}t\cdot x}{\left(1+e^{t\cdot x}\right)^2}-2e^{-t\cdot x^2}x\right)dt+\int\limits_0^\infty\left(2e^{-t\cdot x^2}t\cdot x^3-\frac{2e^{2t\cdot x}t\cdot x}{\left(1+e^{t\cdot x}\right)^3}\right)dt \tag{9}$$

Найдем значения функции (9)

$$\frac{dH^*(x)}{dx}=\int\limits_0^\infty\left(\frac{e^{t\cdot x}}{\left(1+e^{t\cdot x}\right)^2}-2e^{-t\cdot x^2}x\right)dt+\int\limits_0^\infty\left(-\frac{2e^{2t\cdot x}t\cdot x}{\left(1+e^{t\cdot x}\right)^3}+\frac{e^{t\cdot x}t\cdot x}{\left(1+e^{t\cdot x}\right)^2}\right)dt+\int\limits_0^\infty\left(2e^{-t\cdot x^2}t\cdot x^3\right)dt=$$

$$=\lim_{A\to\infty}\left(-\frac{t}{\left(1+e^{t\cdot x}\right)^2}\right)\Bigg|\begin{matrix}A\\0\end{matrix}-\lim_{A\to\infty}\left(2e^{-t\cdot x^2}t\cdot x+\frac{t}{1+e^{t\cdot x}}\right)\Bigg|\begin{matrix}A\\0\end{matrix}=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{t}{\left(1+e^{t\cdot x}\right)^2}\right)+\lim_{t\to\infty}\left(-2e^{-t\cdot x^2}t\cdot x\right)+\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t}{1+e^{t\cdot x}}\right)-0-0+0=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{t}{\left(1+e^{t\cdot x}\right)^2}\right)+\lim_{t\to\infty}\left(-2e^{-t\cdot x^2}t\cdot x\right)+\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t}{1+e^{t\cdot x}}\right)=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{te^{t\cdot x}}{\left(1+e^{t\cdot x}\right)^2}\right)+\lim_{t\to\infty}\left(-2e^{-t\cdot x^2}t\cdot x\right)$$

второй член при любом $x<\infty$ равняется нулю:

$$\lim_{t\to\infty}\left(-2e^{-t\cdot x^2}t\cdot x\right)=\lim_{t\to\infty}\left(-2\frac{t\cdot x}{e^{t\cdot x^2}}\right)=0.$$

Рассмотрим первый член, при $x>0$, пускай $\infty>k>0$ і $k=|x|$

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{te^{t\cdot k}}{\left(1+e^{t\cdot k}\right)^2}\right)=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{te^{t\cdot k}}{e^{2t\cdot k}+2e^{t\cdot k}+1}\right)=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t^2e^{t\cdot k}}{2t\cdot e^{2t\cdot k}+2t\cdot e^{t\cdot k}}\right)=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t^2e^{t\cdot k}}{2t\cdot e^{t\cdot k}(e^{t\cdot k}+1)}\right)=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t}{2(e^{t\cdot k}+1)}\right)=0.$$

при $x<0$, пускай $\infty>k>0$ і $k=|x|$

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{te^{t\cdot x}}{\left(1+e^{t\cdot x}\right)^2}\right)=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{te^{-t\cdot k}}{\left(1+e^{-t\cdot k}\right)^2}\right)=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t}{e^{t\cdot k}\left(1+e^{-t\cdot k}\right)^2}\right)=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t}{e^{t\cdot k}\left(1+\frac{1}{e^{t\cdot k}}\right)^2}\right)=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t}{e^{t\cdot k}\left(1+\frac{1}{e^{t\cdot k}}\right)^2}\right)=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t}{e^{t\cdot k}\left(1+0\right)^2}\right)=0.$$

при $x=0$

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{te^{t\cdot x}}{\left(1+e^{t\cdot x}\right)^2}\right)=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{te^0}{\left(1+e^0\right)^2}\right)=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t}{4}\right)=\infty.$$

Как видно уравнения (9) имеет значения дельта-функции Дирака т.е. $\frac{dH^*(x)}{dx}=\delta^*(x)$.

