MINISTERE DE L'EQUIPEMENT
OFFICE DE LA TOPOGRAPHIE ET DU CADASTRE

LE MODÈLE DE BURSA-WOLF

Par
Abdelmajid BEN HADJ SALEM

INGÉNIEUR GÉNÉRAL À L'OFFICE DE LA TOPOGRAPHIE ET DU CADASTRE

AOÛT 2011A

VERSION 1.

OFFICE DE LA TOPOGRAPHIE ET DU CADASTRE
WWW.OTC.NAT.TN

Le Modèle de Bursa-Wolf

Abdelmajid Ben Hadj Salem[*]
Office de la Topographie et du Cadastre (OTC),
BP 156, 1080 Tunis Cedex, Tunisie
Email : benhadjsalema@yahoo.co.uk

1 Introduction

Avec le développement de la technologie de positionnement spatial (GPS, GLONASS, Galileo, ComPass), laquelle fournit à l'utilisateur sa position (X, Y, Z) tridimensionnelle dans un système géocentrique mondial donné, par exemple pour la technologie GPS c'est le système dit $WGS84$ (World Geodetic System 1984), il est nécessaire de savoir la transformation de passage du système géodésique mondial au système géodésique national ou local. Nous présentons ci-après en détail le modèle de Bursa-Wolf de transformations de passage entre les systèmes géodésiques.

Nous utilisons par la suite les notations suivantes :
- (X_1, Y_1, Z_1) les coordonnées cartésiennes 3D dans le système local (système 1) (O', X_1, Y_1, Z_1)
- (X_2, Y_2, Z_2) les coordonnées cartésiennes 3D dans le système géocentrique (O, X_2, Y_2, Z_2)(système 2),

2 Le Modèle de BURSA - WOLF

Ce modèle s'écrit sous la forme vectorielle :

$$\boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{T} + (1+m).R(rx, ry, rz).\boldsymbol{X}_1 \tag{1}$$

où :
- $\boldsymbol{X}_2$ est le vecteur de composantes $(X_2, Y_2, Z_2)^T$, T désigne transposée,

[*]Ingénieur Général, Chef de la Division de la Coopération Technique et le Développement des Ressources Humaines.

- $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{OO'}$ est le vecteur translation de composantes $(T_X, T_Y, T_Z)^T$ entre les systèmes 1 et 2,
- $1 + m$ est le facteur d'échelle entre les 2 systèmes,
- $R(rx, ry, rz)$ est la matrice de rotation (3×3) pour passer du système 1 au système 2,
- $\boldsymbol{X}_1$ est le vecteur de composantes $(X_1, Y_1, Z_1)^T$.

En développant (1), on obtient :

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \end{pmatrix} + (1+m) \begin{pmatrix} 1 & -rx & ry \\ rx & 1 & -rz \\ -ry & rz & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

avec (rx, ry, rz) les rotations comptées positivement dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Comment a-t-on obtenu cette formule ?

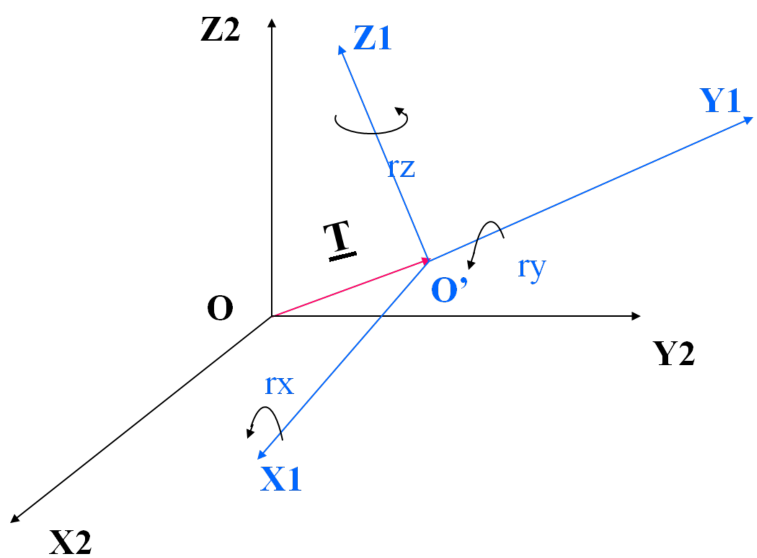

Fig. 1: Le Modèle de Bursa-Wolf

Posons :

