Relativité Générale 2.0, une alternative à l'énergie sombre

CLAUDE LATOURRE, JANVIER 2016

Depuis plus d'un siècle, les équations de la Relativité Générale ont évoluées au gré des observations de l'Univers. Ces changements se sont exprimés à travers la constante cosmologique (Λ) qui fut d'abord ajoutée côté espace-temps pour rendre l'Univers stationnaire puis retirée lorsque l'on observa l'évolution de celui-ci. Plus récemment, elle réapparue du coté énergie-impulsion pour traduire l'expansion accélérée de l'Univers. Pourtant, leurs contractions permettent d'exprimer exactement la valeur de la constante cosmologique : $\Lambda = -\frac{1}{4}(R + \kappa\, T)$ *et de définir entièrement les équations de la Relativité Générale :* $\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu}\, R\right) = \kappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu}\, T\right)$ *sans faire appel à d'autres concepts : Énergie sombre, Quintessence…*

Historique des équations de la Relativité Générale

Initialement (Einstein, 1915), la première version des équations de la Relativité Générale mettaient en relation la métrique d'espace-temps ($g_{\mu\nu}$), le tenseur de Ricci ($R_{\mu\nu}$), la courbure scalaire (R), le tenseur énergie-impulsion ($T_{\mu\nu}$) et s'énonçait sans constante cosmologique :

$$R_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x)\, R(x) = \kappa\, T_{\mu\nu}(x) \qquad \text{(RG 1.0)}$$

Un peu plus tard (Einstein, 1917), pour refléter un Univers stationnaire, elle est apparue du côté espace-temps, comme facteur de la métrique :

$$R_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x)\, R(x) - \Lambda^{sta} g_{\mu\nu}(x) = \kappa\, T_{\mu\nu}(x) \qquad \text{(RG 1.1)}$$

Ensuite (Hubble, 1929), pour traduire l'expansion de l'Univers, elle en fut révoquée :

$$R_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x)\, R(x) = \kappa\, T_{\mu\nu}(x) \qquad \text{(RG 1.0)}$$

Et plus récemment (Riess, 1998) (Perlmutter, 1999), pour modéliser l'accélération de cette expansion, elle apparait du côté énergie-impulsion :

$$R_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x)\, R(x) = \kappa\, T_{\mu\nu}(x) + \Lambda^{acc} g_{\mu\nu}(x) \qquad \text{(RG 1.2)}$$

Et depuis, cette constante d'accélération d'expansion (Λ^{acc}), évaluée actuellement à 10^{-52} m^{-2}, fait l'objet de multiples interprétations (Peebles, 2003) : Énergie sombre, Quintessence…

Reformulation des équations de la Relativité Générale

En contractant les équations avec la métrique inverse ($g^{\mu\nu}$), on obtient :

$$R(x) - 2\, R(x) = \kappa\, T(x) + \Lambda^{acc} 4$$

ce qui permet de fixer l'expression de la constante cosmologique :

$$\Lambda^{acc} = -\frac{1}{4}\left(R(x) + \kappa\, T(x)\right)$$

que l'on remplace ensuite dans les équations :

$$R_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x)\, R(x) = \kappa\, T_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{4}\big(R(x) + \kappa\, T(x)\big)\, g_{\mu\nu}(x)$$

pour donner, après simplifications :

$$\left(R_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{4} g_{\mu\nu}(x)\, R(x)\right) = \kappa \left(T_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{4} g_{\mu\nu}(x)\, T(x)\right) \qquad \text{(RG 2.0)}$$

Ainsi formulées, les équations de la Relativité Générale expriment simplement la proportionnalité entre tenseurs à trace nulle :

$$\boxed{\tilde{R}_{\mu\nu}(x) \approx \tilde{T}_{\mu\nu}(x)}$$

sans faire appel à d'autres concepts tels que l'énergie sombre ou la quintessence.