5 Функция распределения простых чисел

Чтобы получить функцию распределения простых чисел [6], нужно построить функцию количества делителей $\sigma_0(n)$ числа n на основе которой строится функция идентификации простых чисел.

Переведем функцию $\sigma_0(n)$ количества делителей числа n в аналитическую форму без аппроксимации. Используем свойство функции $\sin(x)$, если x целое то $\sin(x)=0$.

Если i делит число n то $\sin\left(\pi\frac{n}{i}\right)=0$ в противном случаи $\sin\left(\pi\frac{n}{i}\right)\neq 0$. Используем функцию (7), тогда следующая функция $rt\left(\sin\left(\pi\frac{n}{i}\right)\right)$ равняется 1 если i делит n и 0 в противном случаи. Теперь построим функцию $\sigma_0(n)$ которая суммирует $rt\left(\sin\left(\pi\frac{n}{i}\right)\right)$ по всем i

$$\sigma_0(n)=\sum_{i=1}^{\infty} rt\left(\sin\left(\pi\frac{n}{i}\right)\right)$$

Теперь построим функцию идентификации простых чисел на основе функции $\sigma_0(n)$ и $rt(x)$, так как у простого числа всего два делителя, 1 и оно само, то

$$fes(n)=rt\left(\sigma_0(n)-2\right)=rt\left(\sum_{i=1}^{\infty} rt\left(\sin\left(\pi\frac{n}{i}\right)\right)-2\right)$$

дискретная форма которого будет иметь следующий вид

$$fes(n)=\begin{cases} 1, & n \text{ простое} \\ 0, & n \text{ составное} \end{cases}$$

Теперь имея функцию идентификации простых чисел и функцию Хевисайда $H_1(x)$ построим функцию распределения простых чисел в аналитической форме без использования аппроксимации.

$$\pi(x)=\sum_{i=1}^{\infty} fes(i)H_1(x-i)=\sum_{i=1}^{\infty} rt\left(\sum_{j=1}^{\infty} rt\left(\sin\left(\pi\frac{i}{j}\right)\right)-2\right)H_1(x-i)$$

Общий вид функции распределения простых чисел:

$$\pi(x)=$$
$$=\sum_{i=1}^{\infty}\left(1-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(1-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-\sin\left(\pi\frac{n}{j}\right)^2\tan z}\sin\left(\pi\frac{n}{j}\right)^2\sec^2 z\,dz\right)-2\right)^2\tan v}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(1-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-\sin\left(\pi\frac{n}{j}\right)^2\tan z}\sin\left(\pi\frac{n}{j}\right)^2\sec^2 z\,dz\right)-2\right)^2\sec^2 v\,dv\right)\cdot$$
$$\cdot\left(1+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{(x-i)\sec^2 t\,e^{-(x-i)\tan t}}{\left(1+e^{-(x-i)\tan t}\right)^2}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-(x-i)^2\tan t}(x-i)^2\sec^2 t\right)dt\right)$$

Все вычисления были проверены в *wolfram mathematica*.

Список литературы

[1] Волков И. К., Канатников А. Н. Интегральные преобразования и операционное исчисление: Учеб. для вузов / Под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. — 2-е изд. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. — 228 с. — (Математика в техническом университете; Вып. XI).

[2] Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 5-и тт.; 2-е изд., перераб. и доп. Т. 1: Математические модели, динамические характеристики и анализ систем автоматического управления / Под ред. К. А. Пупкова, Н. Д. Егупова. — М.: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. — 656 с.

[3] Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа. — Том 2.

[4] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщённые функции и действия над ними.

[5] Weisstein, Eric W. Delta Function (англ.) на сайте Wolfram MathWorld.

[6] Прахар. Распределение простых чисел. — Мир, 1967.