$$\alpha = rx \tag{3}$$
$$\beta = ry \tag{4}$$
$$\gamma = rz \tag{5}$$

3 Matrices de Rotation

Dans (2), α, β et γ sont les angles de rotation respectivement autour des axes $O'X_1, O'Y_1$ et $O'Z_1$. Appelons $R(\alpha), R(\beta), R(\gamma)$ ces matrices de rotations. On a alors :

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\alpha & sin\alpha \\ 0 & -sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$R(\beta) = \begin{pmatrix} cos\beta & 0 & -sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ sin\beta & 0 & cos\beta \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$R(\gamma) = \begin{pmatrix} cos\gamma & sin\gamma & 0 \\ -sin\gamma & cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Le modèle de Bursa-Wolf est obtenu comme suit :

- on fait subir une rotation autour de $O'X_1$ d'angle α de matrice de rotation $R(\alpha)$,

- on fait subir une rotation autour de $O'Y_1$ d'angle β de matrice de rotation $R(\beta)$,

- on fait subir une rotation autour de $O'Z_1$ d'angle γ de matrice de rotation $R(\gamma)$.

Le résultat est la matrice :

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R(\gamma).R(\beta).R(\alpha) \tag{9}$$

Comme les angles de rotations sont petites $\leq 3°$, on va exprimer chaque matrice R en gardant seulement les termes du deuxième ordre. On utlise les développements :

$$sin\alpha \approx \alpha \tag{10}$$

$$cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2} \tag{11}$$

Alors les formules (6-8) deviennent :

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\frac{\alpha^2}{2} & \alpha \\ 0 & -\alpha & 1-\frac{\alpha^2}{2} \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$R(\beta) = \begin{pmatrix} 1-\frac{\beta^2}{2} & 0 & -\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 1-\frac{\beta^2}{2} \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$R(\gamma) = \begin{pmatrix} 1-\frac{\gamma^2}{2} & \gamma & 0 \\ -\gamma & 1-\frac{\gamma^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

En revenant à la formule (9), on obtient pour la matrice $R(\alpha,\beta,\gamma)$ l'expression suivante :

$$R(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} 1-\frac{\alpha^2}{2}-\frac{\beta^2}{2} & \alpha+\gamma\beta & -\beta+\alpha\gamma \\ \\ -\alpha & 1-\frac{\alpha^2}{2} & \gamma+\beta\alpha \\ \\ \beta & -\gamma & 1-\frac{\gamma^2}{2}-\frac{\alpha^2}{2} \end{pmatrix} \tag{15}$$

Maintenant, comme les trois angles sont petites, on va considérer que les termes du premier ordre ce qui donne pour $R(\alpha,\beta,\gamma)$:

$$R(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -\beta \\ -\alpha & 1 & \gamma \\ \beta & -\gamma & 1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

Revenons à (rx, ry, rz), nous trouvons :

$$R(rx,ry,rz) = \begin{pmatrix} 1 & rx & -ry \\ -rx & 1 & rz \\ ry & -rz & 1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

La formule (2) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \end{pmatrix} + (1+m) \begin{pmatrix} 1 & rx & -ry \\ -rx & 1 & rz \\ ry & -rz & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} \tag{18}$$

Références

1. T. Soler. (1998). A compendium of transformation formulas useful in GPS work. Journal of Geodesy Vol.72, n°7/8, pp 482-490.