Remarquons au passage, qu'elles peuvent être vues comme étant un extrémum de la quantité :

$$\big(R(x) - \kappa\, T(x)\big)\sqrt[4]{-g(x)}$$

LIMITE DANS UN CHAMP GRAVITATIONNEL FAIBLE POUR DE FAIBLES VITESSES

Avec une métrique qui dévie faiblement de celle de Minkowski :

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x)$$

on obtient, comme composantes du tenseur de Ricci et comme courbure scalaire :

$$R_{00}(x) \cong \frac{\Delta V(x)}{c^2}\; ; R(x) \cong -2\frac{\Delta V(x)}{c^2}\; ; \tilde{R}_{00}(x) \cong \frac{3}{2}\frac{\Delta V(x)}{c^2}$$

Tandis que le tenseur d'impulsion-énergie s'exprime, pour de petites vitesses :

$$T_{00}(x) \cong \rho(x)c^2\; ; T(x) \cong \rho(x)c^2 ; \tilde{T}_{00}(x) \cong \frac{3}{4}\rho(x)c^2$$

Ainsi, de la composante $({}_{00})$ des équations de la Relativité Générale :

$$\tilde{R}_{00}(x) = \kappa\, \tilde{T}_{00}(x)$$

on déduit :

$$\frac{3}{2}\frac{\Delta V(x)}{c^2} \cong \kappa \frac{3}{4}\rho(x)c^2 \qquad \text{ou encore} \qquad 2\frac{\Delta V(x)}{c^2} - \kappa\, \rho(x)c^2 \cong 0$$

Et cela nous permet d'évaluer la constante d'accélération d'expansion :

$$\Lambda^{acc} = -\frac{1}{4}\big(R(x) + \kappa\, T(x)\big) \cong -\frac{1}{4}\left(-2\frac{\Delta V(x)}{c^2} + \kappa\, \rho(x)c^2\right) \cong 0$$

qui n'est donc pas significative à la limite des champs faibles.

SOLUTIONS STATIQUE À SYMÉTRIE SPHÉRIQUE, DANS LE VIDE

La métrique statique à symétrie sphérique peut s'écrire de façon générale comme suit :

$$ds^2 = g_{tt}\, c^2 dt^2 + g_{rr}\, dr^2 + g_{\theta\theta}\, d\theta^2 + g_{\varphi\varphi}\, d\varphi^2 \text{ avec}$$

$$g_{tt} = -e^{\nu(r)}\ ;\ g_{rr} = e^{\mu(r)}\ ;\ g_{\theta\theta} = r^2\ ;\ g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2\theta$$

Cela donne, comme composantes non nulles du tenseur de Ricci et comme courbure scalaire :

$$R_{tt} = e^{-\mu}\left[\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'(\mu'-\nu')}{4} + \frac{\nu'}{r}\right] g_{tt}\,;\, R_{\theta\theta} = e^{-\mu}\left[\frac{\mu'-\nu'}{2r} + \frac{e^{\mu}-1}{r^2}\right] g_{\theta\theta}\,;$$

$$R_{rr} = -e^{-\mu}\left[\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'(\mu'-\nu')}{4} - \frac{\mu'}{r}\right] g_{rr}\,;\, R_{\varphi\varphi} = e^{-\mu}\left[\frac{\mu'-\nu'}{2r} + \frac{e^{\mu}-1}{r^2}\right] g_{\varphi\varphi}\,;$$

$$R = 2e^{-\mu}\left[\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'(\mu'-\nu')}{4} - \frac{\mu'-\nu'}{r} - \frac{e^{\mu}-1}{r^2}\right]$$

et, pour les composantes du tenseur de Ricci à trace nulle :

$$\tilde{R}_{tt} = [A(r) + B(r)]\, g_{tt}\,;\, \tilde{R}_{\theta\theta} = A(r)\, g_{\theta\theta}\,;$$

$$\tilde{R}_{rr} = [-A(r) + B(r)]\, g_{rr}\,;\, \tilde{R}_{\varphi\varphi} = A(r)\, g_{\varphi\varphi}\,;$$

$$A(r) = \frac{1}{2}e^{-\mu}\left[\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'(\mu'-\nu')}{4} + \frac{e^{\mu}-1}{r^2}\right];\, B(r) = \frac{1}{2}e^{-\mu}\left[\frac{\mu'+\nu'}{r}\right]$$

Dans le vide, ces composantes doivent être nulles, c'est à dire :

$$\frac{1}{2}e^{-\mu}\left[\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'(\mu'-\nu')}{4} + \frac{e^{\mu}-1}{r^2}\right] = 0\ ;\ \frac{1}{2}e^{-\mu}\left[\frac{\mu'+\nu'}{r}\right] = 0$$

La deuxième relation est réalisée pour : $\nu' = -\mu'$ que l'on reporte dans la première :

$$e^{-\mu}\left[-\frac{\mu''}{2} + \frac{\mu'^2}{2} + \frac{e^{\mu}-1}{r^2}\right] = 0 \Leftrightarrow -\frac{(e^{-\mu}-1)''}{2} + \frac{e^{-\mu}-1}{r^2} = 0$$

qui admet comme solution :

$$e^{-\mu(r)} = 1 + \frac{\alpha}{r} + \beta r^2 \qquad \text{avec } \alpha, \beta \text{ des constantes.}$$

