逆导数—导数的新算法

庾广善

(Harbin · Macro · Dynamics Institute. 150066, P. R. China)

E-mail:sxzyu35@hotmail.com

(2015.12.21—2016.1.6)

摘要: 牛顿第二定律和第三定律已经被证明是错的，他的错误即是由导数运算的局限性所导致. 因此新的导数计算法亟待产生，这就是逆导数计算法. 逆导数是导数计算的一种延伸，它基于导数计算而产生，采用经过转换调整的大部分的导数的计算公式. 在物理学和力学工程学领域，逆导数可能会被大量地采用，以代替原有的导数计算法. 将会产生巨大的深远的影响.

关键字: 逆导数；反导数；逆微分；反微分；逆积分

PACS: 02.10.à v、02.10.De、02.70.2 c、02.10.Ud、03.65.Fd

0 引言

本文在导数论的基础，提出一种新的计算法—逆导数.

1 逆导数的原理

对于函数:

$$y=f\left(x\right) \tag{1.0.1}$$

这时的导数是:

$$f'\left(x_0\right)=y_0{}'=\frac{dy_0}{dx_0}=\lim_{\Delta x_0\to 0}\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}=\lim_{\Delta x_0\to 0}\frac{f\left(x+\Delta x_0\right)-f\left(x\right)}{\Delta x_0} \tag{1.0.2}$$

它表明，当增量 Δx_0 趋近于零时，$\Delta y_0/\Delta x_0$ 的极限即 y 关于 x 的导数. 在这里使增量 Δx_0 趋近于零，这很重要. 它说明导数 $f'(x_0)$ 是以微分 dx_0 为单位而计算的. 比如当以导数来表示速度时，就是以时间为单位，即在单位的时间内，通过移动距离的变化，来表示速度的变化的.

关于逆导数，它与导数有什么不同呢? 首先，我们要求反函数:

$$x=g\left(y\right) \tag{1.0.3}$$

或:

$$x=f^{-1}\left(y\right) \tag{1.0.4}$$

那么，逆导数即是:

$$\left[f^{-1}\left(y_0\right)\right]^{+}{}'=x_0{}^{+\prime}=\frac{qy_0}{qx_0}=\lim_{\Delta y_0\to 0}\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}=\lim_{\Delta y_0\to 0}\frac{\Delta y_0}{f^{-1}\left(y+\Delta y_0\right)-f^{-1}\left(y\right)} \tag{1.0.5}$$

所以逆导数即记为 $[f^{-1}(y_0)]^{+\prime}$ ，$x_0{}^{+\prime}$ ， 和 qy_0/qx_0 . 与导数的微分相对应，qy_0 和 qx_0 也叫逆微分.

显然，在逆导数的运算中，是在增量 Δy_0 趋近于零时，对 $\Delta y_0/\Delta x_0$ 求极限. 因此，说明逆导数 $[f^{-1}(y_0)]^{+\prime}$ 是以逆微分 qy_0 为单位，进行计算的. 这时它与导数的计算，就有着本质的不同. 例如，当以逆导数来表示速度时，它就是以移动的距离为单位. 即在单位的距离内，通过所经历时间的不同，而表示速度的不同. 这与以导数来记述或描述速度，是有明显的不同的. 并且它对事

物的物理学规律，甚至都会有不同的解释．因此这是很重要的．

在物理学的过程中，很多计算都应该采用逆导数计算，才会是正确的．例如关于力的计算，决定力的大小的，物体移动的速度或加速度，就是由物体的位移量，直接反映物体运动的能量的．这时表征物体移动的速度和加速度的，其在移动单位距离所经历的时间，反映的则是物体运动能量相对于时间的密度．因此力的计算，无论是速度还是加速度，都应以物体移动的距离为单位，来进行计算．即采用逆导数算法．

根据此种原理，我们发现了采用导数计算的牛顿第二定律是错的．并且提出以逆导数计算为基础的，新第二运动定律和新第三运动定律．

显然，逆导数的原理与导数非常接近，是导数原理的扩展．逆导数引用了导数的反函数，所以它就好像是导数运算的倒数．但增量Δ$\boldsymbol{y_0}$ 和增量Δ$\boldsymbol{x_0}$ 的位置，在逆导数中却并不改变．这是为了照顾传统的物理概念的习惯，因此这时只是将计算的单位由分母改到了分子，而分母分子的性质却并没有变，例如在计算速度或加速度时，仍然是移动的距离除以所经历的时间．

