ISSN 2079-3316 ПРОГРАММНЫЕ СИСТЕМЫ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ №?, 2015, с. ??–??

УДК 004.82:004.853

А. А. Демидов

Онтология, эволюционирующая под влиянием фактов

Аннотация. В работе предлагается алгебраический подход к построению онтологий, способных к эволюции под влиянием новых фактов и обладающих внутренними механизмами валидации. Для этой цели строится формальная модель взаимодействия объектов на основе клеточных автоматов, выясняются ограничения на операции с объектами, накладываемые такой моделью. Затем в контексте формальной модели определяются основные понятия модели представления знаний: концепты, экземпляры, свойства и отношения. При этом формальные ограничения переносятся в модель представления знаний естественным образом.

Ключевые слова и фразы: онтология, представление знаний, эволюция онтологии, динамика онтологии, формальные системы, клеточные автоматы.

Введение

Онтология — это система, состоящая из набора понятий и утверждений об этих понятиях, на основе которых можно строить классы, объекты, отношения, функции и теории. В общем случае онтологии содержат концепты (понятия или классы), экземпляры (индивиды или объекты), свойства концептов и экземпляров (атрибуты или роли), отношения между концептами или экземплярами (зависимости или функции), а также дополнительные ограничения, определяемые аксиомами и правилами вывода. Сформулировано множество определений понятия онтологии, наиболее точным представляется следующий вариант: «Онтология — это формальная система, ограничивающая возможные концептуализации» [1]. Поскольку мы хотели бы также

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ по программе фундаментальных исследований Президиума РАН № 16, проект «Эффективные методы представления фактографических данных в масштабируемых высокопроизводительных распределённых системах», а также РФФИ, проект 12-07-00533-а «Высокопроизводительные ACI транзакции в распределённых системах»..

хранить в онтологии отдельные экземпляры, данное определение необходимо уточнить: «Онтология — это формальная система, взятая вместе с её интерпретацией».

Большинство работ, посвящённых проблеме построения онтологий, предполагают, что область знаний, которую призвана описать онтология, полна и не меняется с течением времени. Тем не менее, в открытом и динамично меняющемся окружении сама область знаний постоянно развивается, пополняясь новыми фактами. При этом часть старых гипотез оказываются неверными, другие находят подтверждение, появляются новые гипотезы, выдвигаются обобщения старых теорий. Онтология должна отражать изменения, происходящие в соответствующей области знаний, она должна иметь способность меняться с течением времени, чтобы сохранять актуальность и полноту описания действительности.

Эволюция онтологии определяется как процесс последовательной адаптации онтологии к происходящим изменениям и непротиворечивого распространения этих изменений [**2**]. В силу сложности учёта большого количества факторов процесс эволюции проблематично организовать вручную — он имеет имеет множество источников и следствий, информация различных источников может оказаться неполной или противоречивой, или противоречия могут выявиться по мере распространения изменений в онтологии. Инженер по знаниям оказывается не в состоянии учесть все побочные эффекты вносимых изменений, поэтому в динамично меняющемся окружении необходима реализация специальных механизмов эволюции онтологии, поддерживающих её в актуальном состоянии.

В работе с онтологиями условно можно выделить два основных подхода [**3**]. Логический подход связан с представлением онтологии как формальной системы со своим синтаксисом, аксиомами и правилами вывода, он находится в русле классического искусственного интеллекта, изучающего способы представления знаний. Объектный подход предполагает представление онтологии в виде графа, состоящего из классов, объектов и связей между ними, он удобнее для реализации и чаще используется в прикладных разработках, в рамках него обычно создаются сверхбольшие ресурсы, используемые в широких предметных областях: различного рода словари, таксономии, рубрикаторы и тезаурусы.

Обладая лучшей наглядностью и удобством, объектный подход имеет серьёзный недостаток: он не предоставляет никаких внутренних механизмов контроля непротиворечивости онтологии, подобных тем, что основываются на свойствах полноты и непротиворечивости формальной системы. Если на такую онтологию не наложить внешних ограничений, она позволит описать всё, что угодно, даже как пойти «туда — не знаю куда» и принести «то — не знаю что» из русской народной сказки. Между тем, система внешних ограничений обуславливается той областью знаний, которую описывает онтология, а эта область постоянно развивается! Поэтому система ограничений сама должна меняться синхронно с эволюционирующей онтологией, но тогда возникает задача контроля непротиворечивости ограничений — получается замкнутый круг.

Несложно показать, что онтологии, создаваемые в рамках обоих подходов, могут быть преобразованы от одного вида к другому путём перехода к отношениям. Поэтому уместнее говорить о различных представлениях одной и той же модели — логическом и объектном. Представляется интересной задача объединить достоинства обоих представлений: иметь возможность работы с онтологией на уровне объектов и в то же время — получить удобные средства контроля непротиворечивости эволюционирующей онтологии. Этой теме как раз и посвящена данная работа.

1. Постановка задачи

Формальная система — это подмножество синтаксически корректных предложений (замкнутых формул) некоторого языка [4]. Чтобы задать формальную систему конструктивно, указывают множества её аксиом и правил вывода, позволяющих определить истинные предложения теории. Говорят, что формальная система с рекурсивным множеством правил вывода аксиоматизируема, если множество её аксиом рекурсивно перечислимо (общая теория рекурсивных функций изложена, например, Х. Роджерсом [5]). Множество выводимых предложений аксиоматизируемой системы также рекурсивно перечислимо, что влечёт существование для любой аксиоматизируемой системы рекурсивного множества аксиом. Формальная система может рассматриваться как система продукций, позволяющая на основе одних истинных высказываний получать другие [6].

Интерпретация — это метод трактовки формул, посредством которого устанавливается взаимосвязь формальной системы и содержательной теории. Интерпретация, в которой истинны все аксиомы формальной системы, есть модель [7]. Формальная система, взятая вместе с соответствующей интерпретацией, также может рассматриваться как система продукций: истинные в данной интерпретации формулы со свободными переменными лишь содержательно определяют набор символов констант, отношений и операций формальной системы, а истинные, но невыводимые предложения можно добавить к исходному множеству аксиом. В непротиворечивой теории в соответствующей интерпретации выводима только часть высказываний, допускаемых синтаксисом. В общем случае это множество не будет рекурсивно перечислимым, а система, получаемая пополнением множества аксиом — аксиоматизируемой.

Любая аксиоматизируемая формальная система может быть реализована с помощью машины Тьюринга, поскольку множества аксиом и правил вывода такой системы являются рекурсивными. Верно и обратное: правила перехода машины Тьюринга могут быть представлены правилами вывода аксиоматизируемой формальной системы, а конкатенация состояний машины и ленты в каждый момент времени — её предложениями (также известен явный изоморфизм Карри-Ховарда между компьютерными программами и математическими доказательствами [8]). Для представления неаксиоматизируемых формальных систем, а также многих аксиоматизируемых формальных систем с множеством аксиом, пополненным при интерпретации, требуется машина Тьюринга с оракулом. В случае онтологий множество известных фактов конечно, поэтому пополненное с помощью него рекурсивное множество аксиом останется рекурсивным.

Клеточный автомат на концептуальном уровне может быть определён следующим образом. Конфигурация — это отображение множества, называемого универсумом клеточного автомата, в другое множество, называемое алфавитом. Элементы универсума называются клетками, а элементы алфавита — состояниями. Тогда клеточный автомат — это отображение множества всех конфигураций в себя, удовлетворяющее условию локальности: следующее состояние клетки зависит только от текущего состояния клеток её конечной окрестности [9].

Конфигурацию произвольной конечной окрестности универсума можно рассматривать в качестве слова в алфавите клеточного автомата. Клеточный автомат тогда можно рассматривать как отношение или систему продукций, определённую на множестве слов. Множество слов, достижимых из начальной конфигурации, не обязательно рекурсивно перечислимо, если множество слов исходной конфигурации не является таковым. Для ряда клеточных автоматов доказано существование недостижимых конфигураций или «садов Эдема» — эти конфигурации не могут возникать в процессе вывода, поскольку никакая другая конфигурация не может их породить. Наряду с «садами Эдема» могут существовать конфигурации, достижимые только из определённых начальных конфигураций.

Доказана тьюринг-полнота некоторых видов клеточных автоматов, то есть возможность реализации с их помощью любой вычислимой функции [10]. Также существуют клеточные автоматы, с помощью которых построить машину Тьюринга невозможно [11]. С другой стороны, машина Тьюринга способна имитировать конфигурацию универсума клеточного автомата, если множество слов, образующих эту конфигурацию, рекурсивно перечислимо. В частности, машина Тьюринга способна моделировать клеточный автомат, имитирующий машину Тьюринга — поскольку начальная конфигурация значимых клеток конечна, а каждая последующая порождена алгоритмом, заданным начальной конфигурацией. Для имитации произвольной конфигурации универсума необходима машина Тьюринга с оракулом, в силу счётности множества всех слов такой машины достаточно для представления системы продукций над универсумом любой мощности.

Машина Тьюринга как универсальный вычислитель способна реализовать как систему продукций аксиоматизируемой формальной логической системы, так и систему продукций клеточного автомата, если его начальная конфигурация является рекурсивно перечислимой (то есть может быть инициализирована некоторым алгоритмом). Таким образом, выразительные способности тьюринг-полных клеточных автоматов достаточны для моделирования любых процессов, допускающих формализацию — в частности, они достаточны для реализации произвольных логических ограничений на структуру знаний. Однако свобода в построении формальных систем чрезвычайно велика, поэтому возникает проблема сужения класса систем, в рамках которого необходимо строить эволюционирующую онтологию.

