République Tunisienne
Ministère de l'Equipement et de l'Habitat
Office de la Topographie et de la Cartographie
Direction de la Géodésie et des Levers Marins

Détermination des Hauteurs du Géoïde par la Méthode du Nivellement Astro-Géodésique

Abdelmajid BEN HADJ SALEM
Ingénieur Principal
Juillet 1988

Détermination des Hauteurs du Géoïde par la Méthode du Nivellement Astro-Géodésique

Abdelmajid BEN HADJ SALEM, Ingénieur Principal

Office de la Topographie et de la Cartographie
BP 156, 1080 Tunis-Cedex
Tél : 216 1 808 874
Email : abenhadjsalem@gmail.com

Résumé

On décrit la méthode du nivellement astro-géodésique pour la détermination de la hauteur du géoïde. Comme application, on calcule les hauteurs du géoïde sur un certain ensemble de points du Réseau Géodésique Primordial Tunisien.

I. Introduction

Il est connu que le géoïde est représenté par la surface équipotentielle particulière définie par la surface du niveau moyen des océans. Les principaux rôles du géoïde sont :

- un rôle scientifique, c'est la figure mathématique de la terre et c'est l'ultime but de la géodésie pour déterminer sa forme et ses dimensions,
- un rôle pratique ; c'est le datum pour les réseaux de nivellement.

La détermination de la position du géoïde par rapport à la surface de référence (ellipsoïde) est importante pour permettre de réduire les observations faites sur la surface topographique à l'ellipsoïde. La position du géoïde par rapport à l'ellipsoïde est repérée par la hauteur du géoïde au dessus (ou au dessous) de l'ellipsoïde, notée souvent par N. Entre l'altitude ellipsoïdique he et N, on a la relation :

$$he = N + h \tag{1}$$

où h est l'altitude orthométrique.

II. Calcul des hauteurs du géoïde par la méthode du nivellement astro-géodésique

On dispose de n points où on connaît les coordonnées astronomiques (φ_a, λ_a) et les coordonnées géodésiques (φ_g, λ_g). En un point i, on a les composantes de la déviation de la verticale par ;

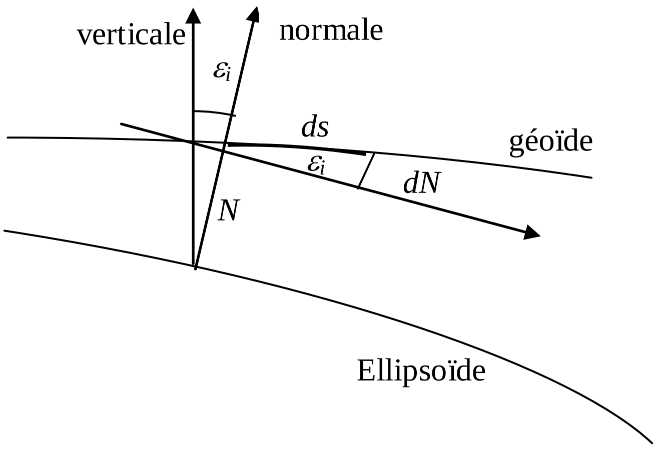
$$\xi_i = \varphi_a - \varphi_g \tag{2-1}$$

$$\eta_i = (\lambda_a - \lambda_g).cos\varphi \tag{2-2}$$

La déviation de la verticale dans la direction d'azimut Az est :

$$\varepsilon_i = \xi_i .cosAz + \eta_i.sinAz \tag{3}$$

Soit le schéma suivant le long de la direction d'azimut *Az* :



Entre la variation élémentaire de la hauteur du géoïde *dN* et ε_i, on a la relation :

$$dN = -\varepsilon_i \, ds \qquad (4)$$

Le signe – provient du fait que *dN* et ε_i varient dans le sens inverse. En intégrant (4) entre le point j et le point i, on obtient :

$$N_j - N_i = -\int_i^j \varepsilon . ds \qquad (5)$$

En première approximation, on peut écrire (5):

$$N_j - N_i = -\frac{\varepsilon_i + \varepsilon_j}{2} D \qquad (6)$$

où *D* est la distance ellipsoïdique entre les points i et j, et :

$$\varepsilon_i = \xi_i . cosAz + \eta_i . sinAz$$
$$\varepsilon_j = \xi_j . cosAz' + \eta_j . sinAz'$$

La relation (5) est appelée relation de Helmert.

A partir de (6), on déduit la relation d'observations entre le point i et le point j comme suit :

$$dN_j - dN_i = -\frac{\varepsilon_i + \varepsilon_j}{2} D + N_i^0 - N_j^0 + v_{ij} \qquad (7)$$

avec N_i^0 et N_j^0 les valeurs approchées des hauteurs du géoïde, v_{ij} le résidu.