所以逆导数的解析式就等于是将导数的解析式中，变量 $\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{x}$ 对调后将分子分母对调．并把函数符号改为反函数符号．

2 导数公式的转换

因为逆导数的原理是基于导数的原理，所以通常的适用于导数的情况，也将同样适用于逆导数．例如关于函数的可导性与否，逆导数与导数是相对的．当函数的图像显示其在导数中是可导的，那么在该函数的图像旋转 90° 时，其逆导数的可导与否则是与之相同的．

显而易见的，逆导数的解析式只是将导数的解析式，分子分母对调．因此，由导数的解析式，能将导数和微分的公式，经过简单调整转换成逆导数和逆微分的公式．

例如函数的和与差的导数公式：

$$\frac{d}{dx_0}(u\pm v)=\frac{du_0}{dx_0}\pm\frac{dv_0}{dx_0} \tag{2.0.1}$$

和

$$(u\pm v)'=u'\pm v' \tag{2.0.2}$$

可转换成和与差的逆导数公式：

$$\frac{qy_0}{q(u\pm v)}=\frac{qy_0}{qu_0\pm qv_0} \tag{2.0.3}$$

和

$$\begin{aligned}[u\pm v]^{+\prime}&=\lim_{\Delta y_0\to 0}\frac{\Delta y_0}{\left[(u+\Delta u_0)-(u)\right]\pm\left[(v+\Delta v_0)-(v)\right]}\\&=\lim_{\Delta y_0\to 0}\frac{\Delta y_0}{(\Delta u_0)\pm(\Delta v_0)}=\frac{qy_0}{qu_0\pm qv_0}\end{aligned} \tag{2.0.4}$$

和乘积的导数公式：

$$\frac{d}{dx_0}uv=u\frac{dv_0}{dx_0}+v\frac{du_0}{dx_0} \tag{2.0.5}$$

和

$$(uv)'=uv'+vu' \tag{2.0.6}$$

也可转换成乘积的逆导数公式:

$$\frac{qy_0}{q(uv)}=\frac{qy_0}{uqv_0+vqu_0+u_0v_0} \tag{2.0.7}$$

和

$$[uv]^{+}{}'=\lim_{\Delta y_0\to 0}\frac{\Delta y_0}{(u+\Delta u_0)(v+\Delta v_0)}=\lim_{\Delta y_0\to 0}\frac{\Delta y_0}{u\Delta v_0+v\Delta u_0+\Delta u_0\Delta v_0}$$
$$=[u\Delta v_0+v\Delta u_0+\Delta u_0\Delta v_0]^{+}{}'=\frac{qy_0}{uqv_0+vqu_0+qu_0qv_0} \tag{2.0.8}$$

以及商的导数公式:

$$\frac{d}{dx_0}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v(du_0/dx_0)-u(dv_0/dx_0)}{v^2} \tag{2.0.9}$$

和

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{vu_0{}'-uv_0{}'}{v^2} \tag{2.0.10}$$

转换成逆导数公式则是:

$$\frac{qy_0}{q\left(\frac{u}{v}\right)}=\lim_{\Delta y_0\to 0}\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}=\lim_{\Delta y_0\to 0}\frac{\Delta y_0\cdot v(v+\Delta v_0)}{v\Delta u_0-u\Delta v_0}=\frac{qy_0}{qx_0}=\frac{qy_0\cdot v(v+qv_0)}{v(qu_0)-u(qv_0)} \tag{2.0.11}$$

和

$$\left[\frac{u}{v}\right]^{+}{}'=\lim_{\Delta y_0\to 0}\frac{\Delta y_0}{\left(\frac{(u+\Delta u_0)}{(v+\Delta v_0)}-\frac{u}{v}\right)}=\lim_{\Delta y_0\to 0}\frac{(v+\Delta v_0)v\Delta y_0}{(u+\Delta u_0)v-u(v+\Delta v_0)}$$
$$=\lim_{\Delta y_0\to 0}\frac{(v+\Delta v_0)v\Delta y_0}{[(u+\Delta u_0)-u]v-u[(v+\Delta v_0)-v]}$$
$$=\left[\frac{\Delta u_0 v-u\Delta v_0}{(v^2+v\Delta v_0)}\right]^{+}{}'=\frac{qy_0\cdot v(v+qv_0)}{v(qu_0)-u(qv_0)} \tag{2.0.12}$$