По убеждению известных американских специалистов: «Клеточные автоматы являются стилизованными, синтетическими мирами, определёнными простыми правилами, подобными правилам настольной игры. Они имеют свой собственный вид материи, которая кружится в своих собственных пространстве и времени» [12]. С работой Конрада Цузе [13] связывают формирование нового мировоззрения «цифровой физики», исходящей из допущения, что весь мир, по сути, исчерпывающе описывается информацией. Среди наиболее известных сторонников этой идеи — физики Дэвид Дойч [14], Джон Арчибальд Уилер с его «it from bit» [15], Стивен Вольфрам с книгой «Новый вид науки» [16] и другие. Дэвид Дойч в своей работе приводит собственную физическую версию принципа Чёрча-Тьюринга: «Каждая конечно реализуемая физическая система может быть полностью моделирована универсальной модельной вычислительной машиной, оперирующей конечными средствами».

Вполне естественно поэтому поставить задачу выявить с помощью клеточных автоматов такие ограничения, которые бы, во-первых, позволяли гибко описывать предметную область в процессе развития знания о ней, а во-вторых, ограничивали рост противоречий в онтологии и обеспечивали возможности их устранения.

2. Состояние исследований

В последние годы методы работы с динамическими данными активно развиваются в составе парадигмы Семантического Веб, где одним из наиболее важных звеньев является язык описания структурированных онтологий OWL. В рамках международной конференции ISWC (International Semantic Web Conference) с 2007 года действует специальный семинар IWOD (The International Workshop on Ontology Dynamics), посвящённый проблеме эволюции онтологий. Данная проблематика присутствует также на конференциях более широкой тематики, посвящённых вопросам Semantic Web.

Большинство из методов эволюции онтологий, предлагаемых в настоящее время, носят эвристический характер — не имея глубокого теоретического обоснования, эти методы, тем не менее, оказываются работоспособными в ряде практических случаев. Краткий обзор эвристических методов дан в работе Ф. Заблиса [17] — как правило, они предполагают вмешательство пользователя в процесс модификации и применение сложных эвристических алгоритмов, берущих на себя рутинную часть работы по согласованию изменений.

Более перспективно выглядят методы эволюции онтологий, обоснованные теоретически. В работе П. Хаазе и Л. Стояновича [18] выделяется три вида непротиворечивости: структурная (синтаксическая), логическая (семантическая) и определяемая пользователем (внешняя). Большинство динамических онтологий обеспечивают только синтаксическую непротиворечивость на основе соответствия языку описания онтологии или схеме данных. Авторы анализируют все три вида непротиворечивости для DL подмножества языка OWL и предлагают обоснованное решение для каждого из них. Так, логическая непротиворечивость обеспечивается с помощью представления онтологии в качестве формальной системы — онтология непротиворечива тогда и только тогда, когда соответствующая формальная система имеет модель. Также приводятся эффективные алгоритмы локализации и устранения логических противоречий в онтологии с помощью исключения конфликтующих аксиом.

В работах Т. Шарренбаха и др. [19, 20] предлагается иной теоретический подход — рассматривается метод эволюции, не требующий исключения аксиом из онтологии. Вместо исключения аксиом (явных знаний) авторы предлагают объявлять недействительными конкретные выводы (неявные знания), которые вызывают противоречие в онтологии. Аксиомы, ответственные за конфликт, выделяются в отдельный набор, после чего выводы, в которых участвуют конфликтующие аксиомы, объявляются недействительными. При этом сохраняются выводы, в которых участвуют одна или несколько из этих аксиом, не конфликтующих между собой. Так, оба заключения A и $\neg A$ могут оказаться выводимы, невыводимым останется только противоречие $A \& \neg A$, что приводит к неоднозначности онтологии. С другой стороны, по сравнению с методом удаления аксиом данный подход позволяет, не приводя к явной бессмыслице, сохранить в онтологии больше информации.

Таким образом, наиболее глубокие результаты в настоящее время получены с использованием формальных логических систем. Иногда полезно допускать в онтологии определённый, не очень значительный уровень противоречивой информации, когда ещё сохраняется возможность привести онтологию в непротиворечивое состояние, — это позволяет на время отложить выбор в пользу верности той или иной аксиомы до появления новой подтверждающей или опровергающей информации.

3. Понятие клеточного автомата

Понятие клеточного автомата вводится следующим образом [4]. Выбираются группа G, называемая универсумом клеточного автомата, и произвольное множество A, называемое алфавитом. Универсум состоит из отдельных клеток — элементов группы G, элементы алфавита A называются состояниями. Конфигурация клеточного автомата есть отображение $w\colon G\to A$, иными словами конфигурация — это назначение клеткам определённых состояний. Существует естественное действие группы G на множестве A^G всех возможных конфигураций, называемое сдвигом. Клеточный автомат — это отображение множества конфигураций в себя, определённое с использованием системы локальных правил, коммутирующих с операцией сдвига.

Пусть G — группа, а A — множество. Определим множество W всех конфигураций универсума G:

$$W = A^G = \prod_{g\in G} A = \{w\colon G\to A\}. \tag{1}$$

Динамическая система над множеством W может быть определена как отображение $\tau\colon W\to W$ этого множества в себя. Всевозможные отображения $\{\tau\}$ образуют полугруппу $\mathcal{T}(W)$ трансформаций — операторов эволюции динамических систем. Условие локальности накладывает ограничения на пути эволюции универсума клеточных автоматов, поэтому операторы их эволюции образуют в $\mathcal{T}(W)$ подполугруппу $\mathcal{F}(W)$ равномерно локальных операторов [**21**]:

$$\mathcal{F}(W)\subset\mathcal{T}(W)=\{\tau\colon W\to W\}. \tag{2}$$

Определение 3.1. Оператор $\tau\colon W\to W$ называется локальным в точке $g\in G$, если существует её конечная окрестность S и отображение $\mu\colon A^S\to A$, такие что $\tau(w)(g)=\mu(A^S)$.

Определение 3.2. Окрестностью точки $g\in G$ называется подмножество $S\subset G$, такое что $g\in S$.

Другими словами, оператор является локальным в точке g, если его значение в этой точке определяется состоянием точек её конечной окрестности. Если оператор локален во всех точках $g\in G$, то он называется локальным оператором. Для определения понятия равномерной локальности необходимо определить операцию сдвига, упомянутую в определении клеточного автомата.

Для группы G и элемента $g\in G$, обозначим через L_g левое умножение G на g, то есть отображение $L_g\colon G\to G$, такое что $L_g(g')=gg'$ для всех $g'\in G$. Заметим, что

$$(L_{g_1}\circ L_{g_2})(g')=L_{g_1}(L_{g_2}(g'))=L_{g_1}(g_2g')=g_1g_2g'=L_{g_1g_2}(g')$$

для всех $g_1,g_2,g'\in G$, следовательно

$$L_{g_1}\circ L_{g_2}=L_{g_1g_2}. \tag{3}$$

Для каждого $g \in G$ преобразование L_g переводит группу G в себя, осуществляя некоторое движение. Состояния при этом сдвигаются таким образом, что каждый элемент $L_g(g')$ приобретает то состояние, в котором находился элемент g' до преобразования. Таким образом, изменение конфигурации $w_1 \in W$ в данном случае состоит в её сдвиге как целого относительно элементов универсума:

$$w_2(L_g(g')) = w_1(g')$$

для всех $g' \in G$, то есть представляет собой отображение $\tau_g\colon W \to W$, индуцированное преобразованием L_g:

$$gw = w \circ L_{g^{-1}}. \tag{4}$$

Множество отображений τ_g для всех $g \in G$ образует подгруппу $\mathcal{S}(W)$ в полугруппе $\mathcal{F}(W)$ равномерно локальных операторов, описывающих эволюцию клеточных автоматов. Таким образом, существует естественный гомоморфизм $\phi\colon G \to \mathcal{F}(W)$ группы G в полугруппу трансформаций универсума, определяющий представление группы G операторами, действующими на W.

Определение 3.3. Отображение, являющееся агрегацией τ_g для всех $g \in G$, называется левым действием группы G на множестве W:

$$\begin{gathered} G \times W \to W \\ (g, w) \mapsto gw. \end{gathered}$$

Определение 3.4. Оператор $\tau\colon W \to W$ называется равномерно локальным, если существует конечное множество $S \subset G$ и отображение $\mu\colon A^S \to A$, такие что

$$\tau(w)(g) = \mu((g^{-1}w)|_S)$$

для всех $w \in W$ и $g \in G$, где $(g^{-1}w)|_S$ обозначает сужение на множество S, то есть ограничение конфигурации $g^{-1}w$ множеством S.

Другими словами, оператор является равномерно локальным, если правило, определяющее его значение в точке g на основе состояния точек её конечной окрестности, одинаково для всех точек $g \in G$.

Определение 3.5. Клеточный автомат над группой G и алфавитом A есть отображение $\tau\colon W \to W$ множества конфигураций $W = A^G$ в себя, удовлетворяющее критерию равномерной локальности.

