Unification des Systèmes Géodésiques Terrestres par le GPS

Par
Abdelmajid BEN HADJ SALEM
Ingénieur Général Géographe

Décembre 2015

Version 2.

abenhadjsalem@gmail.com

Table des matières

Unification des Systèmes Géodésiques Terrestres par le GPS

Abdelmajid Ben Hadj Salem, Ing. Général

abenhadjsalem@gmail.com

Résumé

On dispose de trois ou quatre réseaux géodésiques terrestres indépendants (c'est-à-dire non liés par des observations géodésiques), avec des points de ces réseaux observés par GPS. En déterminant les paramètres de la transformation de passage du système GPS vers les systèmes terrestres, on peut déterminer les corrections des coordonnées géodésiques des points terrestres utilisés dans le calcul de façon que l'ensemble des réseaux utilisés forme un système géodésique terrestre unifié.

1 Introduction

L'introduction de la technologie de positionnement par GPS (Global Positioning System) fournit à l'utilisateur sa position (X,Y,Z) tridimensionnelle dans le système géocentrique mondial dit $WGS84$ (World Geodetic System 1984). Parmi les modèles de transformation de passage du système géodésique mondial au système géodésique national ou local, on cite le modèle de Bursa-Wolf à 7 paramètres. Nous présentons ci-après ce modèle de transformations de passage entre les systèmes géodésiques avec en plus la possibilité d'unifier des systèmes géodésiques terrestres.

Nous utilisons par la suite les notations suivantes :
- (X_1,Y_1,Z_1) les coordonnées cartésiennes 3D dans le système géocentrique $WGS84$ (système 1),
- (X_2,Y_2,Z_2) les coordonnées cartésiennes 3D dans le système géocentrique local (système 2),
- $(\varphi_1,\lambda_1,he_1)$ les coordonnées géodésiques dans le système 1,
- $(\varphi_2,\lambda_2,he_2)$ les coordonnées géodésiques dans le système 2.

2 Le Modèle de BURSA - WOLF

Ce modèle s'écrit sous la forme vectorielle [1] :

$$X_2 = T + (1+m).R(rx,ry,rz).X_1 \tag{1}$$

Où :
- X_2 est le vecteur de composantes $(X_2,Y_2,Z_2)^T$, T désigne transposée,

- T est le vecteur translation de composantes $(T_X, T_Y, T_Z)^T$ entre les systèmes 1 et 2,
- $1 + m$ est le facteur d'échelle entre les 2 systèmes,
- $R(rx, ry, rz)$ est la matrice de rotation (3,3) pour passer du système 1 au système 2,
- X_1 est le vecteur de composantes $(X_1, Y_1, Z_1)^T$.

En développant (1), on obtient :

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \end{pmatrix} + (1+m) \begin{pmatrix} 1 & rz & -ry \\ -rz & 1 & rx \\ ry & -rx & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

avec (rx, ry, rz) les rotations comptées positivement dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Dans l'équation (2), on considère que le point dans le système terrestre local représenté par $\boldsymbol{X}_2$ est approché. On écrit alors :

$$\boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{X}_2^0 + d\boldsymbol{X}_2$$

Soit matriciellement :

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2^0 \\ Y_2^0 \\ Z_2^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} dX_2 \\ dY_2 \\ dZ_2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Alors l'équation (2) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} X_2^0 \\ Y_2^0 \\ Z_2^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} dX_2 \\ dY_2 \\ dZ_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \end{pmatrix} + (1+m) \begin{pmatrix} 1 & rz & -ry \\ -rz & 1 & rx \\ ry & -rx & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

3 Calcul des Paramètres du Modèle de Bursa-Wolf par les Moindres Carrés

En considérant comme inconnues les paramètres $T_X, T_Y, T_Z, m, rx, ry, rz$, et dX_2, dY_2, dZ_2 l'équation (4) s'écrit en gardant les termes du 1er ordre comme suit :

$$\begin{pmatrix} X_2^0 - X_1 \\ Y_2^0 - Y_1 \\ Z_2^0 - Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & X_1 & 0 & -Z_1 & Y_1 \\ 0 & 1 & 0 & Y_1 & Z_1 & 0 & -X_1 \\ 0 & 0 & 1 & Z_1 & -Y_1 & X_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \\ m \\ rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} dX_2 \\ dY_2 \\ dZ_2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Maintenant, on exprime les variations (dX_2, dY_2, dZ_2) en fonction des coordonnées géodésiques dans le système local c'est-à-dire $(d\lambda_2, d\varphi_2, dhe_2)$. On obtient sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} dX_2 \\ dY_2 \\ dZ_2 \end{pmatrix} = J. \begin{pmatrix} d\lambda_2 \\ d\varphi_2 \\ dhe_2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Avec :

$$J = \begin{pmatrix} -(N+he)cos\varphi sin\lambda & -(\rho+he)sin\varphi cos\lambda & cos\varphi cos\lambda \\ (N+he)cos\varphi cos\lambda & -(\rho+he)sin\varphi sin\lambda & cos\varphi sin\lambda \\ 0 & (\rho+he)cos\varphi & sin\varphi \end{pmatrix}_2 \tag{7}$$

où ρ, N sont les rayons principaux de courbure de l'ellipsoide de révolution donnés par :

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2sin^2\varphi)(1-e^2sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}} \tag{8}$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2sin^2\varphi}} \tag{9}$$

e^2 le carré de la première excentricité.