复合函数的导数公式:

$$\frac{dy_0}{dx_0}=\frac{dy_0}{du_0}\cdot\frac{du_0}{dx_0} \tag{2.0.13}$$

和

$$(f[g(x)])'=f'(u)\cdot g'(x)\Leftrightarrow\frac{dy_0}{dx_0}=\frac{dy_0}{du_0}\cdot\frac{du_0}{dx_0} \tag{2.0.14}$$

可直接转换成逆导数的公式:

$$\lim_{\Delta y_0\to 0}\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}=\lim_{\Delta y_0\to 0}\frac{\Delta y_0}{\Delta u_0}\cdot\lim_{\Delta y_0\to 0}\frac{\Delta u_0}{\Delta x_0}\Leftrightarrow\frac{qy_0}{qx_0}=\frac{qy_0}{qu_0}\cdot\frac{qu_0}{qx_0} \tag{2.0.15}$$

和

$$\left(f^{-1}\left[g^{-1}\left(y\right)\right]\right)^{+}{}'=f^{+}{}'\left(y\right)\cdot g^{+}{}'\left(u\right)\Leftrightarrow\frac{dy_0}{dx_0}=\frac{dy_0}{du_0}\cdot\frac{du_0}{dx_0} \tag{2.0.16}$$

高阶导数(二阶)的公式:

$$y''=\left(y'\right)'=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d^2y}{dx^2} \tag{2.0.17}$$

转换成高阶(二阶)逆导数公式则是:

$$\left[f^{-1}\left(y_0\right)\right]^{+}{}''=x_0{}^{+}{}''=\frac{1}{qx_0}\left(\frac{qy_0}{qx_0}\right)=\frac{qy_0}{q^2x_0{}^2} \tag{2.0.18}$$

以上是一些常用导数公式，转换成逆导数公式的方法．在需要时可将更多的导数原理，转换和引用到逆导数之中．

3 逆导数与偏导数之间的转换

逆导数所表达的，实际上可以用偏导数来实现．因此，逆导数可以转换为偏导数．反之，偏导数也可以转换为逆导数．

例如二元函数:

$$z=f\left(x,y\right) \tag{3.0.1}$$

对 $\boldsymbol{y}$ 的偏导数是:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y_0\to 0}\frac{f\left(x,y+\Delta y_0\right)-f\left(x,y\right)}{\Delta y_0}=f_y{}'\left(x,y\right)=z_y{}'=\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} \tag{3.0.2}$$

这时偏微分:

$$d_yz=\frac{\partial z}{\partial y}dy=f_y{}'\left(x,y\right)\Delta y_0=\lim_{\Delta y_0\to 0}f\left(x,y+\Delta y_0\right)-f\left(x,y\right) \tag{3.0.3}$$

而逆导数是:

$$x_0{}^{+}{}'=\frac{qy_0}{qx_0}=\lim_{\Delta y_0\to 0}\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}=\lim_{\Delta y_0\to 0}\frac{\Delta y_0}{f^{-1}\left(y+\Delta y_0\right)-f^{-1}\left(y\right)} \tag{3.0.4}$$

显然可以把逆导数视为一个二元函数:

$$z=\frac{qy_0}{qx_0}=f\left(x_0,y_0\right) \tag{3.0.5}$$

将这个二元函数引进到偏微分:

$$d_y z = \lim_{\Delta y_0 \to 0} f\left(x, y+\Delta y_0\right) - f\left(x, y\right) = \lim_{\Delta y_0 \to 0} f\left(x, \Delta y_0\right)$$
$$= \lim_{\Delta y_0 \to 0} f\left(x, \Delta y_0\right)\Big|_{x=\Delta x_0} \tag{3.0.6}$$

$$\therefore \quad d_y z = \lim_{\Delta y_0 \to 0} f\left(\Delta x_0, \Delta y_0\right) = \lim_{\Delta y_0 \to 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = \frac{q y_0}{q x_0} \tag{3.0.7}$$