4. Задание объектов в пространстве

Эволюция динамической системы обычно представляется как действие $T \times \breve{W} \to \breve{W}$ полугруппы времени T на фазовом пространстве $\breve{W}$; в случае обратимой эволюции T является группой. Фазовым называется пространство, на котором представлено множество всех состояний динамической системы так, что каждому возможному состоянию соответствует точка пространства, а эволюция системы задаётся перемещением этой точки. Состояние представляет собой совокупность значений минимального набора независимых параметров — степеней свободы, необходимых для полного описания динамической системы [**22**]. Полугруппа времени T однозначно определяется отображением $\tau\colon \breve{W} \to \breve{W}$, задающим динамическую систему.

Фазовое пространство совокупности систем является произведением их фазовых пространств, а эволюция полной системы задаётся перемещением точки в общем фазовом пространстве. Фазовое пространство динамической системы можно разложить в произведение по степеням свободы N: множество значений каждого параметра $a \in N$ динамической системы образует подпространство $\breve{W}_a$, то есть

$$\breve{W} = \prod_{a \in N} \breve{W}_a. \tag{5}$$

Если множество значений каждого параметра a частично упорядочено некоторым отношением, то такое отношение определяет на множестве $\breve{W}_a$ структуру пространства сходимости [**23**, **24**]. Тогда отношение (5) определяет на $\breve{W}$ структуру произведения таких пространств.

Пример 4.1. Рассмотрим подвешенный на пружине груз, совершающий колебательные движения вдоль вертикальной оси. Динамику такой системы обычно рассматривают в фазовом пространстве, образованном произведением оси координат и оси импульсов её центра масс. Ту же систему можно описать, введя на всём пространстве координат поле гармонических осцилляторов. Фазовое пространство здесь получается гораздо больше и содержит полную информацию о состоянии каждой точки системы. Второй подход есть предельный случай первого — при выделении всё более и более мелких подсистем размерность фазового пространства растёт, и в пределе оно переходит в фазовое пространство поля осцилляторов.

Далее всегда будем понимать фазовое пространство в смысле второго подхода примера 4.1 — как описание поля осцилляторов, заданного в каждой точке пространства координат.

Фазовое пространство даёт много свободы в описании сложной динамической системы. Например, допускается ситуация, когда сразу несколько подсистем находятся в одной точке пространства координат, что не всегда удобно. Существует возможность убрать подобную избыточность без потери информации о состоянии, если выделить из фазового пространства координатные степени свободы.

Определение 4.1. Будем говорить, что две степени свободы $\breve{W}_a$ и $\breve{W}_b$ антикоррелируют в фазовом пространстве $\breve{W}$, если найдётся такой допустимый набор значений по остальным степеням свободы

$$w_0 \in \breve{W}/\big(\breve{W}_a \times \breve{W}_b\big)$$

и такая биекция $\zeta\colon \breve{W}_a \to \breve{W}_b$, что все точки

$$w_0 \times \big(\breve{W}_a \times \zeta(\breve{W}_a)\big) \in \breve{W}$$

не являются допустимыми состояниями динамической системы.

Чтобы устранить координатные степени свободы, масштабируем при необходимости фазовое пространство так, чтобы биекции ζ стали биссектрисами соответствующих квадрантов в ортогональном базисе, а затем спроецируем фазовое пространство по всем антикоррелирующим степеням свободы в пространство $W = p(\breve{W})$. Пространство W называется образом проектора p, двойственное ему пространство Z, образованное сокращёнными степенями свободы, называется ядром проектора p. Совокупность биекций $\{\zeta\}$ задаёт в пространстве Z отношение эквивалентности. Факторпространство $X = Z/\!\sim$ по отношению эквивалентности назовём координатным пространством. Пространство W назовём конфигурационным пространством.

Каждая конфигурация $w \in W \subset \breve{W}$ задаёт по-прежнему полное состояние динамической системы, хотя явная зависимость конфигурации от координат теперь отсутствует. Информация о размещении системы в координатном пространстве «зашифрована» здесь в самой конфигурации w и может быть получена с помощью вопроса «из чего состоит?». Так, пусть система w состоит из двух подсистем w_1 и w_2, что в соответствии с отношением (5) может быть записано в виде

$$w = w_1 \times w_2 \quad \text{или} \quad w' = w_2 \times w_1, \tag{6}$$

где произведение элементов $w_1 \in W_1$ и $w_2 \in W_2$ лежит в пространстве $W = W_1 \times W_2$.

Порядок, в котором берутся подсистемы в отношениях (6), определяет порядок на соответствующем координатном пространстве X: система w' есть та же система w в обратной системе координат. Таким образом, информация о размещении системы в пространстве координат присутствует в конфигурации неявным образом и не требует для себя дополнительных степеней свободы (аналогично времени T). Дополнительные степени свободы, тем не менее, являются удобным приёмом при описании динамики системы в охватывающем пространстве, позволяющим игнорировать состояние остальных элементов этого пространства.

Отображения $p/{\sim}\colon \breve{W} \to X$ и $p\colon \breve{W} \to W$ индуцируют на множествах X и W структуру пространств сходимости, унаследованную от $\breve{W}$. Действительно, элементами факторпространства являются множества — непересекающиеся классы эквивалентности. Отображение $q\colon Z \to X$, сопоставляющее каждому элементу $z \in Z$ содержащий его класс эквивалентности, является проекцией пространства Z на факторпространство X. Объявим множество открытым в факторпространстве X, если объединение всех входящих в него классов эквивалентности как подмножеств Z является открытым в Z. Легко видеть, что множество $U \subset X$ открыто тогда и только тогда, когда множество $q^{-1}(U)$ открыто в Z.

Определение 4.2. Пространство сходимости X допускает структуру группы, если на нём может быть определена групповая операция такая, что отображение

$$(x, y) \mapsto x^{-1}y$$

будет непрерывным в пространстве X, то есть прообраз любого открытого множества также будет являться открытым множеством.

Пространство X допускает движение, если может быть определёна группа Φ гомеоморфизмов, действующая на нём непрерывно

$$\begin{gathered}\Phi \times X \to X \\ (\phi, x) \mapsto \phi(x).\end{gathered} \tag{7}$$

Другими словами, группа гомеоморфизмов позволяет поворачивать пространство как целое, не разрушая его структуры. Структура пространства сходимости однозначно определяется системой окрестностей любого его элемента, если это пространство является группой — в таком случае сдвиги $L_g(x) = gx$ являются гомеоморфизмами [**24**].

Нам необходимо, чтобы координатное пространство X допускало движение, поэтому потребуем, чтобы оно допускало структуру группы. Тогда можно отождествить координатное пространство X с универсумом G, а конфигурационное пространство W — с множеством W конфигураций клеточного автомата. Также потребуем соблюдения принципа локальности взаимодействия — состояние любой точки $x \in X$ в каждый момент времени должно определяться состоянием точек конечной её окрестности.

Совместное действие группы сдвигов X и полугруппы времени T на пространстве конфигураций W может быть представлено в виде

$$\begin{gathered} T \times X \times W \to W \\ (t, x, w) \mapsto txw, \end{gathered} \tag{8}$$

где умножение определяется естественным образом через последовательное действие группы X и полугруппы T:

$$txw = t(xw) = (tx)w. \tag{9}$$

Теорема 4.1. *Динамическая система с локальным взаимодействием в пространстве, допускающем движение, может быть задана с помощью клеточного автомата.*

Доказательство. Пространства X и W динамической системы можно отождествить с универсумом G и множеством конфигураций W клеточного автомата при условии, что пространство X допускает движение. Принцип локальности взаимодействия в совокупности с возможностью движений пространства обеспечивает соблюдение критерия равномерной локальности отображения $\tau\colon W \to W$, задающего динамическую систему, поскольку движение $\phi(x) = L_g(x)$ пространства вместе с динамической системой есть не более чем изменение системы отсчёта:

$$x(tw) = t(xw),$$

то есть полугруппа T и группа X коммутируют между собой, что удовлетворяет определению клеточного автомата. □

Если полугруппа времени T имеет мощность $|T| \geq |X|$, локальность взаимодействия не препятствует точкам бесконечной окрестности оказывать опосредованное влияние друг на друга с течением времени.

Определение 4.3. Пусть на полугруппе времени T задано отношение линейного порядка. Множество $\{t_0 \leq \ldots \leq t_n\}$ упорядоченных этим отношением элементов называется временны́м интервалом, если оно содержит все элементы $t \in T$, такие что $t_0 \leq t \leq t_n$.

Определение 4.4. В пространстве X точка x причинно зависит от точки x_0 на временно́м интервале $(t_0, t_n) \subset T$, то есть $x_0 \overset{t}{\prec} x$, если найдутся конфигурации $w_a, w_b \in W$, отличающиеся состоянием единственной точки x_0:

$$\begin{aligned}(\forall x_i \neq x_0)\; w_a(x_i) &= w_b(x_i)\\ w_a(x_0) &\neq w_b(x_0),\end{aligned}$$

и момент времени $t \in (t_0, t_n)$, такие что эволюционировавшие конфигурации $tw_a, tw_b \in W$ будут отличаться по крайней мере в данной точке x:

$$tw_a(x) \neq tw_b(x).$$

В координатном пространстве X при определённых условиях могут возникать солитоны, или глайдеры — свободно перемещающиеся устойчивые паттерны, не привязанные жёстко к точкам этого пространства. Эти паттерны могут взаимодействовать друг с другом, оказываясь в одном месте координатного пространства и испытывая нелинейную интерференцию при относительном движении друг относительно друга. Такие обособленные образования, определённое время сохраняющие свою целостность в переменном окружении, будем называть объектами.