L'ensemble des équations (7) s'écrit matriciellement :

$$\boldsymbol{A}.\boldsymbol{X} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{V} \tag{8}$$

avec :

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} dN_1 \\ dN_2 \\ . \\ . \\ dN_n \end{pmatrix} \tag{9}$$

Entre les n points, on a n(n+1)/2 relations. Ces relations ne sont pas indépendantes, la matrice normale $\boldsymbol{A}^T.\boldsymbol{A}$ devient singulière. Pour lever la singularité de cette matrice, on peut introduire un point fixe, soit calculer la matrice inverse généralisée de la matrice normale singulière.

Développons le deuxième cas. Posons :

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}.\boldsymbol{A} = {}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{n}} \tag{10}$$

On décompose $\boldsymbol{B}$ sous la forme :

$$\boldsymbol{B} = {}_nC_p \cdot {}_pC_n{}^T \tag{11}$$

où $\boldsymbol{C}$ est une matrice triangulaire inférieure de rang p = rang de $\boldsymbol{B}$. La matrice ${}_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}}{}^T \cdot {}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{p}}$. est de rang p régulière donc inversible. La matrice inverse intrinsèque de $\boldsymbol{B}$ est :

$$\boldsymbol{B}^- = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C})^{-1}.(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{C}^T \tag{12}$$

La solution de (8) est donnée par :

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}^-\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{L} = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C})^{-1}.(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{C}^T.\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{L} \tag{13}$$

La décomposition de $\boldsymbol{B}$ en $\boldsymbol{C}.\boldsymbol{C}^T$ s'obtient par la méthode de Cholesky mais en tenant compte de cette règle : si le i ème pivot est nul, on supprime la ligne correspondante de $\boldsymbol{A}^T.\boldsymbol{A}$ le pivot suivant se calculera à partir de l'élément (i+1,i+1) de la matrice $\boldsymbol{A}^T.\boldsymbol{A}$.

III. Calculs d'Erreurs

En écrivant (6) sous la forme :

$$\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{j}} - \boldsymbol{N}_{\boldsymbol{i}} = -\frac{\varepsilon_{\boldsymbol{i}} + \varepsilon_{\boldsymbol{j}}}{2}D + \left(\frac{\varepsilon_{\boldsymbol{i}} + \varepsilon_{\boldsymbol{j}}}{2} - \varepsilon_{\boldsymbol{m}}\right).D \tag{14}$$

où ε_m est la valeur moyenne de la déviation de la verticale entre i et j dans la direction ij, le deuxième terme de l'équation (14) représente l'erreur sur la différence des hauteurs du géoïde aux points i et j. On a donc la variance de ΔN par :

$$\sigma^2_{\Delta \boldsymbol{N}} = \sigma^2_{\varepsilon} D^2 \tag{15}$$

d'où l'écart-type sur N:

$$\sigma_N = \frac{\sigma_{\Delta N}}{\sqrt{2}} = \sigma_\varepsilon \frac{D}{\sqrt{2}} \tag{16}$$

La présence du facteur *D* montre qu'il faut considérer les points à une certaine distance limite D_{max}:

$$D_{max} = \frac{\sqrt{2}.\sigma_{N}}{\sigma_{\varepsilon}} \tag{17}$$

Calcul de σ_{ε}: on a $\varepsilon_i = \xi_i .cosAz + \eta_i.sinAz$, en négligeant les termes d'ordre de petitesse supérieur à 2, on a :

$$\sigma_{\varepsilon}^2 \leq \sigma_{\xi}^2 + \sigma_{\eta}^2 \tag{18}$$

En utilisant les équations (2), on peut écrire que :

$$\sigma_{\xi} = \sqrt{2}\sigma_{\varphi} \tag{19-1}$$

$$\sigma_{\eta} = \sqrt{2}\cos\varphi\sigma_{\lambda} \tag{19-2}$$

d'où :

$$\sigma_{\varepsilon} \leq \sqrt{2}\sqrt{\sigma_{\varphi}^2 + \cos\varphi^2\sigma_{\lambda}^2} \leq \sqrt{2}\sqrt{\sigma_{\varphi}^2 + \sigma_{\lambda}^2} \tag{20}$$

On prendra pour les écart-types de la latitude et de la longitude les écart-types des observations astronomiques des 8 points de Laplace soit :

$\sigma_{\varphi} = 0.2''$ et $\sigma_{\lambda} = 0.3''$

d'où :

$$\sigma_{\varepsilon} = 0.51'' \tag{21}$$

Application : Numériquement, l'équation (16) devient :

$$\sigma_{N}(m) = 0.001748 D^{km} \tag{22}$$

d'où le tableau:

D(km)	$\sigma_{N}(m)$
100	0.175
150	0.262
200	0.350
250	0.437

Références :

1. P. Hottier. 1980. *Théorie des erreurs*. Ecole Nationale des Sciences Géographiques. IGN France. 81p.

2. A. Bjerhammer. 1958. *A New Matrix Algebra*. Trans. Royal Institute of Technology, Stockholm.

3. A. Bjerhammer. 1973. *Theory of errors and generalized matrix inverses*. Elsevier.