即逆导数作为一个二元函数，就是一个偏微分．因此它能转换成一个偏导数的偏微分，某些类似条件的偏导数的偏微分，也可以转换为逆导数．

4　逆导数的应用——新第二运动定律和第三运动定律

逆导数的典型应用，就是在新第二运动定律和第三运动定律中．

新第二运动定律：

$$F = \lim_{\Delta l \to 0} m \cdot \frac{\Delta l}{\Delta^2 t^2} = m \cdot \frac{ql}{q^2 t^2} = m a^+ \tag{4.0.1}$$

它也是以质量与加速度的乘积表示力，但其加速度是二阶逆导数，记为 $\boldsymbol{a}^+$ 以表明它与导数的不同．因为这时二阶逆微分 $\boldsymbol{q^2 t^2}$，才是逆导数其中的变量．所以当力变化时，其中的质量 $\boldsymbol{m}$ 与力是等比例的关系，而其加速度 $\boldsymbol{a}^+$ 则与力是反比平方的关系．

这将导致一系列的奇异的结果，表明对于同样的力，当物体的质量不同时，力的质量与加速度的乘积的值，将是不同的．实验与理论的推导都表明，这是对的．而牛顿第二运动定律和第三运动定律，因为是采用导数运算，因此实际上是错的．

新第三运动定律的逆导数公式：

$$F_1 = m \cdot \frac{ql}{q^2 t^2} = ql \cdot m \cdot \frac{1}{q^2 t^2} \tag{4.0.2}$$

和

$$F_2 = \frac{m}{\beta} \cdot \frac{\left(\beta ql\right)\beta}{q^2 t^2} = \beta ql \cdot \frac{m}{\beta} \cdot \frac{\beta}{q^2 t^2} \tag{4.0.3}$$

说明两个物体相作用，质量小的物体受到更大的动态作用力作用．即当两个质量不同的物体相作用时，两个物体产生不同的动量，因此是动量不守恒的．新第三运动定律表明，动量是不守恒的，因此经典力学中，动量守恒定律也是错的．

以上情况表明，逆导数在物理学和力学中的应用，产生奇异效果．有迹象显示，逆导数在电动力学或电磁学领域，也可能有很大的用途．

5　逆积分

逆导数的积分计算，叫做逆积分．它与普通积分计算，应该没有太大区别．它就是将普通积分计算中的微分符号，改成逆微分的符号即可．其计算的原理和方法是一样的．但是虽然表面上计算方法相同，而由于逆导数的性质，计算出来的结果仍然会有很大的不同．

例如计算力所做的功：

$$W_1 = \int F_1 qx = \int \left(m \cdot \frac{ql}{q^2 t^2}\right) qx = \frac{1}{2} m u^2 - \frac{1}{2} m u_0^2 \tag{5.0.1}$$

和
$$W_2=\int F_1 qx=\int\left(\frac{m}{\beta}\cdot\frac{ql}{q^2\left(t/\beta\right)\left(t/\beta\right)}\right)qx=\frac{m}{\beta}\cdot\beta^2\cdot\left(\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{2}u_0^2\right) \tag{5.0.2}$$

表明同样的力作用于两个质量不同的物体，力对两物体所做的功是不同的．质量小 $\boldsymbol{\beta}$ 倍的物体，被力所做的功大 $\boldsymbol{\beta}$ 倍．此种情况在弹簧弹力释放的实验中，得到了证实．这一点也是很重要的．所以上述积分运算和弹簧的实验都表明，弹簧弹力的释放，对质量不同的物体，形成不同的功．此种情况显示，当弹簧对质量不同的物体做功时，能量是不守恒的．

因此逆导数和逆积分计算的引用，导致一些重要的物理学定律被动摇．其中的意义是巨大的．

5　结论

可见逆导数作为导数运算的补充和扩展，是极为重要的．在现实中采用类似逆导数这样的方法，来对事物进行测量或表述，其实也是不乏其例的．例如，体育比赛中的赛跑，都是测定在规定距离内，所消耗的时间．而不是在限定时间内，跑多少距离．