Определение 4.5. Сужение $v_0 = w_0|_{S_0}$ на $S_0 \subset X$ назовём объектом на временно́м интервале (t_0, t_n), если найдётся семейство конфигураций $U \subset W$, таких что в каждый момент времени $t \in (t_0, t_n)$ их эволюционировавшие версии имеют своим пересечением сужение $xv_0 = tw_0|_S$ на причинно зависимом от S_0 множестве $S \subset X$, являющееся левым сдвигом исходного сужения v_0:

$$\bigcap_{w \in U} tw = xv_0 = tw_0|_S.$$

Совокупность $\{S\}$ положений объекта назовём траекторией объекта в пространстве X на временно́м интервале (t_0, t_n). Траектория объекта является объединением ограниченных временны́м интервалом траекторий всех его точек.

Определение 4.6. Пусть группа Φ действует на множестве X и $x \in X$ — произвольная точка. Тогда множество

$$\Phi x = \{\phi(x) : \phi \in \Phi\}$$

называется орбитой точки x. Ограничение орбиты временны́м интервалом (t_0, t_n) является подмножеством множества Φx:

$$\Phi x|_t = \{\phi(x) : \phi \in \Phi, x \overset{t}{\prec} \phi(x)\}.$$

Поскольку различные орбиты не пересекаются, множество $\Phi x|_t$ оказывается частично упорядоченным, унаследовав порядок интервала (t_0, t_n). Выбором инфинитезимального генератора подгруппы $\Delta \subset \Phi$ можно добиться линейного порядка на множестве $\Delta x|_t$ при сохранении непрерывности действия Δ на пространстве X.

Определение 4.7. Сужение $\Delta x|_t$ действия подгруппы гомеоморфизмов пространства X на временно́м интервале (t_0, t_n) назовём траекторией точки $x \in X$, если множество $\Delta x|_t$ линейно упорядочено по параметру t и непрерывно в топологии пространства X.

5. Модель взаимодействия объектов

Будем рассматривать изменение объектов — их взаимное превращение в результате нелинейной интерференции двух или более объектов в некоторой области координатного пространства X с заданной на этом пространстве конфигурацией $w \in W$, эволюционирующей под действием полугруппы времени T. В силу принципа локальности взаимодействия и однородности пространства X никакой объект не может измениться самостоятельно — только в случае, когда в одной области пространства присутствуют разнонаправленные движения объектов, возникает процесс взаимодействия и изменения этих объектов. Совокупность точек в фоновом состоянии также может считаться объектом, так что любой процесс движения всегда осуществляется посредством взаимодействия.

Поскольку координатное пространство допускает движение, каждому состоянию $w(x)$ произвольной конфигурации $w \in W$ можно сопоставить свой элемент $\phi \in \Gamma \subset \Phi$ множества инфинитезимальных генераторов Γ группы гомеоморфизмов Φ (7), определяющий мгновенную скорость распространения этого состояния в пространстве X по траектории $\Delta x|_t$. Другими словами, алфавит клеточного автомата включает в себя множество генераторов группы Φ, то есть $A = \Gamma \times A_0$.

Определим систему локальных правил клеточного автомата (определение 3.1) таким образом, чтобы следующее состояние каждой точки $g \in X$ определялось совокупностью состояний тех точек её конечной окрестности $x \in S$, для которых $\phi(x) = g$

$$\tau(w)(g) = \mu(A^S) = e + \sum_{\substack{x \in S, \\ \phi(x) = g}} w(x), \tag{10}$$

где знак суммы обозначает абстрактную операцию $\sum\colon A^S \to A$ интеграции множества состояний в одно, а элемент $e = w(g) - w(g)$ описывает элиминацию текущего состояния при $\phi(g) \neq g$. Для возможности обратимой эволюции локальные правила клеточного автомата должны быть симметричны относительно обращения времени. Поэтому для описания сложных взаимодействий необходимо допустить для каждого состояния множество элементов $\bar{\phi} \subset \Phi$, то есть задать на w тензорное поле. При свободном движении $\bar{\phi}$ вырождается в одноэлементное множество $\phi \in \Phi$.

Заданный таким образом клеточный автомат позволяет дать простое определение объекта как произвольно выбираемого подмножества v конфигурации $w \in W$, все элементы которого движутся без взаимодействия по одинаковым траекториям. На малых временны́х интервалах изменения конфигурации в результате взаимодействий незначительны, и ими можно пренебречь: в пределе $t \to t_0$ любое подмножество $v \subset w \in W$ можно считать объектом.

Определение 5.1. Объект есть сужение $v = w|_S$ на $S \subset X$, всем элементам которого сопоставлен один и тот же гомеоморфизм $\phi \in \Phi$.

Как следует из определения, объект не является чётко заданной областью пространства — его границы условны и в пределах области одинакового ϕ могут выбираться произвольно. Подходящим выбором глобального гомеоморфизма $\phi_g = \phi^{-1}$ можно перейти к эквивалентной конфигурации, в которой данный объект покоится — то есть локально ϕ может быть сведён к единичному гомеоморфизму глобальным преобразованием

$$\phi' = \phi_g \phi. \tag{11}$$

Поэтому в соответствии с отношением (6) объект v может быть произвольным образом разбит на составные части — любая система непересекающихся подмножеств конфигурации w, в объединении дающих множество v, может считаться таким разбиением. В силу определения (1) конфигурация объекта $v = w|_S$ однозначно определяется совокупностью состояний его точек

$$v = \prod_{x \in S} w(x), \tag{12}$$

где знак произведения обозначает операцию $\prod\colon A^S \to W$ объединения упорядоченного множества состояний в конфигурацию.

В результате взаимодействия объект может разбиться на несколько частей с разными траекториями или же наоборот, слиться с другими объектами, продолжая совместное движение по одной траектории. В этом случае будем говорить о преобразовании объектов в результате их взаимодействия. Нас будет интересовать только конечный результат взаимодействия после того, как объекты разойдутся в пространстве на достаточное расстояние, чтобы не оказывать влияния друг на друга. То есть процесс взаимодействия может рассматриваться в качестве «чёрного ящика» — оператора эволюции, который принимает на вход одну совокупность объектов и после преобразования выдаёт на выход другую совокупность объектов

$$\langle v'_1, \ldots, v'_k \rangle = \biguplus_{i=1}^{n} v_i. \tag{13}$$

Процесс взаимодействия, тем не менее, может быть раскрыт путём перехода к другому масштабу разбиения объектов — чем мельче разбиение и характерное время контакта, тем больше деталей взаимодействия можно получить.

В силу отношений (6) кортеж объектов $\psi' = \langle v'_1, \ldots, v'_k \rangle$ является динамической системой, хотя и не привязанной жёстко к фиксированным координатам пространства X. Как следует из определения 4.5 эта система является замкнутой, то есть не взаимодействующей со своим окружением. Подходящим выбором глобального гомеоморфизма (11) на временно́м интервале (t_0, t_n) можно добиться расположения такой динамической системы в пределах некоторой области $S \subset X$, поэтому $\psi = w|_S \in A^S$ в каждый момент времени $t \in (t_0, t_n)$. Обозначим через Ψ множество всех сужений для произвольных $S \subset X$ и $w \in W$

$$\Psi = \{w|_S : w \in W, S \in 2^X\} \tag{14}$$

Теперь отношение (13) можно переписать в привычном виде:

$$\psi' = U\psi, \tag{15}$$

где $U = (tw)|_S$ — оператор эволюции при $t \in T$, а $\psi \in \Psi$ — функция состояния динамической системы.

Здесь возможен и другой способ описания взаимодействий — как отношений алгебраической системы. Произвольным образом разобьём исходную динамическую систему в координатном пространстве на две подсистемы — ψ_a и ψ_b так, чтобы $\psi_a\psi_b = \psi$ (для удобства будем опускать знак операции «×»). Взаимодействие систем ψ_b и ψ_a тогда может быть задано в виде:

$$\begin{cases} \psi'_a = \psi_a \odot \psi_b \\ \psi'_b = \psi_b \odot \psi_a, \end{cases} \tag{16}$$

где первое отношение описывает трансформацию ψ_a в ψ'_a с помощью системы ψ_b, а второе — обратное влияние системы ψ_a на ψ_b.

Пример 5.1. Рассмотрим стеклянную призму. Это система, способная преломлять или отражать свет под определённым углом. Пучок света — это тоже система, способная взаимодействовать с призмой. Если мы попробуем стукнуть по призме, то почувствуем боль, то есть наша система при взаимодействии с призмой получила ответ, что та есть твёрдый предмет. Наконец, две призмы можно разбить на части, сильно ударив их друг о друга.

Разные разбиения позволяют описать динамическую систему множеством различных способов: ту же систему ψ можно представить в виде $\psi_c\psi_d = \psi$ и описать взаимодействие (16) с помощью подсистем ψ_c и ψ_d. Может показаться, что разбиение $\psi'_a\psi'_b = \psi'$ итоговой системы также может быть выбрано произвольно — в таком случае каждому начальному разбиению соответствовало бы одинаковое множество конечных разбиений, а трансформации представлялись бы многозначными функциями, или отношениями. Однако такой подход приводит к неувязкам: получается, что любые трансформации должны быть коммутативны, что очевидным образом неверно — если сталь нагреть, а потом резко охладить, это не то же самое, как если её сперва резко охладить, а потом нагреть. Имеет место следующее общее утверждение.