Ce qui donne, comme métrique dans le vide :

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{\alpha}{r} + \beta r^2\right) c^2 dt^2 + \left(1 + \frac{\alpha}{r} + \beta r^2\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2$$

On peut aussi en déduire la courbure scalaire et la constante d'accélération d'expansion :

$$R = 2e^{-\mu}\left[-\frac{\mu''}{2} + \frac{\mu'^2}{2} - 2\frac{\mu'}{r} - \frac{e^{\mu} - 1}{r^2}\right] = 4\left[\frac{(e^{-\mu} - 1)'}{2} + \frac{e^{-\mu} - 1}{r^2}\right] = 12\beta$$

et $\qquad \Lambda^{acc} = -\frac{1}{4} R = -3\beta$

APPLICATION À LA COSMOLIGIE

En cosmologie, les équations de la Relativité Générale sont basées sur la métrique de Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker qui dépend du facteur d'échelle (a) et d'une constante (k) qui reflète le type de courbure de l'Univers (-1 : ouverte ; 0 : nulle ; 1 : fermée). :

$$ds^2 = g_{00}\, c^2 dt^2 + g_{11}\, dr^2 + g_{22}\, d\theta^2 + g_{33}\, d\varphi^2 \text{ avec}$$
$$g_{00} = 1\,;\; g_{11} = -\frac{a(t)}{1-kr^2}\,;\; g_{22} = -a(t)r^2\,;\; g_{33} = -a(t)r^2 \sin^2\theta$$

Avec cette métrique, on obtient, pour les composantes non nulles du tenseur de Ricci et la courbure scalaire :

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{c^2 a}\, g_{00}\,; R_{ii} = -\frac{2kc^2 + a\ddot{a} + 2\dot{a}^2}{c^2 a^2}\, g_{ii}\,; R = -6\frac{kc^2 + a\ddot{a} + \dot{a}^2}{c^2 a^2}$$

et, pour les composantes du tenseur de Ricci à trace nulle :

$$\tilde{R}_{00} = 3\frac{kc^2 - a\ddot{a} + \dot{a}^2}{2c^2 a^2}\, g_{00}\,; \tilde{R}_{ii} = -\frac{kc^2 - a\ddot{a} + \dot{a}^2}{2c^2 a^2}\, g_{ii}$$

Le tenseur impulsion-énergie est celui d'un fluide parfait :

$$T_{\mu\nu} = \frac{(\rho c^2 + P)V_\mu V_\nu}{c^2} - P\, g_{\mu\nu}$$

qui s'écrit, dans les coordonnées co-mobiles :

$$T_{00} = \rho c^2 g_{00}\,; T_{ii} = -P g_{ii}\,; T = \rho c^2 - 3P$$

ce qui donne, pour les composantes du tenseur impulsion-énergie à trace nulle :

$$\tilde{T}_{00} = 3\frac{\rho c^2 + P}{4} g_{00}\,; \tilde{T}_{ii} = -\frac{\rho c^2 + P}{4} g_{ii}$$

Ainsi, les équations de la Relativité Générale conduisent à une seule et même équation :

$$\frac{kc^2 - a\ddot{a} + \dot{a}^2}{2c^2 a^2} = \kappa\frac{\rho c^2 + P}{4}$$

qui permet, là aussi, de déterminer la constante d'accélération d'expansion :

$$\Lambda^{acc} = -\frac{1}{4}(R + \kappa\, T) = 3\frac{\ddot{a}}{c^2 a} + \kappa\frac{\rho c^2 + 3P}{2}$$

BIBLIOGRAPHIE

Einstein, A. (1915). « Die Feldgleichungen der Gravitation ». *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* , 844-847.

Einstein, A. (1917). « Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie ». *Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte* , 142-152.

Hubble, E. (1929). « A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae ». *National Academy of Sciences, Volume 15* , 168-173.

Peebles, P. &. (2003). « The Cosmological Constant and Dark Energy ». *Reviews of Modern Physicsl, Volume 75* , 559.

Perlmutter, S. &. (1999). « Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae ». *The Astrophysical Journal, Volume 517* , 565-586.

Riess, A. G. (1998). « Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant ». *The Astronomical Journal, Volume 116* , 1009-1038.