例如在物理学中，经常讨论的问题是，某种能量在一定时间内的作用．比方说力，电磁力，电量等等．本文中所提及的，是经典力学中的第二第三运动定律，和新第二第三运动定律中的力．由于逆导数的采用，一些物理学的定律被证明是错的．很有可能类似的情况，会推广到包括电磁学等其它的物理学学科．并产生重要的影响．

因此逆导数这种新的计算方法的发现和提出，意义极为重大．对人类科学的发展和进步，必然产生深远的和广泛的影响．

致 谢

感谢编辑部．感谢参考文献作者．

感谢对我从事科技活动给予了有力支持的我的老师：关士续教授、朱新民主编、徐兰许校长．感谢曾帮助过我的大学：王书诠系主任、姜新德系主任、朴日胜副教授和很多的老师们．

感谢曾给予过我很多帮助的科学技术工作者和专家学者们．

参考文献（References）

[1] The experiment of physics of mechanics, GuagSan Yu, http://blog.sina.com.cn/u/2100834921 [2014-2-13 17:56]

[2] The experiment of the Inertia-torque,GuagSan Yu, http://blog.sina.com.cn/u/2100834921 [2014-02-23 13:25]

[3] Analyze Mistake of the Newton Third Law, GuagSan Yu, http://vixra.org/abs/1409.0115v2 [2014-09-14 23:22:57]

[4] The Newton third law is wrong!, GuagSan Yu, http://blog.sina.com.cn/u/2100834921 [2014-02-27 19:19]

[5] New Newtonian Mechanics and New Laws of Motion, GuagSan Yu, http://vixra.org/abs/1507.0025 [2015-9-18 22: 00]

[6] D.Halliday, R.Resnick. 1979.5 Physics foundation. Zeng Yongling. Beijing: Higher education publishing organization (in Chinese)[D. 哈里德，R. 瑞斯尼克. 1979. 5 物理学基础(上册). 郑永令译. 北京：高等教育出版社]

[7] Cheng Souzu, Jiang Ziyong.1961.8 Common physics. Beijing: People's education publishing organization (in Chinese)[程守洙，江之永. 1961. 8 普通物理学(第一册). 北京：人民教育出版社]

[8] Stenphen Fletcher Hewson. 2010 A MATHEMATICAL BRIDGE An Intuitive Journey in Higher Mathematics. Shanghai:

Shanghai Scientific & Technological Education Publishing House (in Chinese)[斯蒂芬.弗莱彻.休森. 2010 数学桥--对高等数学的一次观赏之旅. 邹建成等译 上海: 上海科技教育出版社]

[9]W. Shere, G. Love. 1974.3 APPLIED MATHEMATICS FOR ENGINEERING AND SCIENCE. Zou Huansan. Beijing: Science publishing organization (in Chinese) [W. 希尔, G.洛夫. 1974.3 应用数学基础 (下册) . 周焕山译 北京: 科学出版社]

[10]Togqi University Mathematics department. 2007.4(Sixth Edition) Higher Mathematics. Beijing: Higher Education Publishing Organization (in Chinese) [同济大学数学系. 2007.4(第6版) 高等数学 (上册) . 北京: 高等教育出版社]

[11] Fan YigChuan. 1958.3 Higher Mathematics Teaching Materials. Beijing: Higher education publishing organization (in Chinese) [樊映川等. 1958.3(第一版) 高等数学讲义(上册). 北京: 高等教育出版社]

THE INVERSE DERIVATIVE

—— The new algorithm of the derivative

GuagSan Yu

(Harbin · Macro · Dynamics Institute. 150066, P. R. China)

E-mail:sxzyu35@hotmail.com

(2015.12.21—2016.1.6)

Abstract: The Newton second law and the law of third have beened wrong by the proof, his mistake be caused by the localization of the derivative. Therefore new derivative the computation method desiderate the creation, this is the Inverse Derivative computation method. The inverse derivative is a kind of extension of the derivative computation, it creation been according to derivative the computation, the adoption is through regulatory and conversion the computation formula of the mostly derivative. In the physics and mechanics engineering realm, the Inverse Derivative be may adopted in largeness, to replace original derivative computation method. Will produce the enormous and profound influence.

Key Words: Inverse Derivative; Contrary Derivative; Inverse Differential; Contrary Differential; Inverse Integral