Теорема 5.1. *Любой способ разбиения итоговой системы на части содержит неопределённость, не позволяющую однозначно задать правила трансформации (16) исходной динамической системы на основе уравнения её эволюции (15).*

Доказательство. Пусть эволюция динамической системы задана уравнением $\psi' = U\psi$. Произвольным образом выберем начальное $\psi_a\psi_b = \psi$ и конечное $\psi'_c\psi'_d = \psi'$ разбиения этой системы. Тогда взаимодействие систем ψ_a и ψ_b может быть задано одной из двух альтернатив

$$\begin{cases}\psi'_c = \psi_a \odot \psi_b \\ \psi'_d = \psi_b \odot \psi_a\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}\psi'_d = \psi_a \odot \psi_b \\ \psi'_c = \psi_b \odot \psi_a,\end{cases}$$

то есть конечное состояние ψ'_c определяется в первом случае начальным состоянием ψ_a (при воздействии ψ_b), а во втором — состоянием ψ_b (при воздействии ψ_a); то же самое верно и для ψ'_d.

Поскольку уравнение $\psi' = U\psi$ справедливо в обоих случаях, оно не даёт оснований предпочесть тот или иной вариант. Поэтому допустимы обе альтернативы, то есть две предыдущие системы уравнений на самом деле определяют многозначные функции

$$\begin{cases}\{\psi'_c, \psi'_d\} = \psi_a \odot \psi_b \\ \{\psi'_d, \psi'_c\} = \psi_b \odot \psi_a.\end{cases}$$

Таким образом, имеет место неопределённость, не позволяющая однозначно задать правила трансформации каждой из подсистем. □

Неоднозначность задания правил трансформации влечёт их коммутативность: поскольку множества $\{\psi'_c, \psi'_d\}$ и $\{\psi'_d, \psi'_c\}$ из теоремы 5.1 равны, то должно выполняться равенство $\psi_a \odot \psi_b = \psi_b \odot \psi_a$. Что приводит к парадоксу, поскольку в действительности трансформации не коммутативны.

Парадокс разрешается с учётом того, что указанная неопределённость задания трансформаций — устранима. Действительно, если бы системы ψ_a и ψ_b не взаимодействовали между собой, то их эволюция описывалась бы независимыми уравнениями

$$\begin{aligned}\psi'_a &= U\psi_a \\ \psi'_b &= U\psi_b,\end{aligned} \tag{17}$$

при этом эволюция $\psi' = U\psi$ объединённой системы также имела бы место. Тогда формально можно было бы записать правило трансформации $\psi'_a = \psi_a \odot \psi_b$, причём здесь оно уже может быть однозначно определено в силу уравнений (17).

Отсутствие взаимодействия между подсистемами не является необходимым условием для однозначного описания правил трансформации (16). Действительно, всегда сохраняется возможность склеить разбитые призмы из примера 5.1, следовательно информация о принадлежности осколков к той или иной призме не теряется в результате взаимодействия, а правила трансформации при взаимодействии призм могут быть заданы однозначно. В этом случае конечное разбиение всецело определяется разбиением исходной системы и обусловленным им преобразованием, поэтому не может быть выбрано произвольно.

Следствие 5.1. *Поскольку правила трансформации (16), полученные на основе уравнения эволюции (15), содержат устранимую неопределённость, то можно утверждать, что описание динамики системы с помощью этих правил более полно по сравнению с аналогичным описанием с помощью уравнения эволюции.*

Пример с призмами позволяет предположить, что возможность однозначного задания правил трансформации сохраняется при разбиении призм на всё более мелкие осколки — вплоть до квантового уровня, где разделение на подсистемы часто становится невозможным по причине того, что не каждой квантовой системе можно приписать определённую функцию состояния, и возможно лишь вероятностное описание её с помощью функционала плотности. Представляется интересным исследовать предлагаемый подход с точки зрения квантового формализма, однако этот вопрос выходит за рамки данной работы и здесь мы больше не будем возвращаться к нему.

Таким образом, правила трансформации могут быть заданы отношениями (многозначными функциями) на множестве Ψ, а когда детали взаимодействия могут быть определены — однозначными функциями на этом множестве. Иначе говоря, существует инъекция

$$\begin{aligned} &\xi \colon \Psi \to 2^{\Psi} \\ &\xi \colon \Psi \to \mathcal{T}(\Psi) \subset 2^{\Psi}, \end{aligned} \tag{18}$$

позволяющая отождествить динамические системы с элементами алгебраической системы 2^{Ψ} отношений между ними или, при наличии информации, с элементами полугруппы $\mathcal{T}(\Psi)$ их трансформаций.

Теорема 5.2. *Правила трансформации обратимой динамической системы могут быть однозначно определены.*

Доказательство. Рассмотрим динамическую систему, определённую в ходе доказательства теоремы 5.1, переписав правила трансформации в функциональном виде с использованием инъекции (18)

$$\begin{cases} \{\psi'_c, \psi'_d\} = \psi_b(\psi_a) \\ \{\psi'_d, \psi'_c\} = \psi_a(\psi_b). \end{cases}$$

Обратная эволюция $\psi = U^{-1}\psi'$ этой динамической системы задаётся уравнениями

$$\begin{cases} \psi_a = \psi_b^{-1}(\psi'_c) \\ \psi_a = \psi_b^{-1}(\psi'_d) \\ \psi_b = \psi_a^{-1}(\psi'_c) \\ \psi_b = \psi_a^{-1}(\psi'_d). \end{cases}$$

Функции ψ_b^{-1} и ψ_a^{-1} не могут быть однозначными, поскольку тогда они будут отображать различные аргументы в одинаковый результат, то есть не будут биекциями, что влечёт необратимость эволюции $\psi = U^{-1}\psi'$ и приводит к противоречию. Следовательно, эти функции — многозначные, вида

$$\begin{cases} \{\psi_a, \psi_x\} = \psi_b^{-1}(\psi'_c) \\ \dots, \end{cases}$$

где $\psi_x \in \Psi$ — некоторое состояние.

Система ψ является замкнутой по определению 4.5, она не взаимодействует со своим окружением. При обращении времени замкнутой является и система ψ', поэтому $\psi_x = \psi_b$.

Ещё раз обратив время, для прямой эволюции $\psi' = U\psi$ получим уравнения

$$\begin{cases} \{\psi'_c, \psi'_d\} = \psi_b(\psi_a) \\ \{\psi'_d, \psi'_c\} = \psi_b(\psi_b) \\ \dots. \end{cases}$$

Выражение $\psi_b(\psi_b)$ не зависит от ψ_a, в то время как его результат $\{\psi'_d, \psi'_c\}$, очевидно, зависит — по определению взаимодействия (16). Указанное противоречие доказывает теорему. □

Теорема 5.2 не даёт указаний относительно возможности однозначного задания необратимых динамических систем; по всей видимости, хотя бы часть из них должны допускать детерминированное описание.

Например, можно рассмотреть редукцию обратимой динамической системы к её подсистеме — такая динамическая система даже не будет замкнутой. Однако, если остальные подсистемы не оказывают влияния на состояние выбранной части, то эволюция редуцируемой динамической системы должна сохранять детерминированность. Правила трансформации обратимых динамических систем образуют в симметрической полугруппе $\mathcal{T}(\Psi)$ (18) подгруппу

$$\mathcal{S}(\Psi) \subset \mathcal{T}(\Psi) \subset 2^{\Psi}, \tag{19}$$

необратимые динамические системы могут описываться как правилами полугруппы $\mathcal{T}(\Psi)$ (детерминированные), так и правилами алгебраической системы 2^{Ψ} (недетерминированные).

Модель взаимодействия динамических систем вполне определяется двумя операциями:

$$\begin{aligned} &\times\colon \Psi^2 \to \Psi, \quad \text{«из чего состоит» в пространстве (12)},\\ &\odot\colon \Psi^2 \to \Psi, \quad \text{«как изменяется» во времени (16)}. \end{aligned} \tag{20}$$

Инфинитезимальная операция (10) не всегда может быть явно задана в каждой точке из соображений мощности — пространство X может оказаться несчётным. Вместо этого взаимодействие объектов описывается на макроуровне с помощью двух указанных операций, а инфинитезимальное взаимодействие на микроуровне сводится к нему.

Операция «$\times$» ассоциативна, поскольку свойство «из чего состоит», очевидно, удовлетворяет тождеству $(\psi_a \times \psi_b) \times \psi_c = \psi_a \times (\psi_b \times \psi_c)$. Но не коммутативна — порядок аргументов важен, поскольку задаёт расположение объектов в координатном пространстве. Об операции «$\odot$» известно пока только то, что она некоммутативна. Её основные свойства устанавливаются следующей теоремой.

Теорема 5.3. *Инъекция $\xi\colon \Psi \to 2^{\Psi}$ (18) множества динамических систем в алгебраическую систему $\langle 2^{\Psi}, \circ\rangle$ отношений между ними является гомоморфизмом относительно операции «$\odot$», если эта операция действует в пространстве T, связанном с пространством X преобразованием масштаба.*

Доказательство. Зададим начальное разбиение детерминированной динамической системы $\psi \in \Psi$ в координатном пространстве X так, чтобы она состояла из трёх подсистем следующим образом:

$\psi_a\psi_b\psi_c = \psi$. Будем попарно объединять эти подсистемы и описывать взаимодействие объединённой подсистемы с оставшейся частью полной динамической системы.