L'équation (5) devient :

$$\begin{pmatrix} X_2^0 - X_1 \\ Y_2^0 - Y_1 \\ Z_2^0 - Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & X_1 & 0 & -Z_1 & Y_1 \\ 0 & 1 & 0 & Y_1 & Z_1 & 0 & -X_1 \\ 0 & 0 & 1 & Z_1 & -Y_1 & X_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \\ m \\ rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} - J. \begin{pmatrix} d\lambda_2 \\ d\varphi_2 \\ dhe_2 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Pour permettre de résoudre par la méthode des moindres carrés le système précédent, on ne va pas considérer l'inconnue de l'altitude dhe_2 et la matrice J devient la matrice $J'(3 \times 2)$ donnée par :

$$J' = \begin{pmatrix} -(N+he)cos\varphi sin\lambda & -(\rho+he)sin\varphi cos\lambda \\ (N+he)cos\varphi cos\lambda & -(\rho+he)sin\varphi sin\lambda \\ 0 & (\rho+he)cos\varphi \end{pmatrix}_2 \tag{11}$$

Et on a :

$$\begin{pmatrix} X_2^0 - X_1 \\ Y_2^0 - Y_1 \\ Z_2^0 - Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & X_1 & 0 & -Z_1 & Y_1 \\ 0 & 1 & 0 & Y_1 & Z_1 & 0 & -X_1 \\ 0 & 0 & 1 & Z_1 & -Y_1 & X_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \\ m \\ rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} - J'. \begin{pmatrix} d\lambda_2 \\ d\varphi_2 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Si n est le nombre des points GPS utilisés sur l'ensemble des systèmes géodésiques terrestres, le nombre des équations d'observations est $3n$. Le nombre des inconnues est $7+2n$. La résolution de (12) est possible si $3n \geq 7+2n \Longrightarrow n \geq 7$ c'est-à-dire le nombre des points commun est supérieur à 7 ce qui possible dans ces cas de calculs.

En utilisant l'équation (12) pour les n points communs dans les systèmes 1 et 2 et en posant :

$$L = \begin{pmatrix} X_{21}^0 - X_{11} \\ Y_{21}^0 - Y_{11} \\ Z_{21}^0 - Z_{11} \\ \vdots \\ X_{2i}^0 - X_{1i} \\ Y_{2i}^0 - Y_{1i} \\ Z_{2i}^0 - Z_{1i} \\ \vdots \\ X_{2n}^0 - X_{1n} \\ Y_{2n}^0 - Y_{1n} \\ Z_{2n}^0 - Z_{1n} \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$U = \begin{pmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \\ m \\ rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} \tag{14}$$

$$W = \begin{pmatrix} d\lambda_{21} \\ d\varphi_{21} \\ \vdots \\ d\lambda_{2i} \\ d\varphi_{2i} \\ \vdots \\ d\lambda_{2n} \\ d\varphi_{2n} \end{pmatrix} \tag{15}$$

A la matrice $(3n, 7)$:

$$A(3n,7) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & X_i & 0 & -Z_i & Y_i \\ 0 & 1 & 0 & Y_i & Z_i & 0 & -X_i \\ 0 & 0 & 1 & Z_i & -Y_i & X_i & 0 \end{pmatrix}_{i=1,n} \tag{16}$$

B la matrice $(3n, 2)$:

$$B(2n,2) = \begin{pmatrix} -(N_i + he_i)cos\varphi_i sin\lambda_i & -(\rho_i + he_i)sin\varphi_i cos\lambda_i \\ (N_i + he_i)cos\varphi_i cos\lambda_i & -(\rho_i + he_i)sin\varphi_i sin\lambda_i \\ 0 & (\rho_i + he_i)cos\varphi_i \end{pmatrix}_{2(i=1,n)} \tag{17}$$

et V le vecteur des résidus de la méthode des moindres carrés, la détermination des paramètres inconnus (U, W) se fait par la résolution par les moindres carrés de l'équation :

$$AU - BW = L + V \tag{18}$$

Posons :

$$\mathcal{M} = (A, -B) \tag{19}$$

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} U \\ W \end{pmatrix} \tag{20}$$

Le système (18) s'écrit :

$$\mathcal{M}.\mathcal{X} = L + V \tag{21}$$

Chercher $\mathcal{X}$ telque $V^T.V$ soit minimum ce qui donne :

$$\bar{\mathcal{X}} = (\mathcal{M}^T.\mathcal{M})^{-1}.\mathcal{M}^T.L \tag{22}$$

Le vecteur résidu est donné par :

$$V = \mathcal{M}.\bar{\mathcal{X}} - L = \mathcal{M}.(\mathcal{M}^T.\mathcal{M})^{-1}.\mathcal{M}^T.L - L \tag{23}$$

Le facteur de la variance unitaire est donné par :

$$\sigma^2 = \frac{V^T V}{3n - 7 - 2n} \tag{24}$$

4 Unification des systèmes géodésiques terrestres

De (22), on tire le vecteur des corrections $(d\lambda_i, d\varphi_i)$ soit $\bar{W}$. On calcule par la suite les nouvelles coordonnées planimétriques $(\bar{X}_i, \bar{Y}_i)_2$. Soit $I_{(1)} = \{1, n_1\}$ l'ensemble des points communs utilisés du système terrestre $S_2^{(1)}$. On peut maintenant modéliser le passage des coordonnées $(X_i, Y_i)_2\,(i \in I_{(1)}$ aux coordonnées corrigées $(\bar{X}_i, \bar{Y}_i)_2\,(i \in I_{(1)})$ par des polynômes complexes conformes. Enfin, on transforme tous les autres coordonnées des points du système $S_2^{(1)}$, de même pour les autres systèmes terrestres utilisés. Ce qui permet d'unifier ces systèmes géodésiques terrestres.

Références

[1] **Abdelmajid BEN HADJ SALEM**.2015. *Eléments de Géodésie et de la Théorie des Erreurs*. 390p.

abenhadjsalem@gmail.com