Здесь есть один тонкий момент: поскольку результат операции «$\times$» зависит от порядка аргументов, при объединении необходимо следить за тем, в какой системе координат производится данное действие. Для удобства введём унарную операцию $\neg\colon \Psi \to \Psi$ поворота системы координат, связанную с операцией «$\times$» тождеством

$$\neg(\psi_a\psi_b) = \neg\psi_b\neg\psi_a. \tag{21}$$

Объединим подсистемы $\psi_a\psi_b = \psi_{ab}$, тогда правила трансформации динамической системы $\psi_a\psi_b\psi_c = \psi_{ab}\psi_c$ запишутся в виде

$$\begin{cases} \psi'_{ab} = \psi_{ab} \odot \psi_c = \psi_c(\psi_{ab}) \\ \psi'_c = \neg(\neg\psi_c \odot \neg\psi_{ab}) = \neg\psi_{\neg b \neg a}(\psi_{\neg c}). \end{cases}$$

Во втором уравнении появляется операция обращения аргументов, поскольку относительно подсистемы ψ_c, на которую действует объединённая подсистема, подсистемы ψ_a и ψ_b расположены в порядке ψ_b, ψ_a — именно в таком порядке и происходит действие. Операция обращения всего выражения отвечает за возврат системы координат в исходное положение.

Теперь объединим подсистемы $\psi_b\psi_c = \psi_{bc}$, тогда правила трансформации динамической системы $\psi_a\psi_b\psi_c = \psi_a\psi_{bc}$ запишутся в виде

$$\begin{cases} \psi'_a = \psi_a \odot \psi_{bc} = \psi_{bc}(\psi_a) \\ \psi'_{bc} = \neg(\neg\psi_{bc} \odot \neg\psi_a) = \neg\psi_{\neg a}(\psi_{\neg c \neg b}). \end{cases}$$

Во втором уравнении также появляется операция обращения аргументов по аналогичной причине: подсистема ψ_a действует сперва на ближайшую к ней подсистему ψ_b, и только затем — на ψ_c. Операция обращения всего выражения отвечает за возврат системы координат в исходное положение.

Поскольку $\psi'_{ab}\psi'_c = \psi'_a\psi'_{bc} = \psi' = U\psi$, то можно приравнять правила трансформации первой и второй систем уравнений:

$$\begin{aligned} &((\psi_a \times \psi_b) \odot \psi_c) \times \neg(\neg\psi_c \odot (\neg\psi_b \times \neg\psi_a)) = \\ &= (\psi_a \odot (\psi_b \times \psi_c)) \times \neg((\neg\psi_c \times \neg\psi_b) \odot \neg\psi_a). \end{aligned}$$

Равенство выполняется, если и только если существует унарная операция $\propto\colon \Psi \to \Psi$, связывающая операции «$\odot$» и «$\times$» тождеством

$$\propto (\psi_a \psi_b) = \psi_a \odot \psi_b, \tag{22}$$

— тогда равенство можно преобразовать к очевидной форме:

$$\begin{gathered}\propto ((\psi_a \times \psi_b) \times \psi_c) \times \neg \propto (\neg\psi_c \times (\neg\psi_b \times \neg\psi_a)) = \\ = \propto (\psi_a \times (\psi_b \times \psi_c)) \times \neg \propto ((\neg\psi_c \times \neg\psi_b) \times \neg\psi_a).\end{gathered}$$

Унарная операция «$\propto$» существенно ограничивает возможный вид операции «$\odot$», в частности, должно соблюдаться условие

$$(\forall \psi_x, \psi_y \in \Psi) \quad \psi_x \psi_y = \psi_a \;\to\; \psi_x \odot \psi_y = \propto \psi_a,$$

которое означает, что все решения уравнения $x \times y = \psi_a$ с двумя неизвестными также являются решениями уравнения $x \odot y = \propto \psi_a$. В этом смысле операции «$\times$» и «$\odot$» эквивалентны с точностью до преобразования масштаба, определяемого операцией «$\propto$». При этом операция «$\odot$» оказывается, вообще говоря, неассоциативной:

$$(\psi_a \odot \psi_b) \odot \psi_c \;\neq\; \psi_a \odot (\psi_b \odot \psi_c),$$

$$\propto (\propto (\psi_a \psi_b) \psi_c) \;\neq \propto (\psi_a \propto (\psi_b \psi_c)).$$

Введём формальное обозначение $\propto^{-1} \propto \psi_a = \psi_a$ и перепишем тождество (22) в виде

$$\propto (\psi_a \psi_b) = \propto^{-1} \propto \psi_a \odot \propto^{-1} \propto \psi_b,$$

обозначим операцию «$\odot$» вместе с преобразованием «$\propto^{-1}$» обратного масштабирования её аргументов через $\tilde{\odot}\colon \Psi^2 \to \Psi$, тогда станет очевиден изоморфизм

$$\propto (\psi_a \times \psi_b) = \propto \psi_a \tilde{\odot} \propto \psi_b. \tag{23}$$

Также, после замены переменных $\psi_a \to \propto \psi_a$ и $\psi_b \to \propto \psi_b$ в тождестве (22) и перехода к обозначению $\tilde{\times}\colon \Psi^2 \to \Psi$, объединяющему операцию «$\times$» вместе с преобразованием «$\propto$» прямого масштабирования её аргументов, выявляется изоморфизм

$$\propto (\psi_a \tilde{\times} \psi_b) = \propto \psi_a \odot \propto \psi_b. \tag{24}$$

Изоморфизмы (23) и (24) связывают пространства T и X преобразованием масштаба, определяемом операцией (22).

Операция «$\times$» — ассоциативна, поэтому полугруппа $\langle\Psi, \times\rangle$ вкладывается в полугруппу $\mathcal{T}(\Psi)$ трансформаций множества Ψ. В силу изоморфизма (23) операция «$\odot$» тождественна операции «$\times$», если все её аргументы переведены в пространство T преобразованием «$\propto^{-1}$». Следовательно, инъекция $\xi\colon \Psi \to \mathcal{T}(\Psi) \subset 2^{\Psi}$ (18) является однозначным гомоморфизмом относительно операции «$\tilde{\odot}$».

В случае необратимых или недетерминированных динамических систем преобразование (22) может оказаться небиективным, а обратное ему преобразование $\propto^{-1}$ — неоднозначным. Тогда операция «$\tilde{\odot}$» будет многозначной, а изоморфизм (23) окажется гомоморфизмом $\langle\Psi, \tilde{\odot}\rangle$ в $\langle\Psi, \times\rangle$. В этом общем случае однозначным гомоморфизмом относительно операции «$\tilde{\odot}$» является инъекция $\xi\colon \Psi \to 2^{\Psi}$ (18). □

Следствие 5.2. *Операции «$\times$» и «$\odot$» являются своего рода проекциями одной операции «$\star$» на координатное и временно́е подпространства единого пространства $\propto TX$, и то, «как изменяется» система во времени, полностью определяется тем, «из чего состоит» эта система в пространстве.*

В контексте модели взаимодействия динамических систем операции «$\times$» — «из чего состоит» и «$\odot$» — «как изменяется» соотносятся как операционная и функциональная запись суперпозиции функций:

$$f \circ g \circ h = f(g(h(x))),$$

в первом случае акцентирована структура операции, во втором — её результат. В модели только ещё необходимо преобразование масштаба. Преобразование масштаба не может быть выбрано единичным, поскольку это повлекло бы ассоциативность операции «$\odot$», тогда из тождеств $\psi_a(\psi_b\psi_c) = (\psi_a\psi_b)\psi_c$ и $\psi_a\psi_b = \psi_a\psi_d$ следовало бы тождество $\psi_b\psi_c = \psi_d\psi_c$, что не всегда имеет место. Неустранимость масштабирования позволяет предположить, что операция (22) является виковским поворотом на мнимый угол, связывающим пространственные и временны́е координаты в пространстве Минковского iTX.

Таким образом, построенная модель включает:

- алгебру $\langle\Psi, \times, \odot\rangle$ динамических систем (14) и (20);
- полугруппу $\mathcal{T}(\Psi)$ или алгебраическую систему 2^{Ψ} (18);
- инъективный гомоморфизм $\xi\colon \langle\Psi, \tilde{\odot}\rangle \to \langle 2^{\Psi}, \circ\rangle$ (теорема 5.3);
- преобразование масштаба $\propto (\psi_a\psi_b) = \psi_a \odot \psi_b$ (22).

То есть строение и взаимодействие объектов исчерпывающе задаётся подсистемой $\mathcal{J} \subset \langle 2^{\Psi}, \circ, \propto\rangle$ алгебраической системы всех отношений на множестве Ψ, снабжённой операцией преобразования масштаба и изоморфной алгебраической системе $\langle \Psi, \times, \tilde{\odot}, \propto \rangle$, где операции «$\times$» и «$\tilde{\odot}$» эквивалентны и связаны с операцией «$\odot$» тождеством

$$\psi_a \times \psi_b = \psi_a \tilde{\odot} \psi_b = (\propto^{-1} \psi_a) \odot (\propto^{-1} \psi_b). \tag{25}$$

6. Модель представления знаний

В теоретической части работы построена и обоснована модель взаимодействия объектов, которая сводится к алгебраической системе $\mathcal{J} \subset 2^{\Psi}$ отношений на множестве Ψ, равномощной этому множеству:

$$|\mathcal{J}| = |\Psi| < |2^{\Psi}|. \tag{26}$$

Такое снижение мощности множества отношений, допустимых на множестве динамических систем, как раз и указывает на существование естественных модельных ограничений на операции с объектами (здесь — динамическими системами), которые могут быть использованы для реализации внутренних механизмов валидации онтологии, способной к эволюции под влиянием новых фактов.

Несмотря на радикальное снижение мощности, разнообразие допустимых алгебраических систем всё ещё очень велико. Определить $\mathcal{J}$ более точно, исходя из использованных ранее элементарных посылок, не представляется возможным, поэтому необходимая алгебраическая система должна формироваться динамически по мере выявления отношений конкретной предметной области, что как нельзя лучше отвечает потребностям задачи построения эволюционирующей онтологии. В отдельных типах алгебраических систем возможны дополнительные ограничения, обусловленные корреляцией операций «$\odot$» и «$\times$». Например, для обратимых систем верно, что

$$(\forall \psi_a, \psi_b \in \Psi)((\psi_a \odot \psi_b = \psi_x) \to (\psi_b \odot \psi_a = \psi_y)), \tag{27}$$

то есть все разложения системы ψ_x по операции «$\odot$» при перестановке аргументов являются разложениями единственной системы ψ_y.

В предлагаемой модели представления знаний все объекты одновременно являются отношениями между другими объектами, здесь алгоритмы и данные, функции и аргументы суть одно — конфигурации подпространств универсума. Обратимся ещё раз к примеру 5.1, где мы действовали на призму различными способами и постепенно узнавали все её свойства — прозрачность, твёрдость, хрупкость и другие. Призма прозрачна по отношению к свету определённой длины волны, тверда по отношению к нашей руке, но хрупка по отношению к другой призме, быстро движущейся относительно первой. Небо голубое только по отношению к людям, другие организмы могут вообще не иметь рецепторов в этой части спектра. Любые свойства объекта актуальны только по отношению к другой системе — субъекту.

Как правило, при определении свойств субъект опускается, после чего каждое свойство описывается своей характеристической функцией — объект может обладать определённым свойством или нет, например, быть красным или не быть. Такой подход оправдан, если субъект всегда один и тот же, но в общем случае указание на субъект необходимо.

Определение 6.1. Будем говорить, что объект ψ_b обладает свойством $\psi_a \to \psi'_a$ по отношению к субъекту ψ_a, если динамическая система ψ_a в результате взаимодействия с системой ψ_b переходит в состояние ψ'_a, другими словами

$$\psi_a \odot \psi_b = \psi'_a.$$

Субъект оказывает обратное влияние на объект, то есть в результате взаимодействия меняется не только аргумент, но и сама функция

$$\psi_b \odot \psi_a = \psi'_b,$$

в данной модели преобразования и переменные не существуют раздельно, это одно целостное понятие. Например, число 4 по определению есть отношение: бессмысленно говорить о числе 4 безотносительно других объектов — само по себе оно не имеет никаких свойств. Можно даже рассмотреть суперпозицию двух отношений, представляющих два числа 4, при этом они оба получат возможно другое, но вполне определённое значение. Объяснение парадокса состоит в том, что сразу несколько динамических систем могут оказаться эквивалентными по отношению к другой динамической системе, поэтому все их логически можно объединить в один класс. Когда мы говорим о числе 4, то оперируем классом

$$\{+4, -4, < 4, > 4, \text{четыре}, 4\ \text{яблока}, 4\ \text{груши}, \dots\},$$

выбирая из него подходящий объект по необходимости.

Пример 6.1. Пусть необходимо упорядочить стопку книг по именам авторов и имеется алгоритм сортировки, записанный на листке бумаги. Такой же алгоритм на диске компьютера будет эквивалентен алгоритму на листке бумаги при условии, что бумага взаимодействует со световым лучом, глазом и мозгом, а диск — с компьютером, монитором, глазом и мозгом. В обоих случаях в определённой области мозга сформируется одна и та же конфигурация, влияющая на другие мыслительные процессы, приводящие в итоге к движениям рук. У всех людей такая конфигурация будет различна, но если они будут выполнять предписания алгоритма, то упорядочат книги одинаково.

Определение 6.2. Если по отношению к динамической системе ψ_a подмножество систем $\Psi_B \subset \Psi$ является эквивалентным в смысле тождества

$$(\forall \psi_b \in \Psi_B)(\psi_a \odot \psi_b = \psi'_a),$$

то множество Ψ_B будем называть классом со свойством $\psi_a \to \psi'_a$.

Совокупность всех свойств объекта ψ_b полностью определяет соответствующее отношение $\psi_b \colon \Psi \to \Psi$ алгебраической системы $\mathcal{J}$. Совокупность всех свойств класса также определяет отношение, частично определённое на множестве Ψ. Это отношение является пересечением отношений объектов данного класса:

$$\psi_B = \bigcap_{\psi_b \in \Psi_B} \psi_b. \tag{28}$$

В эволюционирующей онтологии ни один объект не определён окончательно — под влиянием новых фактов отношения постоянно достраиваются и перестраиваются. Поэтому между объектами и классами нет никакой разницы — все они представлены в модели частично определёнными отношениями. По мере накопления знаний объект может оказаться классом если обнаружится несколько сущностей, свойства которых ранее совпадали. И наоборот — ошибочно разделённые ранее объекты могут быть объединены в единственный объект данного класса, тогда класс и объект полностью совпадут.

Класс как генерализация множества объектов позволяет элементарно выполнять операцию абстрагирования. Так, если «красный» принадлежит классу «цвет», то красный карандаш, естественно, будет иметь цвет. Карандаш, в свою очередь, может входить в классы «письменная принадлежность», «предмет» и другие — определение 6.2 позволяет множественное наследование, при этом гарантируется отсутствие любых коллизий, которые обычно связывают с ним.

Многоместные, или N-арные отношения, в которых участвуют несколько объектов, должны быть представлены в модели с использованием ассоциативной операции «$\times$» — «из чего состоит», как это изложено в доказательстве теоремы 5.3. Использование операции «$\odot$» в явном виде здесь невозможно в силу её неассоциативности, влекущей неоднозначность описания, тогда как совместная эволюция $\psi' = U\psi$ нескольких систем в действительности всегда приводит к однозначному результату. Поэтому при описании N-арных отношений необходимо выбрать один объект ψ_a, а все остальные объединить в комплексный объект ψ_b с помощью операции «$\times$». Вне зависимости от способа разбиения результат взаимодействия будет одинаков:

$$\psi' = U\psi = (\psi_a \odot \psi_b) \times (\psi_b \odot \psi_a). \tag{29}$$

В силу однозначного гомоморфизма $\xi\colon \langle\Psi, \times\rangle \to \langle 2^\Psi, \circ\rangle$ операция «$\times$» является суперпозицией отношений соответствующих объектов. С другой стороны, она выражается через операцию «$\odot$» с помощью унарной операции «$\propto^{-1}$» преобразования масштаба (25). Тождество

$$\psi_b \circ \psi_a = \psi_a \times \psi_b = (\propto^{-1} \psi_a) \odot (\propto^{-1} \psi_b), \tag{30}$$

где слева стоят отношения, а справа — соответствующие им объекты, является мощным средством обеспечения непротиворечивости онтологии, для чего даже не требуется просматривать весь ресурс. К сожалению, точное аналитическое выражение для унарной операции «$\propto^{-1}$» неизвестно, однако тождество (30) позволяет вычислять значения функции $\propto^{-1}\colon \Psi \to \Psi$ динамически. Это имеет смысл, поскольку для всех пар $\psi_a \circ \psi_b$ данная функция должна быть одной и той же — в противном случае можно констатировать наличие в онтологии противоречия.

На основе определения 6.1 для организации хранения знаний в реляционной базе данных можно предложить следующую базовую структуру данных:

head	
id	Идентификатор
label	Наименование

body	
subj	Субъект ($\to$ head.id)
obj	Объект ($\to$ head.id)
acts	Результат subj $\odot$ obj ($\to$ head.id)
cons	Результат subj $\times$ obj ($\to$ head.id)

На начальном этапе все таблицы пусты. В процессе работы каждое новое понятие фиксируется в таблице **head**, а каждое его свойство попадает в таблицу **body**. Пока функция $\propto^{-1}$ не определена, поле body.cons не заполняется — это можно сделать позже на основе значения body.acts. Классы можно получать динамически как пересечение нескольких отношений, однако из соображений быстродействия имеет смысл запустить резидентный процесс формирования классов, который бы создавал и удалял классы на основе устойчивых корреляций между объектами — чем больше объектов пересекается по большому количеству свойств, тем более резонно объединить их в один класс. Этот же процесс мог бы выполнять трудоёмкую задачу вычисления полей body.cons пока быстрое вычисление с использованием функции $\propto^{-1}$ не станет возможным.

В заключение необходимо прояснить вопрос — является ли предлагаемый подход достаточным для полного описания свойств реальных объектов, ведь количество отношений в модели ограничено неравенством $|\mathcal{J}| < |2^{\Psi}|$. На самом деле, указанное ограничение действует на всю базу знаний в целом, каждый отдельный объект может иметь любое количество отношений — для конечного множества объектов можно неограничено добавлять новые сущности в таблицу **head**. Для непротиворечивости единственно важно, чтобы отношения в любой момент собирались в алгебраическую систему $\mathcal{J}$, такую чтобы выполнялось тождество (30) и соблюдалось условие $|\mathcal{J}| = |\Psi|$.

Оказывается, что в непротиворечивой теории с бесконечным множеством объектов также не всякие отношения оказываются допустимыми [**25**]: «На современном нам языке принцип Кантора–Фреге формулируется в виде так называемой схемы аксиом свертывания. Пусть $F(y)$ — формула на языке теории множеств (кроме переменной y она может содержать и другие свободные переменные, тогда мы будем считать их параметрами). На $F(y)$ можно смотреть как на утверждение: «множество y обладает свойством F». Следуя подходу Кантора–Фреге, все множества y, обладающие свойством F, можно объединить в единое множество $x = \{y \colon F(y)\}$. $<\ldots>$ Как ни странно, оказалось, что некоторые из аксиом свертывания приводят к противоречиям».

7. Заключение

Клеточные автоматы позволили предложить совершенно новый подход к организации знаний в онтологии, эволюционирующей под влиянием фактов. Понятия класса, объекта и свойства оказались представлениями элементов алгебраической системы с двумя операциями: суперпозицией отношений и преобразованием масштаба. Строгие определения позволили выявить ограничения (30), обеспечивающие непротиворечивость онтологии. На более абстрактном уровне оказывается, что все операции сводятся к одной универсальной операции «$\star$», описывающей законы формирования конфигураций в едином пространстве $\propto TX$. Это — важный теоретический результат, проливающий свет на глубинные принципы функционирования сложных интеллектуальных систем.

Осталась неразобранной проблема практического выявления отношений предметной области на основе неструктурированного массива разнообразных сведений: баз данных, разрозненных текстов, информационных сообщений и других разнородных источников информации. С. Рассел и П. Норвиг в монографии [**26**] пишут: «Изучение синтаксиса естественного языка показывает, что наиболее очевидными его элементами являются существительные и именные конструкции, которые обозначают **объекты**, а также глаголы и глагольные конструкции, которые обозначают **отношения** между объектами. $<\ldots>$ Отношения могут быть унарными отношениями или **свойствами**, либо более общими N-арными отношениями» — с. 345.

Язык отражает явления реального мира, однако полезную информацию из поступающих сообщений ещё нужно суметь извлечь. Чтобы не задаваться техническими вопросами обработки текстов, положим, что у нас есть идеальный синтаксический анализатор, разбирающий входящие тексты и преобразующий их в непротиворечивую и полную семантическую сеть. Языковой аспект — это лишь часть проблемы. Основная трудность состоит в том, как вообще соотнести семантическую информацию о предметах и явлениях реального мира с конкретными отношениями модели взаимодействия объектов.

Эту чрезвычайно интересную и обширную проблему предполагается исследовать в рамках отдельной работы с использованием конкретных примеров и экспериментальных данных.

Список литературы

[1] N. Guarino, P. Giaretta. *Ontologies and Knowledge Bases* // Towards Very Large knowledge Bases: Knowledge Building and Knowledge Sharing // International Conference on Building and Sharing Very Large-Scale Know: Towards a Terminological Classification. — Amsterdam: Ios Press, 1995, p 3–28. ↑ 1.

[2] L. Stojanovic. *Methods and Tools for Ontology Evolution*, PhD thesis, University of Karlsruhe, (2004, August 5). 249 p. ↑ 2.

[3] Н. В. Лукашевич. Тезаурусы в задачах информационного поиска. М.: Издательство Московского университета, 2011. — 512 с. ↑ 2.

[4] Х. Д. Кейслер. *Основы теории моделей* // Справочная книга по математической логике: Теория моделей. Пер. с англ. — М.: Наука, 1982. Т. **1**, с 55–108. ↑ 3, 7.

[5] Х. Роджерс. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. Пер. с англ. М.: Мир, 1972. — 624 с. ↑ 3.

[6] А. И. Мальцев. Алгоритмы и рекурсивные функции. 2-е изд. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 368 с. ↑ 3.

[7] Д. Барвайс. *Введение в логику первого порядка* // Справочная книга по математической логике: Теория моделей. Пер. с англ. — М.: Наука, 1982. Т. **1**, с 13–54. ↑ 3.

[8] M. H. Sorensen, P. Urzyczyn. *Lectures on the Curry-Howard Isomorphism*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. — Amsterdam: Elsevier, 2006. Vol. **149**, p 442. ↑ 4.

[9] T. Ceccherini-Silberstein, M. Coornaert. Cellular automata and groups. Springer Monographs in Mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 2010. — 439 p. ↑ 4.

[10] Д. фон Нейман. Теория самовоспроизводящихся автоматов. Пер. с англ. М.: Мир, 1971. — 384 с. ↑ 5.

[11] М. Гарднер. Математические досуги. Пер. с англ. М.: Мир, 1972. — 496 с. ↑ 5.

[12] Т. Тоффоли, Н. Марголус. Машины клеточных автоматов. Пер. с англ. М.: Мир, 1991. — 280 с. ↑ 5.

[13] K. Zuse. Calculating Space. MIT Technical Translation. Cambridge: MIT (Proj. MAC), 1970, February. — 94 p. ↑ 5.

[14] Д. Дойч. *Квантовая теория, принцип Чёрча-Тьюринга и универсальный квантовый компьютер* // Квантовые компьютеры и квантовые вычисления. — Ижевск: Ижевская республиканская типография, 1999. Т. **2**, с 157–189. ↑ 6.

[15] J. A. Wheeler. *Information, physics, quantum: The search for links* // Complexity, Entropy, and the Physics of Information // The Proceedings of the 1988 Workshop on Complexity, Entropy, and the Physics of Information Held May-June, 1989, in Santa Fe, New Mexico. Santa Fe Institute Series. — Redwood City: Addison-Wesley, 1990, January 22. Vol. **8**, p 3–28. ↑ 6.

[16] S. Wolfram. A New Kind of Science. Champaign: Wolfram Media, 2002, May 14. — 1197 p. ↑ 6.

[17] F. Zablith. *Dynamic Ontology Evolution* // International Semantic Web Conference (ISWC) Doctoral Consortium. — Karlsruhe, Germany, 2008. ↑ 6.

[18] P. Haase, L. Stojanovic. *Consistent Evolution of OWL Ontologies* // The Semantic Web: Research and Applications // Proceedings of the 2-nd European Semantic Web Conference (ESWC). Lecture Notes in Computer Science. — Berlin: Springer-Verlag, 2005. Vol. **3532**, p 182–197. ↑ 6.

[19] T. Scharrenbach, C. d'Amato, N. Fanizzi, R. Grutter, B. Waldvogel, A. Bernstein. *Unsupervised Conflict-Free Ontology Evolution Without Removing Axioms* // Proceedings of the 4th International Workshop on Ontology Dynamics (IWOD). — Shanghai, China, 2010. ↑ 7.

[20] T. Scharrenbach, C. d'Amato, N. Fanizzi, R. Grutter, B. Waldvogel, A. Bernstein. *Default Logics for Plausible Reasoning with Controversial Axioms* // Proceedings of the 6th International Workshop on Uncertainty Reasoning for the Semantic Web (URSW). — Shanghai, China, 2010. ↑ 7.

[21] S. Capobianco. *Structure and Invertibility in Cellular Automata*, PhD thesis, University of Rome, (2004, December). 97 p. ↑ 8.

[22] B. Hasselblatt, A. Katok. *Principal structures* // Handbook of Dynamical Systems. — Amsterdam: North Holland, September 3, 2002. Vol. **1A**, p 1–204. ↑ 10.

[23] N. Rath. *Action of convergence groups* // Topology Proceedings, 2003. Vol. **27**, no. 2, p 601–612. ↑ 10.

[24] N. Rath. *Applications of convergence groups* // International Journal of Pure and Applied Mathematics, 2008. Vol. **48**, no. 3, p 415–433. ↑ 10, 12.

[25] К. М. Подниекс. Вокруг теоремы Гёделя. Рига: Зинатне, 1992. — 191 с. ↑ 30.

[26] С. Рассел, П. Норвиг. Искусственный интеллект: современный подход. 2-е изд., Пер. с англ. М.: Изд. дом «Вильямс», 2006. — 1408 с. ↑ 31.

Об авторе:

Алексей Александрович Демидов

Младший научный сотрудник Исследовательского центра искусственного интеллекта ИПС им. А. К. Айламазяна РАН.

e-mail: alex@dem.botik.ru

Пример ссылки на эту публикацию:

А. А. Демидов. «Онтология, эволюционирующая под влиянием фактов», *Программные системы: теория и приложения*, 2015, **??**:?, с. ??–??.

URL http://psta.psiras.ru/read/

, Demidov Aleksey. *Ontology, evolving under the influence of the facts.*

Abstract. We propose an algebraic approach to building ontologies which capable of evolution under the influence of new facts and which have some internal mechanisms of validation. For this purpose we build a formal model of the interactions of objects based on cellular automata, and find out the limitations on transactions with objects imposed by this model. Then, in the context of the formal model, we define basic entities of the model of knowledge representation: concepts, samples, properties, and relationships. In this case the formal limitations are induced into the model of knowledge representation in a natural way. *(*in Russian).

Key Words and Phrases: ontology, knowledge representation, ontology evolution, ontology dynamics, formal systems, cellular automata.

Sample citation of this publication:

, Demidov Aleksey. "Ontology, evolving under the influence of the facts", *Program systems: theory and applications*, 2015, **??**:?, pp. ??–??. (*In Russian*).

URL http://psta.psiras.ru/read/